加速器のビーム調整

1.　はじめに

電子蓄積リングにおけるビーム調整手法の基本的なところについて書く。「体験談を話して欲しい」とのことだったので、備忘録も兼ねて体験談を交えながら主観的に記述することにする。尚、ここで紹介するビーム調整手法は一例である（一般的な手法であるとは思う）。加速器施設ごとに置かれている状況が異なるため、ここに記述されているものとは異なるビーム調整手法が採用されている可能性もあるのでご注意頂きたい。

一般に電子蓄積リングなど円形加速器でのビーム調整では、COD、チューン、クロマティシティなどを補正することになる。紙面の都合上、これらビーム物理の基礎の部分は他のテキスト（例えば[1]）に任せ、このテキストではモニターで観測した現象をどのように補正するかについて記述しようと思う。

2.　なぜビーム調整を行うのか

そもそも加速器は「1 次ビーム、もしくは 1 次ビームをターゲットに照射して出てくる 2 次ビーム、もしくは電子ビームから出てくる放射光などを、医療目的や実験目的に使用するユーザーマシン」と「機器開発やビーム調整そのものが目的である原理実証のため加速器」の 2 つに大別できる。また線形加速器か円形加速器の違いや、加速する粒子がハドロンかレプトンかの違いもある。このように既存する加速器は多種多様である。しかしビーム調整の目的自体は、加速器の種類によらず概ね

1　ビームロスの抑制、またはビームロス発生箇所の局所化を行い、機器の故障や放射化を防ぐこと
2　ビーム強度、ビーム軌道、ビーム形状など、ビームの再現性を得ること
3　加速器の高度化を行うこと

にあるかと思う。

1 について、ビームが真空チェンバーなどの加速器機器に当たると熱的にまたは放射線的に機器が故障する可能性がある。同時に機器の放射化をも生じうる。

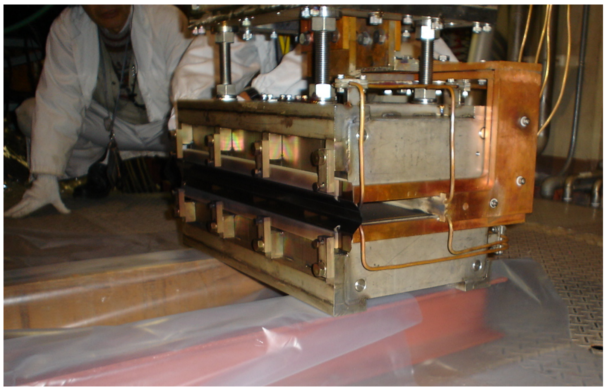


Fig. 1 放射化した KEK-PS ブースターリングの取出セプタム電磁石.

例えば Fig. 1 は KEK-PS のブースターリングで使用されていた取出セプタム電磁石で、故障により調査のためにブースターリングから取り外された際の写真である。筆者は撮影係として同行し 30 分でアラーム線量計から警報がなって退出を余儀なくなれた。このような装置に直接手を触れて修理を行わなければならない作業者の負担を考えると、ビーム調整により機器の放射化を抑制することは、ビーム調整を行う者にとっての使命であると、筆者は思う。

2 について、一般に加速器は地面の上に建屋、架台を通じて設置されるため、気温変化や潮汐による地面の膨張・収縮、また地盤沈下や隆起などが起こると加速器の大きさも変わる[2]。例えば円形加速器の場合、周長が設計値から変わると

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \qquad (2\text{-}1)$$

の関係式（Cは周長、αは運動量収縮因子, pはビームの運動量）より周回しているビームの運動量も設計値から変わる。周回するビーム位置も変わるので

- 周回ビームや出射ビーム、放射光などが加速器機器の予期せぬ場所に当たって、機器の放射化や故障を招く可能性

- 出射ビームの位置やエネルギーがずれて、ユーザー実験の条件が設計されたものからずれる可能性

を生じうる。ビームの再現性を得るための加速器調整は、加速器の種類を問わず、通常は行われるものと思う。

３について、何をもって高度化と呼ぶかは人によると思うが、例えば放射光施設において

- ビームサイズの低減 [3]
- 「機器故障によるビーム停止」の低減 [4]

は、ユーザー実験の観点から高度化に該当するのではないかと思う。ビームサイズの低減については、光源であるビームサイズを低減させると放射光の輝度やフラックス密度が上がり、試料に届く光子の数が増える。「機器故障によるビーム停止」の低減については、機器故障による長期のビーム停止は加速器機器や光学機器への熱負荷を変えることから好ましくなく、機器の二重化等でビーム停止を回避するのは有意義なものと思われる。

3. ビーム調整シナリオ

電子蓄積リングのビーム調整時、どういう順番で何をするかについてだが、一般には影響の大きいものから順に調整することになると思う：

1　まずは低電流でも良いのでビームを蓄積する。メンテナンスや節電などのため夏季・冬季に長期の加速器停止期間が設けられることがあるが、長期停止期間明けにビーム蓄積できないということを何度か経験した。機器トラブルの他、ヒューマンエラーによる機器パラメータの入れ間違いやケーブルの結線間違いなど、原因は多岐にわたる。

ビームを蓄積できないとほとんどのモニターは動作しないので、ビーム調整を開始できないし、ユーザーマシンの場合はユーザータイムの開始時刻が決まっている（＝ビーム調整できる時間は限られている）ので、ビームを蓄積できないのは大問題である。

「どこでビームが失われているのか」や「何ターンでビームが失われているのか」などの情報を得ることができれば、ビーム蓄積できない原因を解明する手助けになる。SPBPM (Single Pass BPM)やビームロスモニターなどがこれを調べるモニターの候補になると思う。ただし、必ずしも「ビームが失われる場所」＝「トラブルの場所」ではないので、その点は注意が必要である（ビームがなんらかの摂動を受けて、ある程度ふらふらと進んで、真空チェンバーに当たってビームロスしている、という可能性もある）。頑張ってビームを蓄積できるようにする。

2　ビームを蓄積できるようになったら、COD を補正する。COD の振幅が大きい場合はビームが真空チェンバーで削れるなどビームロスを生じ得る。またビームが電磁石の磁極中心を通らない場合、余計なビーム物理現象を生じうる。例えばビームが四極電磁石の磁場中心を通らない場合のベータトロン振動式は

$$x'' + k(s)x = k(s)x_0(s) \qquad (3\text{-}1)$$
$$k = eB'/p \qquad (3\text{-}2)$$

で与えられる。ただし B'は四極磁場係数、e はビーム電荷、p はビームの運動量で、x_0 は四極電磁石のアライメントエラーである。右辺の kx_0 がステアリングキックになっている。すなわち四極電磁石にミスアライメントがあってビームが四極磁場中心を通らない場合は COD を生じうる。同様に六極電磁石の磁場中心を通らない場合の個々の粒子のベータトロン振動式は

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{eB''(s)}{2p}\left\{x - x_0(s)\right\}^2 \\ &= -\frac{eB''(s)}{2p}\left\{x^2 - 2x_0(s)x + x_0(s)^2\right\} \qquad (3\text{-}3) \end{aligned}$$

で近似できる（B''は六極磁場係数）。上と同様、六極電磁石にミスアライメントが有る場合は、右辺第 2 項目からチューンシフトを生じ、第 3 項目で COD を生じる。

そこでビーム調整の初期は、まずはビームが電磁石の磁場中心付近を通るように COD を補正し、ミスアライメントから来る摂動を極力排除するのが良いのではないかと思う。真空ダクトにビームが当たる、という可能性も減らせると思う。

2　次にチューンを補正する。チューンが共鳴条件近くにあると、ビームサイズが膨らんだり、ビームの入射効率が悪くなったりするので、チューンを補正することで後続のビーム調整がやりやすくなると思う。ただし COD の式

$$x_0(s) = \frac{\theta(s')\sqrt{\beta(s)\beta(s')}}{2\sin(\pi Q)} \times \cos(|\phi(s)-\phi(s')|-Q\pi) \quad (3\text{-}4)$$

(βはベータ関数、ϕはベータトロン振動の位相、Qはチューン、キックθの位置を s'、観測点の位置を s としている)にチューン Q が含まれることから、チューンを補正すると上述の COD 補正の条件が崩れて COD が大きくなることがある。COD 補正とチューン補正は、何度か繰り返すことになると思う。

3　COD 補正とチューン補正が終われば、ある程度、ビームは安定になると思う。すなわちビームに多少、摂動を加えてもビームが全損する可能性は低くなると思う。RF 周波数を変えてクロマティシティや分散関数を測定する、ステアリングキックをわざと与えて COD を測定しベータ関数を推定するなどは、このタイミングで行うことになると思う。

4　必要があれば､線型結合共鳴と y 方向分散関の補正を行う。

5　必要があれば光軸補正を行う。

6　上記調整を行い、蓄積ビームのパラメータを固定して、入射軌道や入射用パルス電磁石のパラメータ調整などを行う。２～５の蓄積ビーム用のパラメータを固定する前に入射調整をやると、２～５の調整を行なった場合、入射パラメータもずれる可能性がある(調整をやり直しになる可能性がある)。

以上が、ビーム調整の順番になるのではないかと思う（上述したが、施設により優先順位が違うかもしれないので注意すること)。

4.　ビーム調整の概要について

以下に、電子蓄積リングにおけるビーム調整の各項目について概要を記す。

4.1.　COD 補正について

円形加速器に偏向磁場成分のエラーがあると COD を生じる。補正前の COD の測定例を Fig.2 に与える。このときの COD の RMS 値は x 方向に 1.4 mm、y 方向に 0.31 mm だった。

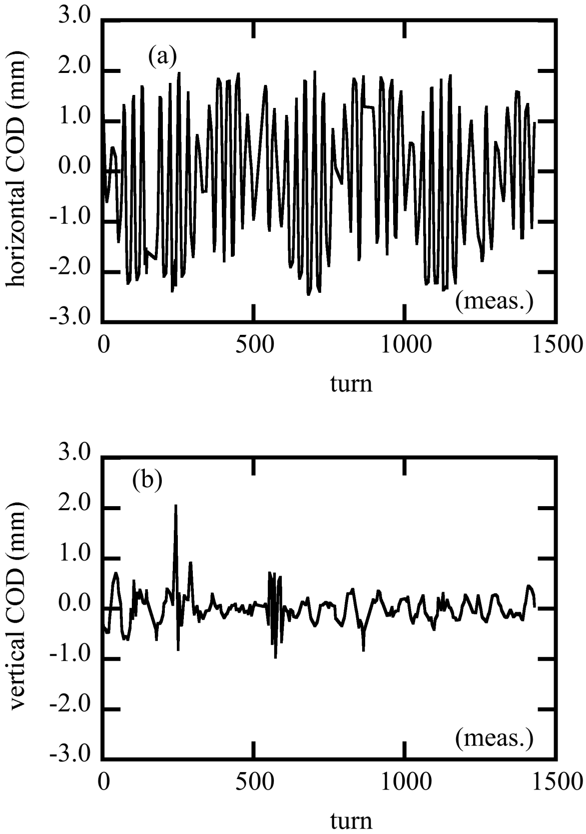


Fig. 2 補正前の(a) x 方向及び(b) y 方向の COD @ BPM.

尚、Fig. 2 は BPM で観測された COD であり、BPM やプロファイルモニターなどのモニターが無い場所にも COD は存在することには留意が必要である。モニターが無い場所で COD が大きくなっていてビームが削れるという可能性もあるので、計算コードでステアリングエラーを何種類か振って、モニターの無い場所に大きい COD を生じる可能性の無いことは、あらかじめ調べておいた方が良いと思う。BPM のない場所に COD がある場合には、例えば参考文献[5]などの手法で COD を補正することになると思う。

COD 補正の話に戻る。まず位置 m に BPM が、位置 n にステアリングがあるものと仮定する

(Fig. 3 参照)。このときステアリングキックθ_nが作る COD は

$$x_{cod,m} = R_{mn}\theta_n \tag{4-1}$$

$$R_{mn} = \frac{\sqrt{\beta_m\beta_n}}{2\sin(\pi Q)}\cos(|\phi_m - \phi_n| - Q\pi) \tag{4-2}$$

で与えられる。(β_m, ϕ_m)は BPM 位置でのベータ関数とベータトロン振動位相、(β_n, ϕ_n)はステアリング位置でのベータ関数とベータトロン振動位相である。

式(4-1)はθ_n に対して線形の式なので重ね合わせができる。すなわち複数個のステアリングキックθ_n （$n = 1 \sim N$で Nはリングに入っているステアリングの総数）が作る COD を位置 m の BPM で観測する場合の式は

$$x_{cod,m} = \sum_{n=1}^{N} R_{mn}\theta_n$$

$$= \begin{pmatrix} R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_N\end{pmatrix} \tag{4-3}$$

となり、BPM が総数 M個ある場合には、それぞれの BPM で観測される COD は応答行列 Rを用いて

$$\begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{steer} = R\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_N\end{pmatrix} \tag{4-4}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N}\\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{MN}\end{pmatrix} \tag{4-5}$$

と書ける。

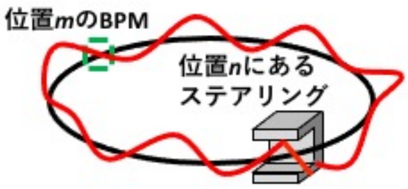


Fig. 3 COD 補正　概念図.

　また、運動量収縮因子αの定義式が

$$\alpha = \frac{1}{C}\oint\frac{D}{\rho}ds \tag{4-6}$$

なので（ただしρは分散関数が有る位置の偏向電磁石の曲率半径）、ステアリングの有る位置に分散関数 D_nが有る場合、COD 以外に運動量収縮因子も変わりうる：

$$\Delta\alpha = \frac{1}{C}\sum_{n=1}^{N} D_n\theta_n. \tag{4-7}$$

　COD 補正の考え方としては

1　「エラーが作る COD の観測値」と「ステアリングキックが作る COD」の和を「COD の目標値」に持っていく：

$$\begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{meas} + \begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{steer} = \begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{ref}. \tag{4-8}$$

2　ただしステアリングキックで周長は変えたくない：

$$\Delta\alpha = \frac{1}{C}\sum_{n=1}^{N} D_n\theta_n = 0. \tag{4-9}$$

となる。式(4-8)と(4-9)の連立方程式

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{ref} - \begin{pmatrix} x_{cod,1}\\ x_{cod,2}\\ \vdots\\ x_{cod,M}\end{pmatrix}_{meas} \\ 0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_N\end{pmatrix} \tag{4-9}$$

$$M = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N}\\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{MN}\\ D_1 & D_2 & \cdots & D_N\end{pmatrix} \tag{4-10}$$

を解けば良い。一般に Mは非正方行列である。Mの逆行列を求める際は SVD などを使えば良い。

　尚、COD の平均値に関してはステアリングではなく、RF 周波数を変えることによって補正する：COD の平均値をΔrとすると、リングの周長が$\Delta C = 2\pi\Delta r$だけ伸びるので式(2-1)と

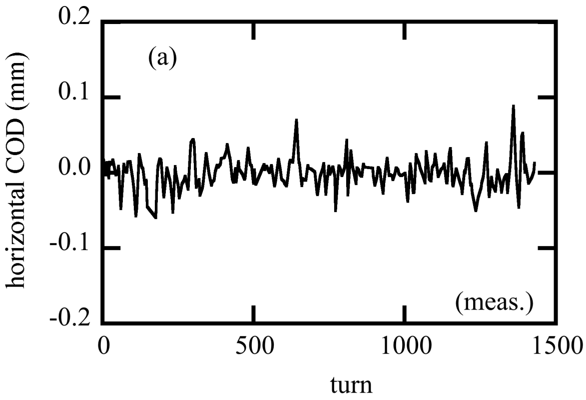
$$\frac{\Delta f}{f} = -\left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{\Delta p}{p} \tag{4-11}$$

の関係式（γはローレンツ因子）を用いて、$\Delta C = 0$となるように RF 周波数 fを変えれば良い。

　補正終了後の COD の例を Fig.4 に与える(Fig.2 が補正前の COD)。補正終了後、COD の RMS 値は x 方向に 0.02 mm、y 方向に 0.02 mm となった。

　経験談として：

・ 式(4-10)の M はラティス関数の理論値を用いて計算する。今回、ビームを磁極中心に通したい訳なので、COD 補正を繰り返すたびに、ラティス関数は理論値に近づく方向へ向かう筈である（すなわち M が真の値に近づく筈)。すなわち COD 補正は収束する方向へ向かうはず。一方、COD が有る時の現実的な（＝エラーの入った）ラティス関数を使って M を算出すると、COD 補正が収束しない場合がある。補正前後で M が変わるので、「COD 補正予想」と「解を実機に適用した時の COD」に乖離を生じ、場合によって発散するのだと思う。



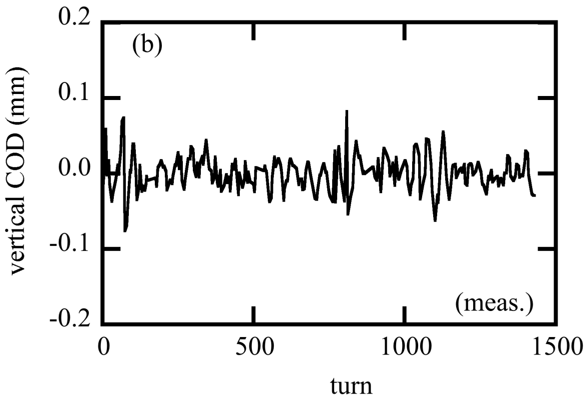


Fig. 4 補正後の(a) x 方向及び(b) y 方向の COD @ BPM.

・ 「BPM の誤差」や「ラティス関数の誤差から来る M のズレ」を考慮すると、式(4-10)の解の 100%を実機に適用するのは危険である（いきなり 100%を入れると、エラーから COD が逆に大きくなってビームが失われる場合がある)。式(4-10)の解の 25%なり 50%なりを実機に入れて、再度 COD を測定して式(4-10)の解を求めて、を繰り返し、少量の蹴り角で多数回、COD 補正するのが良いと思う。

・ 上と同じ理由から、極力「補正に使用するキック量の RMS 値」が小さくなるように、SVD の閾値を変えたり使うステアリングの数を変えたりして式(4-10)の解を求めるのが良いと思う。

4.2. チューン計測と補正について

横方向のダイポール振動の振幅が小さければ、「ダイポール振動の周波数」は「ベータトロン振動の周波数（＝チューン)」と一致する（逆に言うと、ダイポール振動の振幅が大きいと「ダイポール振動の周波数」は「チューンの設計値」からずれるので注意[6])。パルス電場やパルス磁場などをビームに与えて横方向にダイポール振動を誘起し、SPBPM でターン毎のビーム重心を検出すればチューンを測定できる。

ダイポール振動を SPBPM で観測すると、基本的に SPBPM はビームがある時にしか信号を検出しないので、SPBPM からの出力は「デルタ関数」x「ビーム重心」という形になる[6]。SPBPM の信号からビームのタイミングだけ信号を取り出して離散データに焼き直すと Fig.5 のような形になる。

SPBPM からの「デルタ関数」x「ビーム重心」という形の信号からチューンを求める方法は参考文献[6]を参照。Side-band の幅を周回周波数で割ればチューンの小数部がわかる。一方で Fig.5 の離散データからチューンを求める場合は、ターンおきのダイポール振動信号をフーリエ級数展開すれば良い。具体例を Fig.6 に与える。チューンスペクトルのピーク成分がチューンの測定値となる。Fig.6 の場合、チューンは Q_x = 0.139、Q_y = 0.324 となった（概ね、設計値通り)。

チューン補正について。チューンが設計値からずれている場合、補正する必要がある。四極電磁石を薄肉レンズ近似した場合に、2 種類の四極電磁石の磁場を変えた時のチューンシフトの式は

$$\begin{pmatrix} \Delta Q_x \\ \Delta Q_y \end{pmatrix} = \frac{e}{4\pi p} \begin{pmatrix} \beta_{x1} & \beta_{x2} \\ -\beta_{y1} & -\beta_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1' L_1 \\ B_2' L_2 \end{pmatrix} \tag{4-12}$$

で与えられる。ただしβ_x, β_y は四極電磁石がある位置のベータ関数、L は四極電磁石の有効長である。チューンが設計値からずれている分を式(4-12)の左辺に代入し、式(4-12)を解くことで必要な四極磁場を実機に与えれば良い。

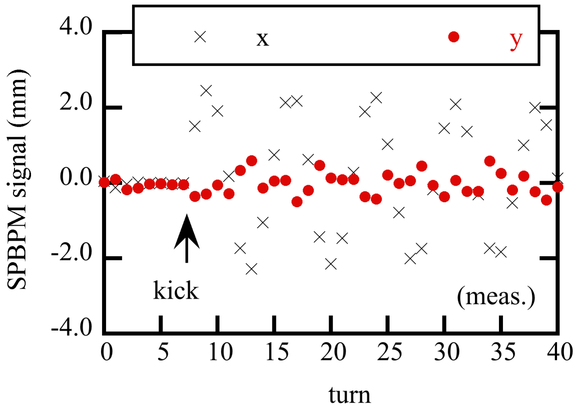


Fig. 5 SPBPM で観測したダイポール振動について、ビームタイミングの出力を取り出して離散データにしたもの.

経験談として：

- チューンシフトが大きい場合は、COD 補正時と同様、チューン補正も何回かに分けて行うのがビームロス回避という観点からは安全かとは思う。
- 上にも書いたがチューンを変えると COD が変わるので、COD 補正も織り交ぜながらチューン補正をするのが良いと思う。
- チューン補正のために四極磁場を変えるわけだが、四極磁場を変えるとベータ関数や分散関数も変わりうる。結果、エミッタンスが変化したり、アクロマット条件が崩れることがある。こういうことの無いよう、あらかじめ計算機でチューン補正に適した四極電磁石の有無を調べておいた方が良いのでは、と思う。

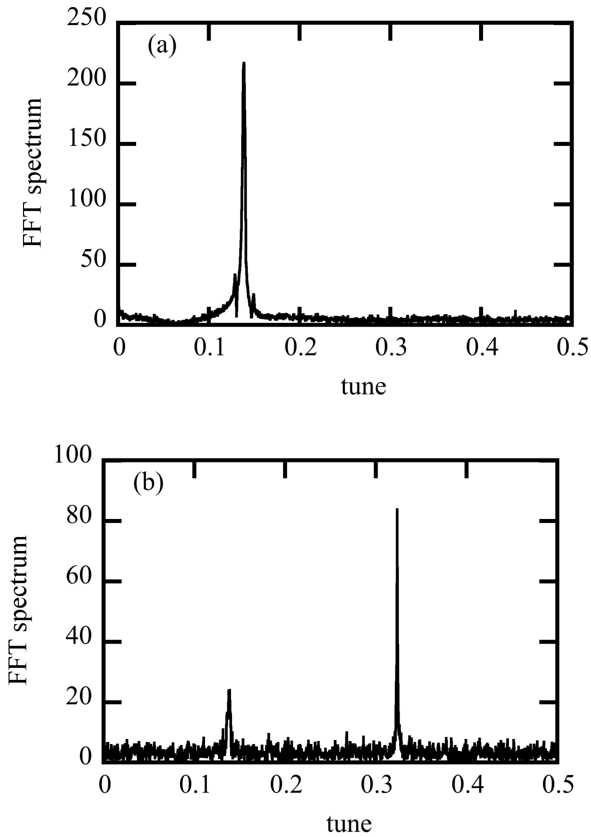


Fig. 6 Fig.4 について 1000 ターン分のデータをフーリエ級数展開したもの.横軸の 1 ステップの刻みを「サンプリングターンの逆数（今回は 1000 ターンサンプリングしたので、横軸の 1 ステップは 0.001）としてグラフを描けば上手になる.

4.3. クロマティシティ計測と補正について

クロマティシティξの定義が

$$\Delta Q = \xi \frac{\Delta p}{p} \tag{4-13}$$

なので、RF 周波数を変えながらチューンを測定すれば良い（式(4-11)の関係式から RF 周波数を変えることはビームの運動量偏差を変えることと同義である）。ただし、RF 周波数を大きく変えるとクロマティシティの非線形成分が見えてくるので[7]、チューンが線形に変わる範囲内で RF 周波数を変えるのが良い。RF 周波数を変えながらチューンを測定した例を Fig.7(a)に与える。RF 周波数の設計値を 508.58 MHz、運動量収縮因子を 1.59e-4 として式(4-11)を適用し Fig.7(a)の横軸をビームの運動量に変換したものが Fig.7(b)で

ある。式(4-13)から、線形関数でフィッティングを行えばクロマティシティの測定値が求まる。Fig.6(b)の場合、クロマティシティは$\xi_x = 1.9$, $\xi_y = 1.8$ となった（設計値は$\xi_x = 2.0$, $\xi_y = 2.0$）。

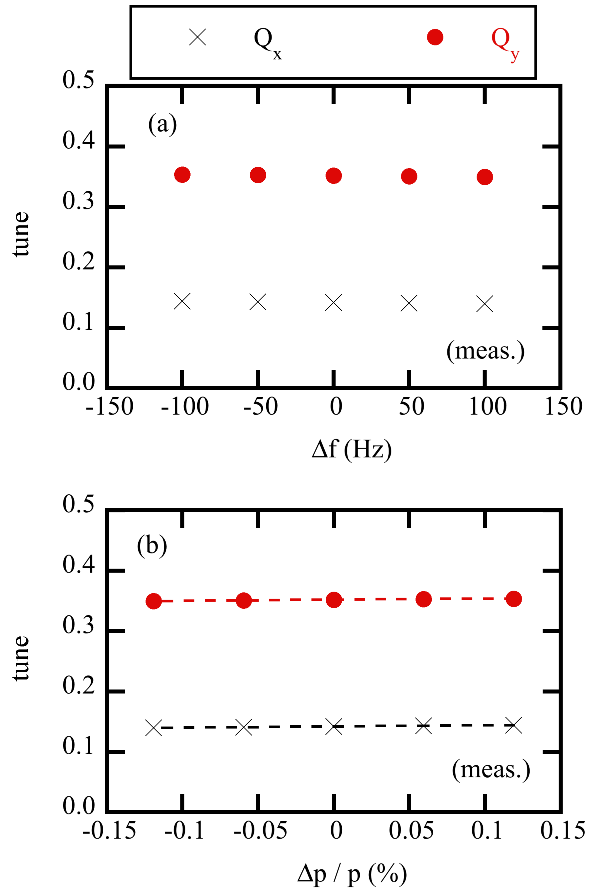


Fig. 7 クロマティシティ測定例. (a)横軸が RF 周波数の場合、(b) 式(4-11)を用いて横軸をビームの運動量偏差に変換した場合.

クロマティシティが設計値から大きくずれている場合、分散関数がある場所に設置された六極電磁石を用いてクロマティシティを補正すれば良い。六極電磁石を薄肉レンズ近似した場合に、2 種類の六極電磁石の磁場を変えた時のクロマティシティの変化量の式は

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi_x \\ \Delta\xi_y \end{pmatrix} = \frac{e}{2\pi p} \begin{pmatrix} D_1\beta_{x1} & D_2\beta_{x2} \\ -D_1\beta_{y1} & -D_2\beta_{y2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1''L_1 \\ B_2''L_2 \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}14)$$

で与えられる。ここでのβ_x, β_y は六極電磁石がある位置のベータ関数、Dは六極電磁石がある位置の分散関数、Lは六極電磁石の有効長である。

六極磁場はダイナミックアパーチャーやモーメンタムアクセプタンスなどにも関わっている。ダイナミックアパーチャーやモーメンタムアクセプタンスが悪化すると入射効率やビーム寿命が悪化するので、こういうことの無いよう、あらかじめ計算機でクロマティシティ補正に適した六極電磁石の有無を調べておく方が良いと思う。

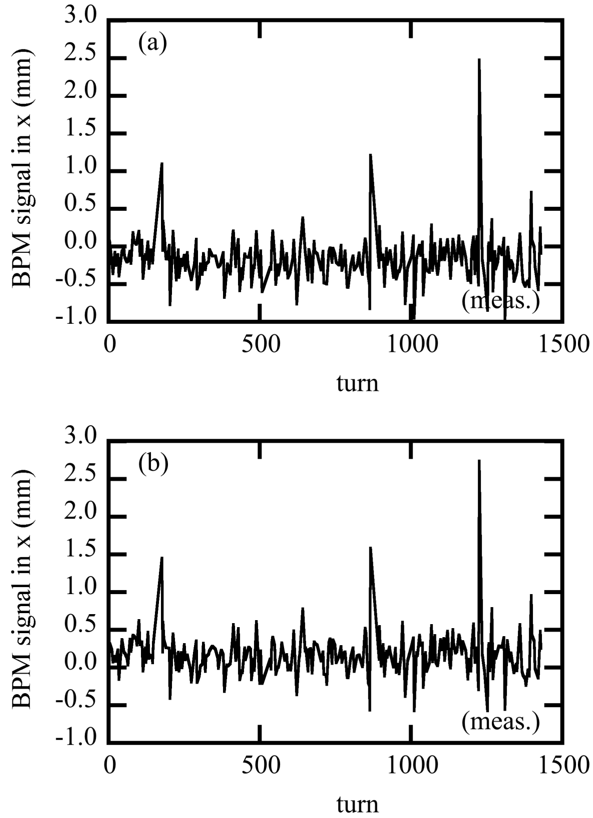


Fig. 8 x 方向の BPM 信号. Δf = (a) +100 Hz, (b) -100 Hz.

4.4. 分散関数の測定について

ビームの運動量偏差を変えた場合に生じる閉軌道は分散関数 Dを用いて $D\Delta p/p$ と書けるので、RF 周波数を変えて BPM で閉軌道を取得すれば分散関数を測定できる。測定例を Fig.7 及び 8 に与える。クロマティシティ同様、RF 周波数を大きく変えると分散関数の非線形成分が見えてくるので[8]、注意。

Fig.8(a)と(b)の閉軌道をそれぞれ

$$x_1 = x_{cod} + D_x \frac{\Delta p}{p}_1 \qquad (4\text{-}15)$$

$$x_2 = x_{cod} + D_x \frac{\Delta p}{p}_2 \quad (4\text{-}16)$$

と書くと、差分を取れば

$$(x_2 - x_1) = D_x \left(\frac{\Delta p}{p}_2 - \frac{\Delta p}{p}_1 \right) \quad (4\text{-}17)$$

と書ける。式(4-11)の関係式から RF 周波数をビームの運動量偏差に変換し式(4-17)に代入すれば x 方向の分散関数が求まる。y 方向についても同様。

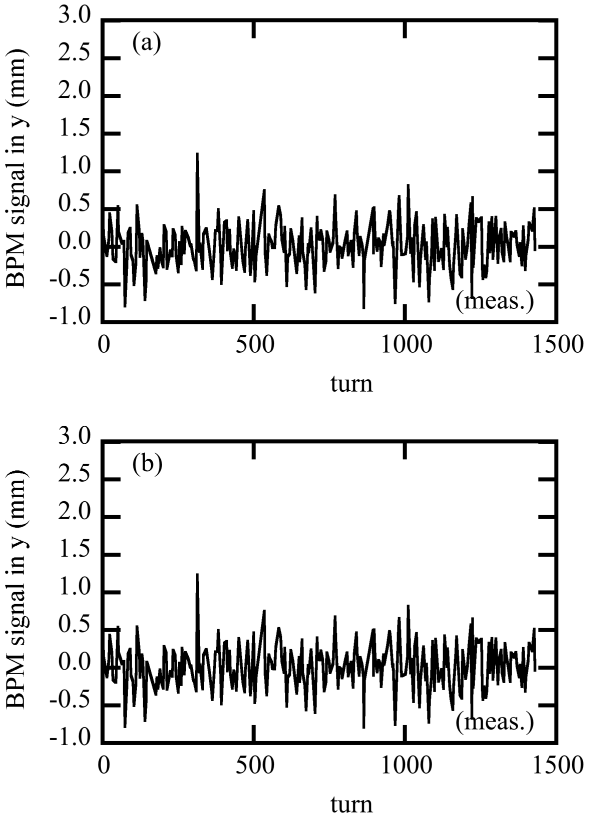


Fig. 9 y 方向の BPM 信号. Δf = (a) +100 Hz, (b) -100 Hz.

Fig.8、Fig.9 及び式(4-11)から求めた x 方向及び y 方向の分散関数を Fig.10 に与える。この時の分散関数の RMS 値は x 方向に 0.14 m, y 方向に 2.43 mm であった（単位に注意）。x 方向の分散関数は四極磁場で、y 方向の分散関数はスキュー四極磁場で補正できる。

4.5. ベータ関数の推定について

ベータ関数はリングの中でのビーム物理現象を理解する上で是非ともおさえておきたい重要なパラメータで有るが、測定するのは難しい。まず1台ずつ四極電磁石の磁場を変えてチューンを計測するという方法があるが、この場合には四極電磁石1台ずつに独立電源が必要となり困難な事が多い。また、場所ごとにビームサイズを調べるという方法もあるが、この場合は観測したいベータ関数の数だけ多数のプロファイルモニターが必要となる。ポピュラーなのは、1 台ずつステアリングでビームをキックしながら COD を測定することで式(4-5)の応答行列 R の測定値を求め、計算機でこれを再現するように「エラー有りのベータ関数」を求める方法[9]だと思う。リングにはもともと COD を求めるために BPM が複数個入っているので、BPM を利用することでベータ関数の観測点を多く取ることができる。

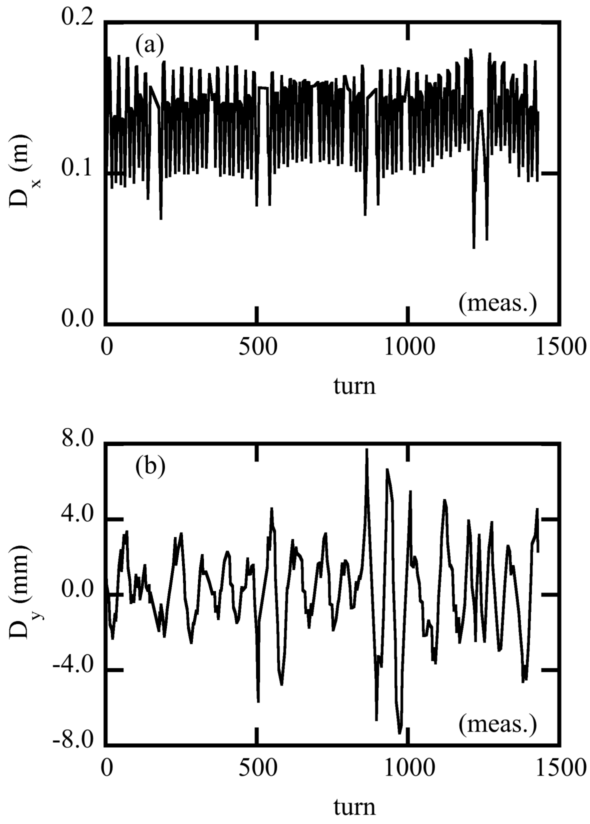


Fig. 10 (a) x 方向および(b) y 方向の分散関数.

まずステアリング1台ごとにキック θ を与え、COD を測定する。式 (4-5) の関係式から COD を θ で規格化することで応答行列 R_{meas} が求まる。

次に計算機内の加速器モデルに四極磁場誤差をばらまく。エラーがない場合の応答行列を R_{model} とし、各々の四極磁場誤差の位置で微量の

四極磁場誤差キック$\Delta B'$を与えて、上記要領で応答行列の変化量を求める。$\Delta B'$で規格化することで

$$\frac{dR_{model}}{dB'} = \begin{pmatrix} \frac{dR_{11,model}}{dB'_1} & \frac{dR_{11,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dR_{11,model}}{dB'_K} \\ \frac{dR_{12,model}}{dB'_1} & \frac{dR_{12,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dR_{12,model}}{dB'_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dR_{MN,model}}{dB'_1} & \frac{dR_{MN,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dR_{MN,model}}{dB'_K} \end{pmatrix} \tag{4-18}$$

が求まる。ここで $k = 1 \sim K$は加速器モデルに設定した四極磁場誤差の数。あとは

$$R_{model} + \frac{dR_{model}}{dB'}\Delta B' \sim R_{meas} \tag{4-19}$$

となるように$\Delta B'$を決めれば良い。

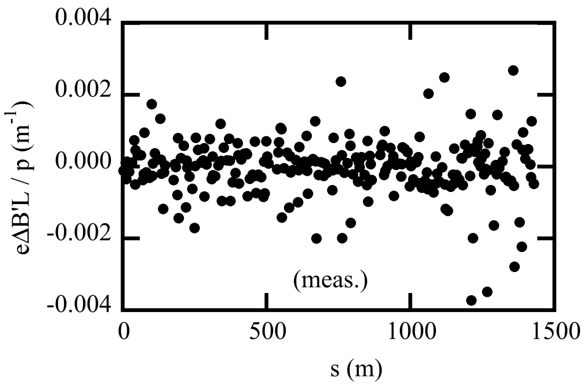


Fig. 11 加速器モデルの四極磁場誤差分布.

四極磁場を変えると分散関数も変わる。4.4 で測定した分散関数も再現するように四極磁場誤差を決める。上と同様の手続きで

$$\frac{dD_{model}}{dB'} = \begin{pmatrix} \frac{dD_{1,model}}{dB'_1} & \frac{dD_{1,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dD_{1,model}}{dB'_K} \\ \frac{dD_{2,model}}{dB'_1} & \frac{dD_{2,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dD_{2,model}}{dB'_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dD_{M,model}}{dB'_1} & \frac{dD_{M,model}}{dB'_2} & \cdots & \frac{dD_{M,model}}{dB'_K} \end{pmatrix} \tag{4-20}$$

を求め、

$$D_{model} + \frac{dD_{model}}{dB'}\Delta B' \sim D_{meas} \tag{4-21}$$

となるように$\Delta B'$を決めれば良い。すなわち連立方程式

$$\begin{pmatrix} R_{model} \\ D_{model} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dR_{model}}{dB'} \\ \frac{dD_{model}}{dB'} \end{pmatrix} \Delta B' \sim \begin{pmatrix} R_{meas} \\ D_{meas} \end{pmatrix} \tag{4-22}$$

を解けば良い。実際には測定誤差など考慮すべき点もあるので、詳細は参考文献[9]を参照してほしい。

今回、計算機の加速器モデル内に与えた四極磁場誤差を Fig.11 に、磁場誤差を与えた時のベータ関数偏差を Fig.12 に与える。また x 方向分散関数の測定値から理論値との偏差を計算したものを Fig.13 に与える（注意：Fig.12 は Fig.11 を用いて計算した結果、Fig.13 は測定値である）。このときの RMS 値は x 方向のベータ関数偏差が 3.3 %、y 方向が 1.7 %、x 方向分散関数の偏差が 4.5 mm となった。

4.6. ベータ関数と x 方向分散関数の補正

ベータ関数の補正に関しては、上記「加速器モデルに四極磁場誤差を与えて計算したベータ関数」を補正することを考える。x 方向分散関数は測定値があるので、測定値を用いて補正する。

加速器モデルに四極磁場誤差$\Delta B'$のかわりに補正四極磁場$\Delta B'_{corr}$を与える。微小の補正四極磁場を与えてベータ関数及び分散関数に関する応答を求める。「加速器モデルに四極磁場誤差を与えて計算したベータ関数」と「x 方向分散関数の測定値」が理論値を再現するように

$$\begin{pmatrix} \beta_{error} \\ D_{meas} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d\beta_{model}}{dB'} \\ \frac{dD_{model}}{dB'} \end{pmatrix} \Delta B'_{corr} \sim \begin{pmatrix} R_{theory} \\ D_{theory} \end{pmatrix} \tag{4-23}$$

を解けば良い。今回、求めた補正四極磁場を Fig.14 に与える。また Fig.14 を実機に適用する場合に期待されるベータ関数偏差の予想値を Fig.15 に分散関数偏差の予想値を Fig.16 に与える（注意：今回は Fig.15、16 とも Fig.14 から計算した結果である）。補正後に期待される RMS 値は x 方向のベータ関数偏差が 2.0 %、y 方向が 1.4 %、x 方向分散関数の偏差が 2.6 mm となった。

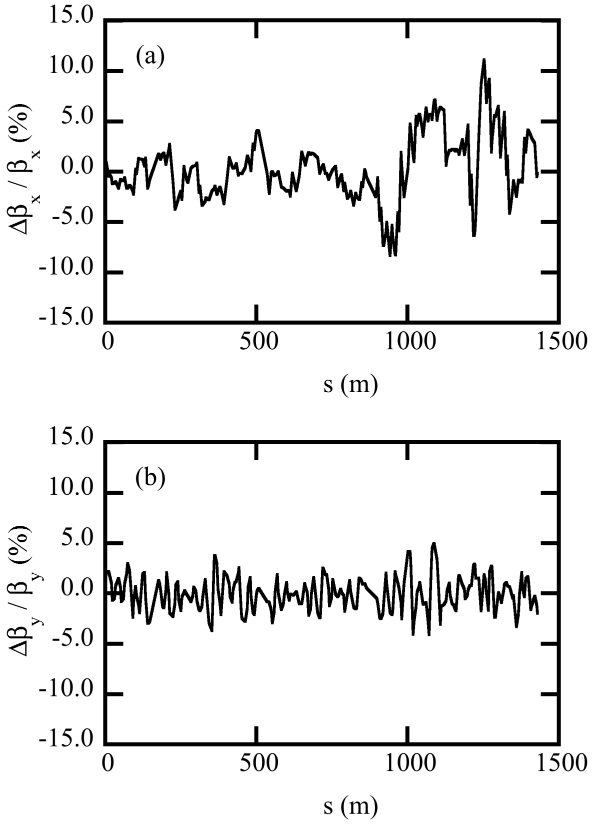


Fig. 12 補正前の**(a) x** 方向及び**(b) y** 方向のベータ関数偏差の推定値.

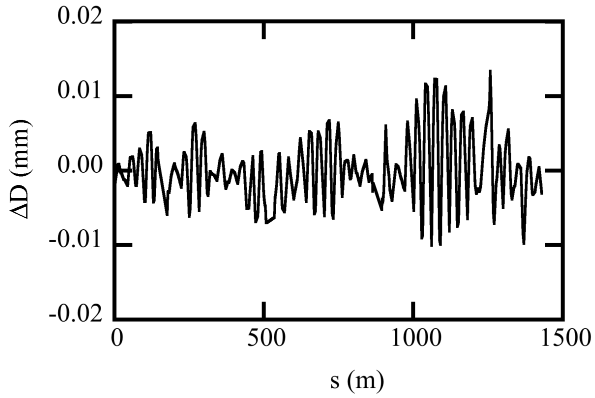


Fig. 13 補正前の分散関数偏差（測定結果）.

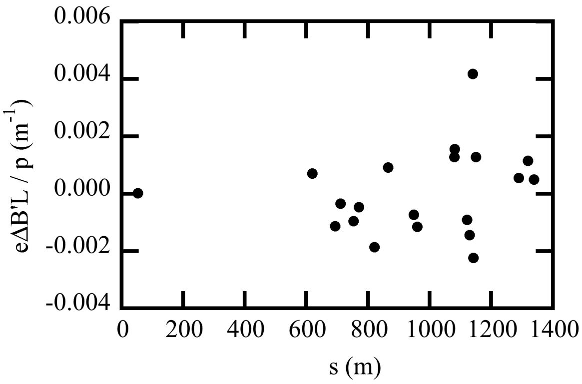


Fig. 14 補正四極磁場.

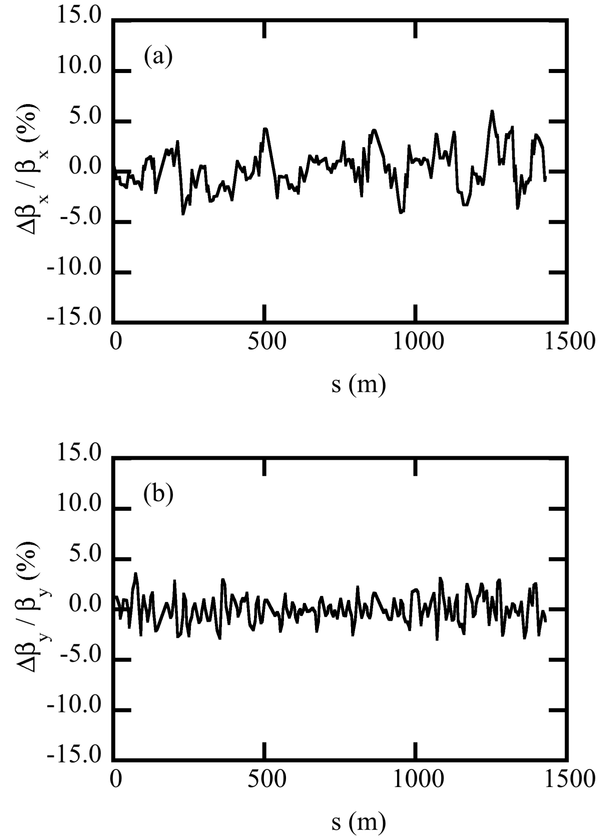


Fig. 15 補正する場合に期待される **(a) x** 方向及び**(b) y** 方向のベータ関数偏差（推定値）.

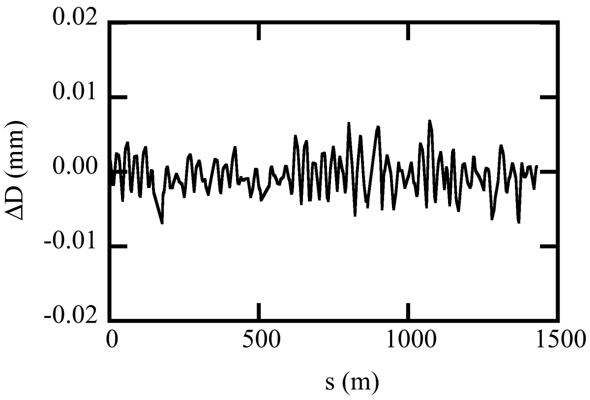


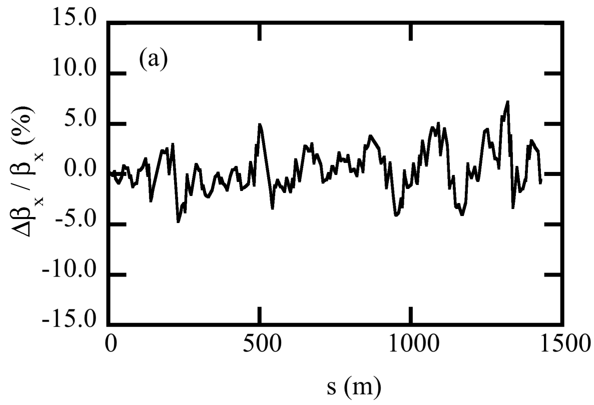
Fig. 16 補正する場合に期待される、分散関数偏差（計算結果）.

実際に Fig.14 の補正四極磁場を実機に与え、COD 補正、チューン補正などを行ったあと、再度、分散関数測定及びベータ関数の推定を行った。このときのベータ関数偏差の推定の結果を Fig.17 に与える。また *x* 方向分散関数の測定値から理論値との偏差を求めたものを Fig.18 に与える。結果、*x* 方向ベータ関数偏差の RMS 値が 2.3 %、*y* 方向が 1.3 %、また *x* 方向分散関数の偏差が 3.2 mm と概ね期待された値となり、補正前の値（補正前の値：*x* 方向のベータ関数偏差が 3.3 %、*y* 方向が 1.7 %、*x* 方向分散関数の偏差が 4.5 mm）から改善される結果となった。

ベータ関数の直接測定が難しいため、ベータ関数は推定に頼らざるを得ないが、ベータ関数補正後、後続のビーム調整中に COD 補正や光軸補正について「補正で期待される値」と「補正後の測定結果」の合いが良くなるなど、ベータ関数が理論値に近づいたと実感できる機会は多い。また分散関数は測定することができるので、一連の計算に関する評価を行うことはできると思う。

5. 最後に

電子蓄積リングにおけるビーム調整の基本的なところについて、体験談を交えながら主観的に書いた。加速器施設ごとに置かれている状況が異なるため、ここに記述されているものとは異なるビーム調整手法が採用されている可能性もあるのでご注意頂きたい。



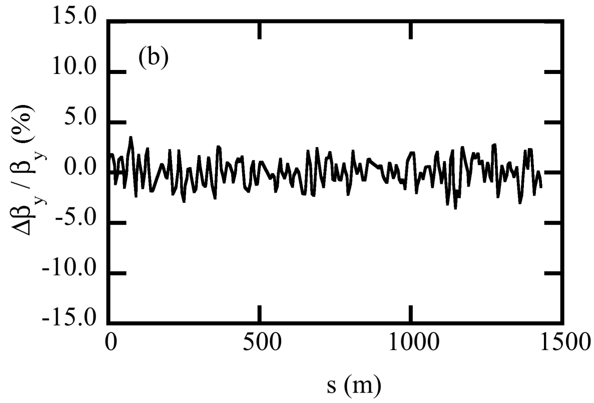


Fig. 17 補正後、再推定した (a) x 方向及び(b) y 方向のベータ関数偏差.

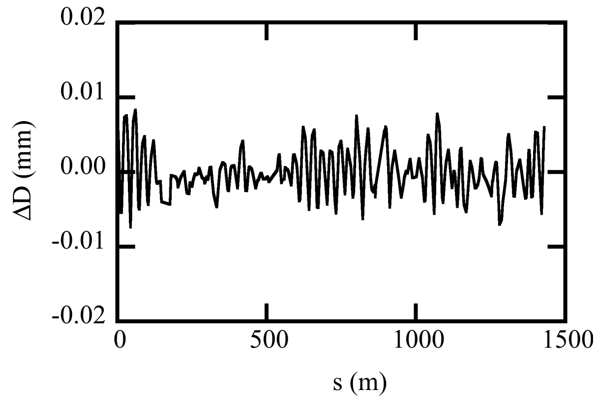


Fig. 18 補正後、再測定した分散関数偏差.

電子蓄積リングにおいて、残るビーム調整項目としては

- スキュー四極磁場を用いた線形結合共鳴補正と *y* 方向分散関数補正
- 光軸補正
- 入射軌道調整

などが考えられる。まだリングの健全性を評価するための調査項目としては

- 振幅依存チューンシフト測定
- ダイナミックアパーチャー測定
- モーメンタムアクセプタンス測定
- ビーム入射効率測定

などが考えられる。紙面と時間の都合上、これらについては、別の機会に紹介できればと思う。

参 考 文 献

[1] H. Wiedemann, “Particle Accelerator Physics”, Springer.

[2] 例えば M. Takao, T. Shimada, “Long term variation of the circumference of the SPring-8 storage ring”, Proc. of EPAC2000, pp.1572.

[3] Y. Shimosaki et al., “New optics with emittance reduction at the SPring-8 storage ring”, Proc. of IPAC2013, MOPEA027.

[4] S. Suzuki et al., “The component improvement of the SPring-8 linac”, Proc. of PASJ2011, pp. 903.

[5] Y. Shimosaki et al., “Simulation studies of beam commissioning and expected performance of the SPring-8-II storage ring”, Proc. of IPAC2018, THPMF059.

[6] K. Soutome and H. Tanaka, Phys. Rev. AB, 20, 064001 (2017).

[7] M. Takao, Phys. Rev. E 72, 046502 (2005).

[8] H. Tanaka et al., Nucl. Instr. Meth. A 431 (1999), 396-408.

[9] J. Safranek, Nucl. Instru. Meth. A 388, 27 (1997).