

# エミッタンス測定

## 1. 序説

### 1.1. はじめに

エミッタンス(Emittance)は加速器の性能を表す重要なパラメータの一つである。ビームサイズはエミッタンスの平方根に比例するため、エミッタンスが悪いとビームサイズが大きくなり、ビームパイプなどにあたりビームロスを引き起こす。また、エミッタンスはビームを衝突させて物理実験を行うコライダーのルミノシティや放射光の輝度などにとっても重要なパラメータとなる。

ビームは、たくさんの粒子がまとまってある方向に進んでいくもので、各粒子の位置、方向にはばらつきがある。エミッタンスの良い(小さい)ビームとは、それらの位置の広がりが小さく、進む方向が揃っているビームである(図 1 上)。逆にエミッタンスの悪い(大きい)ビームは、位置広がりや方向のばらつきが大きくなっている(図 1 下)。

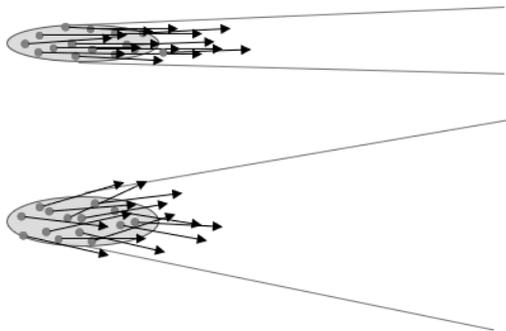


図 1 : エミッタンスが良いビーム(上)とエミッタンスが悪いビーム(下)

エミッタンス測定の方法として、Q スキャン(Q-scan)法、位相プロット(Phase plot)法など測定したビームサイズとビーム光学系から計算する方法や、スリットスキャン(Slit scan)法、ペッパーポット(Pepper-pot)法など、位置 $x$ で切り出したビームをある距離進ませることで、その位置分布を発散角 $x'$ の分布に置き換え、その $x, x'$ の情報からエミッタンスを算出する方法などがある。

本テキストでは、これらの横方向エミッタンスの測定について説明するが、その前に、エミッタンス測定の説明で出てくるビームパラメータや用語、およびビームサイズモニタについて概略を説明する。これらについての詳細な説明は過去のOHOにあるので、それを参照されたい。また、今回のテキストを執筆するにあたり OHO などの参考文献[1-14, 18,19]を参考にさせて頂いた。

### 1.2. エミッタンス

ビーム内の粒子は各々の位置や進む角度にばらつきを持っており、これらを含むビームの性質は、位相空間(Phase space)内の粒子の分布によって表される。例えば図 2 はビーム進行方向に対して垂直な面(Transverse 方向)のうち、水平方向である $x$ 方向についてビームの粒子の位相空間分布を表したもので、横軸に粒子の位置 $x$ 、縦軸に粒子の進む角度 $x' = p_x/p_s$ を取り、ビーム内の各粒子の $x, x'$ の分布を示したものである。鉛直方向である $y$ 方向についても同様の分布が描ける。

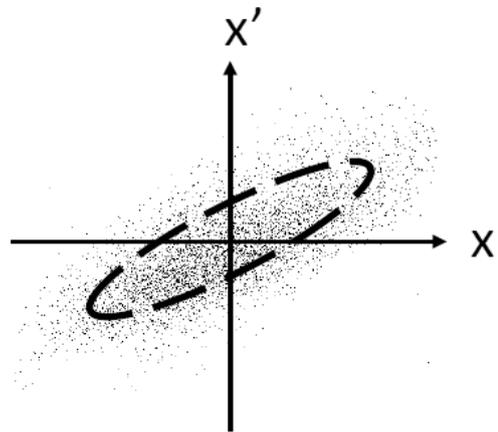


図 2 : 位相空間分布

エミッタンス $\epsilon$ は、ビームの粒子が、この位相空間(Phase space)を占める面積を $\pi$ で割ったものとして定義される。

$$\epsilon = \frac{1}{\pi} \iint dx dx' \quad (1.1)$$

このようにビーム内の粒子が楕円に分布しているとすると、ビームの性質は $\sigma$ -Matrix と呼ばれる Beam matrix で表される。 $X$ 方向の場合、

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle \\ \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle & \langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2 \end{pmatrix} \quad (1.2)\end{aligned}$$

であり、ここで、 $\sigma_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle$ で、 $x_i = \{x, x'\}$ である。 $\langle \rangle$ は平均を表す。

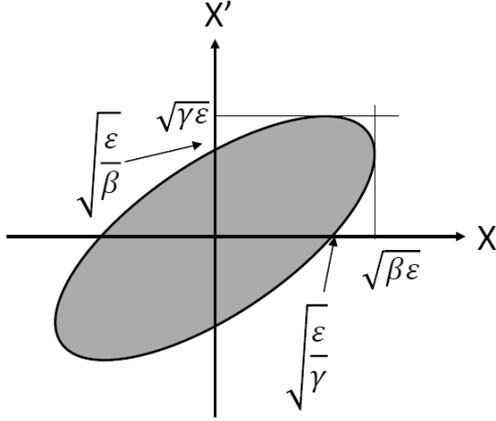


図3：位相空間における楕円と Twiss パラメータの関係

また、もう一つビームの状態を表すパラメータとして Twiss パラメータと呼ばれる $\beta$ 、 $\alpha$ 、 $\gamma$ があり、これらの間には、

$$\alpha = -\frac{1}{2}\beta' \quad (1.3)$$

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (1.4)$$

という関係がある。Beam matrix とは、

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= \epsilon_x \begin{pmatrix} \beta_x & -\alpha_x \\ -\alpha_x & \gamma_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle \\ \langle xx' \rangle - \langle x \rangle \langle x' \rangle & \langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)\end{aligned}$$

という関係になっている。ここで、 $\langle x \rangle$ と $\langle x' \rangle$ を原点に取る、つまり楕円の中心を原点に取ると、少し簡単に書いて、

$$\Sigma_x = \epsilon_x \begin{pmatrix} \beta_x & -\alpha_x \\ -\alpha_x & \gamma_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xx' \rangle \\ \langle xx' \rangle & \langle x'^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

となる。この $\Sigma_x$ の行列式の平方根は、式(1.6)より、

$$\sqrt{\det \Sigma_x} = \sqrt{\epsilon_x^2 (\beta_x \gamma_x - \alpha_x^2)} = \epsilon_x \quad (1.7)$$

とエミッタンスになる。ここで式(1.4)を使った。よって、式(1.6)の後半を使えば、エミッタンスは

$$\epsilon_x = \sqrt{\det \Sigma_x} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad (1.8)$$

と表せる。

また、ビームサイズを $\sigma_x$ とすると、

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\beta_x \epsilon} \quad (1.9)$$

と Twiss パラメータ $\beta$ とエミッタンス $\epsilon$ の積の平方根となる。ここまで $x$ 方向について説明してきたが、 $y$ 方向も同様である。

位相空間内の楕円と Twiss パラメータの関係を図3に示す。Twiss パラメータの $\beta$ はビームサイズ、 $\gamma$ は発散角に関係した量になっている。また、Twiss パラメータの $\alpha$ は、ビームは収束していくときに $\alpha > 0$ 、逆に発散していくときは $\alpha < 0$ になる。また、焦点では $\alpha = 0$ となる。

ビームが位相空間を占める面積といった場合に、ビームの分布の90%が占める面積や $1\sigma$ が占める面積など、いくつか定義があるので注意が必要である。 $1\sigma$ のビームが占める面積でエミッタンスを出す場合には、これを rms エミッタンスと呼ぶ。

### 1.3. 転送行列

ある地点 $s_1$ から $s_2$ にビームが進む場合、 $s_1$ での位置 $x_1$ と発散角 $x'_1$ と、 $s_2$ での位置 $x_2$ と発散角 $x'_2$ の関係は、その間の光学要素の作用を表した行列 $M$ を使って以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

この行列 $M$ が転送行列(Transfer matrix)である。 $y$ 方向についても同様である。

例えば、自由空間(Drift space)をビームが距離 $L$ だけ進んだ時の転送行列は

$$M_{Drift} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

と書ける。また、ビームを収束するために使用する四極電磁石(Quadrupole magnet)の転送行列は、収束(Focus)の場合、

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}l) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}l) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}l) & \cos(\sqrt{k}l) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

となる。ここで $k = (B_0/a)/B\rho$ であり、 $a$ はボア径、 $B_0$ はポール上での(半径  $a$  での)磁束密度、 $B$ は磁束密度、 $\rho$ は磁場中を荷電粒子が進む場合の曲率半径、 $l$ は四極電磁石の磁極の長さである。また、発散(Defocus)の場合の転送行列は、

$$M_{QD} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k}l) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}l) \\ \sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}l) & \cosh(\sqrt{k}l) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

となる。

焦点距離より四極電磁石の厚みが十分小さいとみなせる薄レンズ(Thin lens)近似では、この転送行列は、

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

と書ける。ここで、 $K = kl$ とおいた。この $K$ は光学レンズの焦点距離 $f$ の逆数に相当するものである。Defocusの場合は $K$ の符号が逆になる。

例えば、図4のように $s_1$ から $s_2$ へと進む間に距離 $L_1$ の自由空間、四極電磁石の、距離 $L_2$ の自由空間があるとき、2点間の転送行列 $M$ は、それぞれの転送行列を順番に掛けていけばよく、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}l) & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}l) \\ -\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}l) & \cos(\sqrt{k}l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

と表せる。四極電磁石を薄レンズ近似とするなら、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

となる。

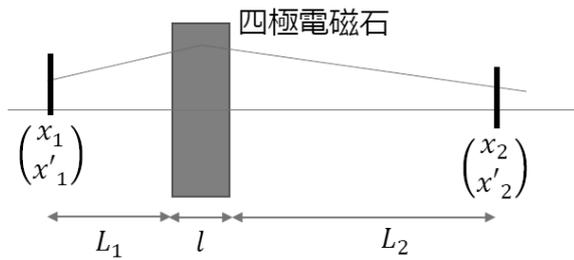


図4：自由空間と四極電磁石の配置

#### 1.4. 位相空間内での粒子分布

自由空間を進み、ある位置 $s_1$ から $s_2$ 移動する場合、式(1.10)に式(1.11)を代入すると、 $s_2$ での位置 $x_2$ と発散角 $x'_2$ は、それぞれ $x_2 = x_1 + Lx'$ 、 $x'_2 = x'_1$ となる。よって位相空間上で粒子は、 $x' > 0$ にいるものは $x > 0$ の側である右へ、 $x' < 0$ にいるものは $x < 0$ の側である左へ動く。

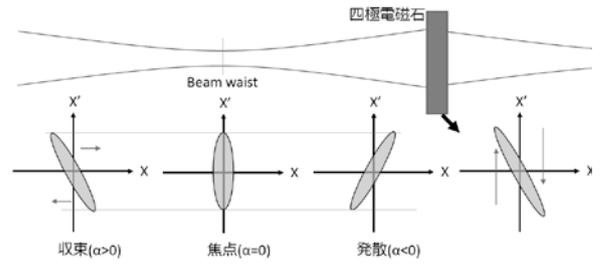


図5：位相区間での分布の変化

よって、図5のように左から収束( $\alpha > 0$ )、焦点( $\alpha = 0$ )、発散( $\alpha < 0$ )と進むにしたがって、楕円は時計回りに回転するように変化していく。四極電磁石があると、式(1.10)と式(1.14)から、その前後で $x, x'$ はそれぞれ $x_2 = x_1$ 、 $x'_2 = -Kx'_1$ と変化するので、位相空間上の楕円の分布は、四極電磁石の前後で、縦軸が $K$ 倍になって上下が反転する形になる。このようにビームライン上を進んでいくと位相空間分布が変化していく。ビームエネルギーが一定の場合には、この間、楕円の面積は一定、つまりエミッタンスは一定となっている。

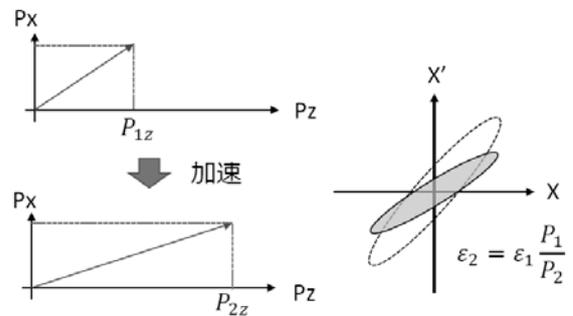


図6：加速前後で $P_z$ のみ増加するので、 $x' = p_x/p_z$ が減少する。楕円は上下方向に縮み面積が減少するので、エミッタンスも減少する。

#### 1.5. 規格化エミッタンス

線形加速器など加速空洞でビームが加速された場合には、エミッタンスは変化する。加速されてビームエネルギーが増加するとエミッタンスは小さくなる。

粒子が $z$ 方向に加速される場合、この粒子の $z$ 方向の運動量 $p_z$ は増加するが、ビーム進行方向に垂直な $x, y$ 方向の運動量 $p_x, p_y$ は変化しない。粒

子の発散角は、 $x' = p_x/p_z, y' = p_y/p_z$  なので、 $p_z$ が増加すると図6のように発散角は減少する。

そうすると図6右にあるように位相空間上の楕円の縦方向が縮み、楕円の面積も減少するため、エミッタンスは減少する。加速前後の運動量およびエミッタンスをそれぞれ $p_1, p_2$ および $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とすると、 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 p_1/p_2$ となる。また、加速しなかった場合と比べてビームサイズも小さくなる。これは断熱減衰(Adiabatic damping)と呼ばれる。

一方で規格化エミッタンス(Normalized emittance)は、ビームエネルギーに依らず一定となる。規格化エミッタンス $\varepsilon_n$ は、エミッタンスを $\varepsilon$ とすると、

$$\varepsilon_n = \beta_{rel} \gamma_{rel} \varepsilon \quad (1.17)$$

と表される。ここで $\beta_{rel}$ 、 $\gamma_{rel}$ は、それぞれ光速 $c$ と速度 $v$ の比、およびローレンツ因子で、 $\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

この規格化エミッタンスとエミッタンスを区別する場合には、エミッタンスのことを幾何学的エミッタンス(Geometric emittance)と呼ぶ。

## 2. ビームサイズモニタ

この節では、ビームサイズモニタについて説明する。Q スキャンに限らず、エミッタンスを測定する際には、ビームサイズを測定することになる。サイズモニタとしてよく使われるスクリーンモニタやワイヤースキャナーについて簡単に説明する。

### 2.1. スクリーンモニタ

スクリーンモニタ(Screen monitor)は、ビームが衝突すると発光するスクリーンをビームラインに挿入し、そのスクリーン上に焦点を合わせたカメラを使って、ビーム進行方向に垂直な横方向(Transverse 方向)のビームの像を撮影するモニタで、その場所でのビーム位置やサイズなどの測定に使用される(図7)。

スクリーンとしては、Cr をドープしたアルミナ蛍光板や Ce:YAG などのシンチレーターの板、薄い金属板や金属箔などが使用される。金属箔を使用する場合は、ビームを当てた時に出てくる可視

光域の遷移放射(Optical transition radiation: OTR)を利用する。これらのモニタについては、参考文献[4, 12]の OHO テキストに詳しい説明が載っているので、より詳細を知りたい場合はそちらを参照して頂きたい。ここでは各スクリーンの特徴を簡単に説明する。

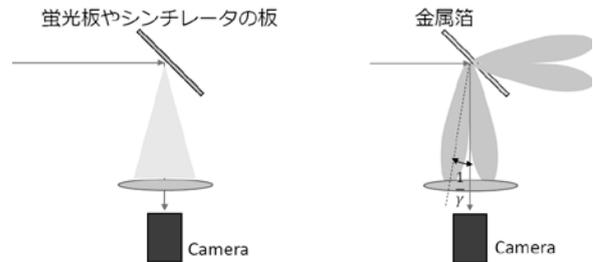


図7: スクリーンモニタ。蛍光板や金属箔などのスクリーンにビームを照射し、その発光をカメラで捉え、ビームの像を得る。

アルミナ蛍光板[15]は  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  をドープした  $\text{Al}_2\text{O}_3$  の板で薄いピンク色をしている。デマルケスト社製のため、デマルケストと呼ばれることもある。ビームが当たると赤く光る(中心波長は693nm)。発光時間が長いので、シャッタースピードを遅くすればビームカレントが低くてもビームプロファイルを見ることができる。

発光時間が長く、セラミックなので内部で光の散乱が起これ、ビームプロファイルが滲んで見え、実際のビームサイズより大きく測定されることに注意が必要である。

この影響を抑制するために、100 $\mu\text{m}$  厚まで薄くして使用する。それでもビームサイズは大きめに出るため、ビームを小さく絞って測定する Q スキャン法などのエミッタンス測定では、後述する Ce:YAG や OTR モニタを使用したほうが良いと思われる。

図8は、KEK 小型電子加速器(LUCX)において、100 $\mu\text{m}$  厚のアルミナ蛍光板および鏡面加工した金属板(OTR スクリーン)の2種類のスクリーンについて、ビームサイズを測定し比較した結果である。2つのスクリーンはビームラインの同じ位置に挿入できるようになっており、2つを切り替えながら、同じ条件のビームのサイズを測定した。横軸は OTR スクリーンで測定したビームサ

イズで、縦軸はアルミナ蛍光板で測定したものである。ビームプロファイルは滲みの影響がない OTR スクリーンでは、 $50\mu\text{m}$  まで測定できているが、その時にアルミナ蛍光板の方では、 $110\mu\text{m}$  くらいになっており、ビームサイズが実際より大きく測定されているのが分かる。

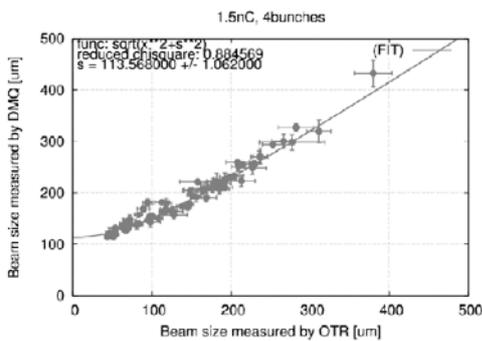


図 8 : KEK 小型電子加速器(LUCX)において、OTR スクリーンモニタとアルミナ蛍光板スクリーンモニタで測定したビームサイズの比較。横軸が OTR モニタで測定したサイズ、縦軸がアルミナ蛍光板で測定したサイズ。

Ce:YAG は YAG(Yttrium Aluminum Garnet,  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ ) 結晶に Ce をドープしたシンチレーターで、黄色の透明なセラミックである。これも  $100\mu\text{m}$  厚など薄い板にして使用する。ビームが照射されると可視光域の蛍光が出る。最大発光波長は  $525\text{nm}$  で、発光の減衰時間は  $70\text{ns}$  とアルミナ蛍光板よりずっと短い。アルミナ蛍光板と比較して内部での散乱は少なく滲みは小さい。また、特にエネルギーが低い場合に OTR 光より Ce:YAG の方が光量は多い。エネルギーが低い場合にビームサイズの測定を目的とするなら、こちらを使用するほうがよいと思われる。

OTR スクリーンモニタは、荷電粒子が異なる誘電率の物質間の境界を通るときに、その境界面で発生する可視光域の遷移放射(OTR)の光を利用するモニタである。この光はコーン状に発生し、 $1/\gamma$ (ここでの  $\gamma$  はローレンツ因子)の角度をもって放射される。ビームのエネルギーが低いと角度広がりが大きくなるので、スクリーンからカメラに入る光量が少なくなり、像が暗くなる。低エネルギーのビームで利用する際には、この辺りを考慮して使用する。

OTR モニタでは、鏡面加工した薄い金属板や金属箔などにビームを照射し、その光を蛍光板の時と同じように、スクリーン表面に焦点を合わせたレンズ付きのカメラで捉える。金属箔だと保持が難しいので、例えばシリコンの板にアルミ蒸着したものを使用するなどする[12]。

この方法では、散乱による滲みはないので、小さなビームサイズを測定することが可能である。KEK の ATF では、エミッタンス測定用の OTR スクリーンモニタで、 $10\mu\text{m}$  くらいのビームサイズを測定できている[16]。

## 2.2. ワイヤースキャナー

ワイヤースキャナーは、図 9 のようにビームラインにワイヤーを挿入し、この位置をスキャンしながら、ビームがワイヤーに衝突した際に制動放射により発生するガンマ線の信号強度の変化を測定し、ビームサイズを得る方法である。

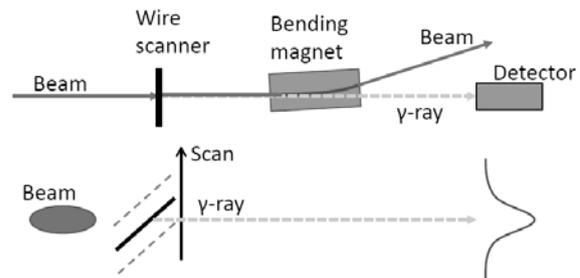


図 9 : ワイヤースキャナーの概念図。

ワイヤー位置を動かしていくと、段々ビームに当たるようになり、ガンマ線信号が増えていく。ワイヤーの中心にビームが当たるときに信号強度が一番高く、さらに位置を動かしていくとガンマ線強度は減少していく。この信号強度の変化からビームプロファイルが分かるので、このデータをガウシアンでフィットしてビームサイズを算出する。

ワイヤーには断面の直径が  $50\mu\text{m}$  や  $10\mu\text{m}$  のタングステンワイヤーや  $7\mu\text{m}$  のカーボンワイヤーなどが用いられる。どのワイヤーの太さを使用するかは、測定したいビームサイズに依る。直径  $d$  のワイヤーの rms は  $d/4$  になるので、これより測定したいビームサイズが小さいようなら、もっと細

いワイヤーを使う必要がある。また、ワイヤーでのビームロスはずかかなので、下流のビームへの影響は比較的少ない。

ワイヤーから出たガンマ線は、下流の検出器で捉える。KEKのATFでは、低エネルギーのノイズ信号を避けるため、空気チェレンコフカウンターを使用している。ガンマ線はチェレンコフ光を出さないため、入口に鉛の板などをつけて、ガンマ線を電子、陽電子に変換して測定する。空気の場合、チェレンコフ光のエネルギー閾値は、22MeV程度である。

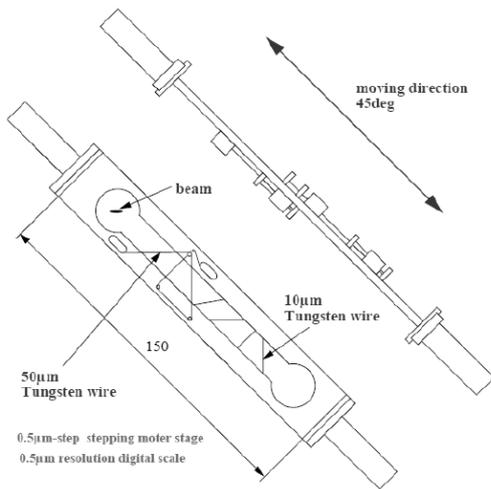


図 10 : KEK-ATF に導入されているワイヤースキャナーのワイヤーマウント[17]

ワイヤーマウントは、図 10 のようにビーム進行方向に垂直な面に斜め 45 度傾いた状態で取り付け、その方向にムーバーで動くようになっている。中央はビームが抜けるように溝があり、ワイヤーを図 10 のように 90 度向きが違うように、その溝の間に 2 本張れば、45 度にスキャンすることで、垂直方向と水平方向の両方にワイヤーをスキャンすることができる。

スキャンして得られたワイヤー位置と強度のデータをガウシアンでフィットしてサイズ  $\sigma_{meas}$  を得る。

$$I = A \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma_{meas}^2}\right) \quad (2.1)$$

ただし、ワイヤーマウントを 45 度に動かすので、ムーバーの動く量に対してワイヤーの移動量は  $1/\sqrt{2}$  になるので注意が必要である。また、フィッ

トで得られたサイズ  $\sigma_{meas}$  は、ワイヤーの太さの分も含まれているので、それを差し引く必要がある。よってビームサイズ  $\sigma_{beam}$  は、

$$\sigma_{beam} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - \sigma_{wire}^2} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2} \quad (2.2)$$

となる。ここで  $\sigma_{wire}$  はワイヤーの太さの rms である。

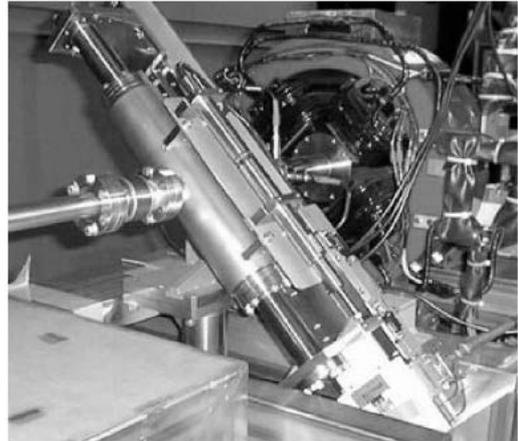


図 11 : KEK-ATF に導入されているワイヤースキャナーの写真[17]

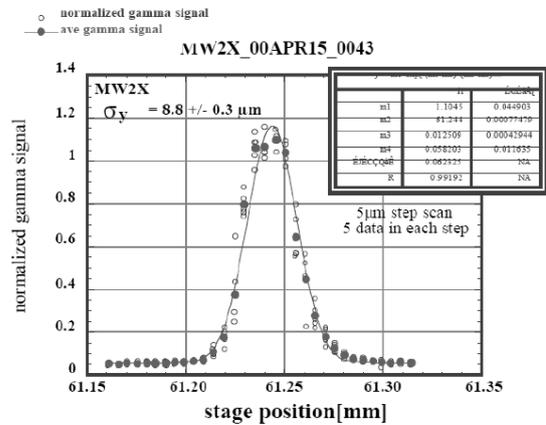


図 12 : KEK-ATF に導入されているワイヤースキャナーで y 方向のビームサイズを測定した結果 [17]。

図 11 は KEK の ATF に導入されているワイヤースキャナー[17]の写真である。この中に図 10 のようなワイヤーマウントがあり、直径 50µm と 10µm のタングステンワイヤーが装備されている。一本のワイヤーを一筆書きのように通し、垂直、水平、45 度のワイヤーを張れるようになっている。斜めのワイヤーは xy のカップリングを測

定するためのものである。図 12 が測定例で、1.3GeV の電子ビームのサイズを測定したときの、測定されたビームサイズは  $8.8 \pm 0.3 \mu\text{m}$  である。

### 3. エミッタンス測定

#### 3.1. Q スキャン(Q-scan)

Q スキャン法は、エミッタンス測定の方法としてよく使用される。ウェイストスキャン(Waist scan)と呼ばれることもある。

この方法では、四極電磁石の磁場強度を変えながら、その下流のビームサイズを測定し、その応答からエミッタンスを算出する。

図 13 のように厚さ  $l$  の四極電磁石から距離  $L$  だけ離れた場所にビームサイズモニターがある場合を考える。四極電磁石の位置を  $s_1$ 、ビームモニターの位置を  $s_2$  とすると、その 2 点での  $x, x'$  の関係は、式(1.10)、式(1.11)、式(1.14)を使って、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と書ける。

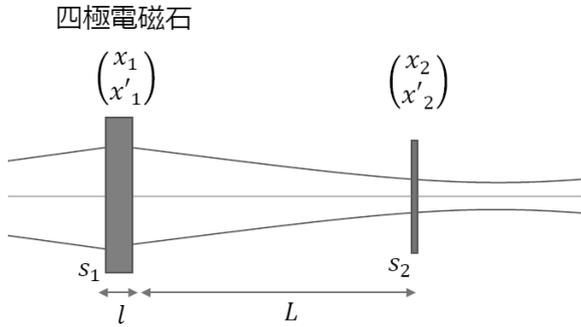


図 13 : Q スキャンのときの四極電磁石とビームサイズモニターの配置。

一方、Twiss パラメータの変化も、転送行列の成分を使って以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

自由空間の転送行列の式(1.11)と四極電磁石の転送行列の式(1.14)を、この Twiss パラメータの転送行列として書いてみると、自由空間の場合には、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2L & L^2 \\ 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となり、四極電磁石のほうは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ K^2 & 2K & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

となる。よって、四極電磁石の位置  $s_1$  からビームモニター  $s_2$  まで進むと、この 2 点間での Twiss parameter の関係は、

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2L & L^2 \\ 0 & 1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ K^2 & 2K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

と書ける。ここから  $\beta_2$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \beta_2 &= (1 - 2KL + K^2L^2)\beta_1 + (-2L + 2KL^2)\alpha_1 \\ &\quad + L^2\gamma_1 \\ &= L^2\beta_1 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2}{\beta_1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで、式(1.4)を用いた。

ビームサイズ  $\sigma$  とエミッタンス  $\varepsilon$  との関係は  $\sigma = \sqrt{\beta\varepsilon}$  なので、 $s_2$  のビームサイズ  $\sigma_2$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \beta_2\varepsilon = L^2\beta_1\varepsilon \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon}{\beta_1} \\ &= L^2\sigma_1^2 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となるので、平方根をとって、

$$\sigma_2 = \sqrt{L^2\sigma_1^2 \left\{ K - \left( \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \right\}^2 + \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2}} \quad (3.8)$$

となる。これで測定するビームサイズと四極電磁石の  $K$  値との関係が求まった。

実際の Q スキャンによるエミッタンス測定では、四極電磁石の磁場を変えながら、それぞれの磁場強度でのビームサイズを取得する。縦軸をビームサイズ、横軸を四極電磁石の  $K$  値にして、取得したデータをプロットし、以下の式でフィットすることで、フィッティングパラメータ  $a, b, c$  からエミッタンスが算出できる。

$$\sigma = \sqrt{a(K - b)^2 + c} \quad (3.9)$$

この式と式(3.8)を比較すると、

$$a = L^2\sigma_1^2 \quad (3.10)$$

$$b = \frac{1}{L} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (3.11)$$

$$c = \frac{L^2\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \quad (3.12)$$

となっているので、エミッタンスや Twiss パラメータは、 $a, b, c$ を使って、

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{ac}}{L^2} \quad (3.13)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (3.14)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} \left( \frac{1}{L} - b \right) \quad (3.15)$$

と書ける。また、規格化エミッタンスは、

$$\varepsilon_n = \beta_{rel} \gamma_{rel} \frac{\sqrt{ac}}{L^2} \quad (3.16)$$

となる。ここで、 $\beta_{rel} = v/c$ ,  $\gamma_{rel} = 1/\sqrt{1-\beta_{rel}^2}$ である。

フィッティングした際に、各フィッティングパラメータの誤差が出るので、あとは誤差伝搬で求めたエミッタンスや Twiss パラメータの誤差が計算できる。例えば規格化エミッタンスなら

$$\frac{\Delta \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \Delta \gamma + \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2} \frac{\Delta c}{c} + 2 \frac{\Delta L}{L} \quad (3.17)$$

となる。

ただし、プロットに使用した  $K$  値やビームサイズの誤差を適切なものを入れる必要がある。ビームサイズの誤差は、例えばビームプロファイルのデータからガウシアンでフィットしてビームサイズ  $\sigma$  を求めるとして、 $\chi^2 = 1$  となるようにプロファイルデータの誤差を調整するという方法がある。一旦フィットし、 $\chi^2$  を出し、データ点の誤差に  $\sqrt{\chi^2/ndf}$  を掛け、この誤差を使ってもう一度フィットすると  $\chi^2 = 1$  となる  $ndf$  は自由度 (Number Degree Freedom) である。

これまで見てきた計算は、薄レンズ近似が成り立つ、つまり四極電磁石の厚さ  $l$  に対して、下流のビームモニタまでの距離  $L$  が十分大きい場合について計算してきた。

薄レンズ近似を使わない四極電磁石の転送行列(1.12)を使って同様に計算すれば、四極電磁石とビームモニタの位置が近い場合も計算できる。式(1.12)で、 $K = kl$ と置いて書き直すと、

$$M_{Quad} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{Kl}) & \sqrt{\frac{l}{K}} \sin(\sqrt{Kl}) \\ -\sqrt{\frac{K}{l}} \sin(\sqrt{Kl}) & \cos(\sqrt{Kl}) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

となる。四極電磁石の位置  $s_1$  からモニタの位置  $s_2$  までの転送行列  $M$  は、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{Kl}) & \sqrt{\frac{l}{K}} \sin(\sqrt{Kl}) \\ -\sqrt{\frac{K}{l}} \sin(\sqrt{Kl}) & \cos(\sqrt{Kl}) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

となる。エミッタンスの計算に使用する行列の成分  $m_{11}, m_{12}$  を書き出すと、

$$m_{11} = \cos(\sqrt{Kl}) - L \sqrt{\frac{K}{l}} \sin(\sqrt{Kl}) \quad (3.20)$$

$$m_{12} = \sqrt{\frac{l}{K}} \sin(\sqrt{Kl}) + L \cos(\sqrt{Kl}) \quad (3.21)$$

となるので、あとは先ほどと同じように計算するとビームサイズ  $\sigma_2$  は、

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sqrt{\sigma_1^2 \left( m_{11} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} m_{12} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma_1^2} m_{12}^2} \\ &= \sqrt{a(m_{11} + b m_{12})^2 + c m_{12}^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。ここで、

$$a = \sigma_1^2 \quad (3.23)$$

$$b = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (3.24)$$

$$c = \frac{\varepsilon^2}{\sigma_1^2} \quad (3.25)$$

とおいたので、エミッタンスおよび Twiss パラメータは、 $a, b, c$ を使って、

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{ac}}{\sigma_1} \quad (3.26)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (3.27)$$

$$\alpha_1 = -b \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (3.28)$$

と書ける。

ここまで  $x$  方向(水平方向)について計算してきたが、四極電磁石では  $x$  方向が収束の場合、 $y$  方向(鉛直方向)は発散になる。同じ四極電磁石で  $y$  方向を測定する場合、薄レンズ近似では、 $K$  の符号が変わるだけなので、式(3.8)をそのまま使用できる。ただし、式(3.15)の  $\alpha_1$  はの  $b$  符号によって変わる。近似をしない場合も、式(3.22)を使えばよいが、 $m_{11}, m_{12}$  が変わる。式(1.13)の転送行列を使

って式(3.18)からの計算を同様に行えば式(3.20)、(3.21)に対応する式が以下のように得られる。

$$m_{11} = \cos h(\sqrt{Kl}) + L \sqrt{\frac{K}{l}} \sinh(\sqrt{Kl}) \quad (3.29)$$

$$m_{12} = \sqrt{\frac{l}{K}} \sinh(\sqrt{Kl}) + L \cosh(\sqrt{Kl}) \quad (3.30)$$

Q スキャンによるエミッタンス測定を行う際に気を付けておくことがいくつかある。

まず、この方法では四極電磁石の磁場の強さを変更するため、下流のビーム光学系が変化し、ビームロスを引き起こす可能性がある。ビーム電流やビームエネルギーが高い場合には注意が必要である。場合によって、測定時はビームのマクロパルスの幅を縮めたり、ビーム繰り返しを落としたりしてビーム電流を減らすことや、あるいは、この次の 3.2 節で述べる位相プロットによる方法を使うなど、何らかの対処が必要となる。

また、ビームサイズ測定点での分散関数 (Dispersion function) も測定前に一度確認したほうが良い。分散関数は、運動量のずれに対して位置がどのくらい変化するかを表したもので、分散関数を  $\eta$ 、運動量およびそのずれをそれぞれ  $p, \Delta p$  とすると運動量広がり  $\Delta p/p$  となり、位置のずれ  $\Delta x$  は、

$$\Delta x = \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (3.31)$$

と表される。そして、分散関数を考慮したビームサイズ  $\sigma_{meas}$  は、

$$\sigma_{meas} = \sqrt{\beta \varepsilon + \eta^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} \quad (3.32)$$

と表される。

分散関数の寄与が無視できない場合に、エミッタンスを計算する際には、測定されたビームサイズ  $\sigma_{meas}$  から測定された分散関数による影響を差し引いたビームサイズを用いる必要がある。

$$\sigma = \sqrt{\beta \varepsilon} = \sqrt{\sigma_{meas}^2 - \eta^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} \quad (3.33)$$

ビームエネルギーが低い場合にも注意が必要である。Q スキャンの方法では、ビームを小さく絞るため、ビームのパンチ電荷密度が高い場合には、空間電荷効果による影響を受け、粒子間に働

くクーロン力による反発により、収束した際にビームサイズが膨らんでしまう。つまりビームを収束した後ではサイズが大きめに出る。この空間電荷効果の影響については、エンベロープ方程式[8]を使って評価できる。

$$\sigma''_x = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,x}^2}{\gamma^2 \sigma_x^3} \quad (3.34)$$

$$\sigma''_y = \frac{I}{I_0 \gamma^3 (\sigma_x + \sigma_y)} + \frac{\varepsilon_{n,y}^2}{\gamma^2 \sigma_y^3} \quad (3.35)$$

$$I_0 = \frac{4\pi \varepsilon_0 m c^2}{e} \quad (3.36)$$

影響が大きいようなら、3.3 節で説明するスリットスキャン法を使うなどしたほうが良い。

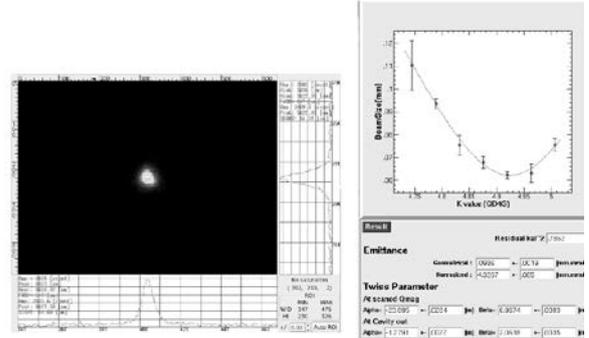


図 14 : KEK 小型電子加速器(LUCX)でエミッタンス測定したときの結果。左がビームサイズ測定時のビームプロファイル。右が Q スキャンの測定データをプロットした結果。

図 14 は、KEK 小型電子加速器(LUCX)でのエミッタンス測定の例である。このときは 22MeV、0.5nC/bunch のビームのエミッタンスを測定しており、四極電磁石の磁場を変えながら、OTR モニタでビームサイズを測定している。その時のビームプロファイルが図 14 左であり、エミッタンス測定の結果が図 14 右となる。この時、規格化エミッタンスは  $4.3\mu\text{m}$  と測定された。

### 3.2. 位相プロット(Phase plot)

この位相プロットの方法は、異なる 3 か所以上で測定されたビームサイズと、エミッタンスを知りたい地点  $s_0$  から各測定点までの転送行列を利用してエミッタンスを求める方法である。この方法は、Q スキャンのように四極電磁石の磁場を変え

ることではないので、下流のビーム光学系は変わらず、ビームロスは起きにくい。

図 15 のように、ある場所  $s_0$  でのエミッタンスを求めるために、その下流の  $n$  か所でビームサイズを測定する場合を考える。図 15 ではずっと自由空間を進むように描いてあるが、 $s_0$  から各測定点までの転送行列が分かればよいので、間に四極電磁石などがあっても構わない。

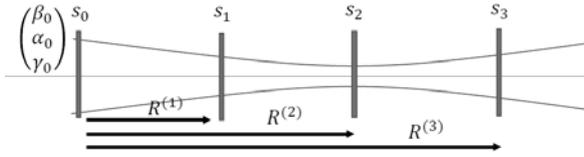


図 15 : 位相プロット(Phase plot)の方法で測定する場合のモニタの位置  $s_i$  と転送行列  $R^{(i)}$ 。

以下に、測定したビームサイズからエミッタンスを計算する方法を示す。これは参考文献[18]を参考にしており、詳細はここを参照されたい。以降は、ここに載っているやり方に沿って説明していく。

ビームサイズとベータ関数およびエミッタンスとの関係が  $\sigma^2 = \beta\varepsilon$  なので、各測定点  $s_1, s_2, \dots, s_n$  でのビームサイズ  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_x^{(2)}, \dots, \sigma_x^{(n)}$  と、 $s_0$  でのエミッタンス  $\varepsilon$  および Twiss パラメータ  $\beta_0, \alpha_0, \gamma_0$  との関係は、 $Q$  スキャンのときと同じように式(3.2)を使用して

$$\begin{aligned} (\sigma_x^{(1)})^2 &= (R_{11}^{(1)})^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(1)} R_{12}^{(1)} \alpha_0 \varepsilon + (R_{12}^{(1)})^2 \gamma_0 \varepsilon \\ (\sigma_x^{(2)})^2 &= (R_{11}^{(2)})^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(2)} R_{12}^{(2)} \alpha_0 \varepsilon + (R_{12}^{(2)})^2 \gamma_0 \varepsilon \\ &\dots \\ (\sigma_x^{(n)})^2 &= (R_{11}^{(n)})^2 \beta_0 \varepsilon - 2R_{11}^{(n)} R_{12}^{(n)} \alpha_0 \varepsilon + (R_{12}^{(n)})^2 \gamma_0 \varepsilon \end{aligned} \quad (3.37)$$

と書ける。ここで、 $R_{11}^{(i)}, R_{12}^{(i)}$  は、 $s_0$  から  $s_i$  までの転送行列  $R^{(i)}$  の行列成分である。これを行列にまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} (\sigma_x^{(1)})^2 \\ (\sigma_x^{(2)})^2 \\ \dots \\ (\sigma_x^{(n)})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_{11}^{(1)})^2 & 2R_{11}^{(1)} R_{12}^{(1)} & (R_{12}^{(1)})^2 \\ (R_{11}^{(2)})^2 & 2R_{11}^{(2)} R_{12}^{(2)} & (R_{12}^{(2)})^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ (R_{11}^{(n)})^2 & 2R_{11}^{(n)} R_{12}^{(n)} & (R_{12}^{(n)})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \varepsilon \\ -\alpha_0 \varepsilon \\ \gamma_0 \varepsilon \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

となる。それぞれの行列を左から、 $\Sigma_x, \mathbf{B}, \mathbf{o}$  と置くくと、

$$\Sigma_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{o} \quad (3.39)$$

となる。

この  $\mathbf{o}$  を、最小二乗法によって求める。 $\chi^2$  は、以下のようなになる。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{\Sigma_x}^{(i)2}} \left( \Sigma_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 B_{li} o_i \right)^2 \quad (3.40)$$

ここで、 $\sigma_{\Sigma_x}^{(i)}$  は、 $\Sigma_x^{(i)} = (\sigma_x^{(i)})^2$  の誤差である。これを

$$\hat{\Sigma}_x^{(i)} = \frac{\Sigma_x^{(i)}}{\sigma_{\Sigma_x}^{(i)}} \quad (3.41)$$

$$\hat{B}_{li} = \frac{B_{li}}{\sigma_{\Sigma_x}^{(i)}} \quad (3.42)$$

のようにして規格化すると、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 \quad (3.43)$$

と書き直せる。これを最小にするパラメータを求めるために、極値条件を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial o_1} \sum_{i=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial o_2} \sum_{i=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial o_3} \sum_{i=1}^n \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right)^2 = 0 \quad (3.46)$$

から、

$$\sum_{i=1}^n \hat{B}_{l1} \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) = 0 \quad (3.47)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{B}_{l2} \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) = 0 \quad (3.48)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{B}_{l3} \left( \hat{\Sigma}_x^{(i)} - \sum_{i=1}^3 \hat{B}_{li} o_i \right) = 0 \quad (3.49)$$

となる。これらを行列にまとめて書きなおすと、

$$\hat{\mathbf{B}}^t (\hat{\Sigma}_x - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{o}) = 0 \quad (3.50)$$

となる。よって、 $\mathbf{o}$  は、

$$\mathbf{o} = (\hat{\mathbf{B}}^t \hat{\mathbf{B}})^{-1} \hat{\mathbf{B}}^t \hat{\Sigma}_x = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{B}}^t \cdot \hat{\Sigma}_x \quad (3.51)$$

と求められる。ここで、 $\mathbf{T} = (\hat{\mathbf{B}}^t \cdot \hat{\mathbf{B}})^{-1}$ と置いた。これは共分散行列となっている。また、 $\mathbf{o}$ の各成分の誤差 $\sigma_{o_i}$ は、

$$\sigma_{o_i} = \sqrt{T_{ii}} \quad (3.52)$$

となる。これは、あるスカラー関数 $f(\mathbf{o})$ の誤差 $\sigma(f)$ は、共分散行列 $\mathbf{T}$ を用いて

$$\sigma(f)^2 = (\nabla_o f)^t \cdot \mathbf{T} \cdot (\nabla_o f) \quad (3.53)$$

と表すことができるので、これを展開し、誤差の伝搬の式と、係数を比較すると得られる。

以上から、エミッタンス $\varepsilon$ や Twiss パラメータ $\beta$ 、 $\alpha$ は、

$$\varepsilon = \sqrt{o_1 o_3 - o_2^2} \quad (3.54)$$

$$\beta = \frac{o_1}{\varepsilon} \quad (3.55)$$

$$\alpha = -\frac{o_2}{\varepsilon} \quad (3.56)$$

と計算できる。

図 16 は、KEK-ATF で Phase plot の方法でエミッタンスを測定したときの結果である。ビームラインの 4 か所に設置してある OTR スクリーンモニターでビームサイズを測定し、エミッタンスを測定している。

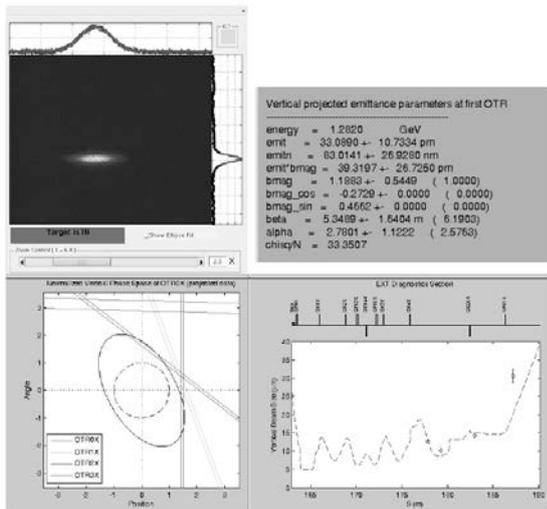


図 16 : KEK-ATF での Phase plot によるエミッタンス測定の例[21]。

ある測定点での位相空間上での粒子の分布を表した楕円は、Twiss パラメータを使って

$$\frac{1}{\beta} x^2 + \beta \left( x' + \frac{\alpha}{\beta} x \right)^2 = A^2 \quad (3.57)$$

と表せる。ここで、

$$X = \frac{x}{\sqrt{\beta}} \quad (3.58)$$

$$P = \sqrt{\beta} x' + \frac{\alpha x}{\sqrt{\beta}} \quad (3.59)$$

と置くと、

$$X^2 + P^2 = A^2 \quad (3.60)$$

と書ける。ある測定点でビームサイズ $\sigma_x$ が測定されたとすると、それに対応する $x = \sigma_x$ のラインが図 17 の上側のように位相空間上に引ける。このラインを転送行列を使って、エミッタンスを知りたい位置 $s_0$ まで戻すと、図 17 の左下のように斜めのラインになる。3 点以上測定すれば、その線に接するような楕円が決まるので、その楕円からエミッタンスが分かる。実際に測定したビームサイズからそれを表したのが図 16 の左下になる。

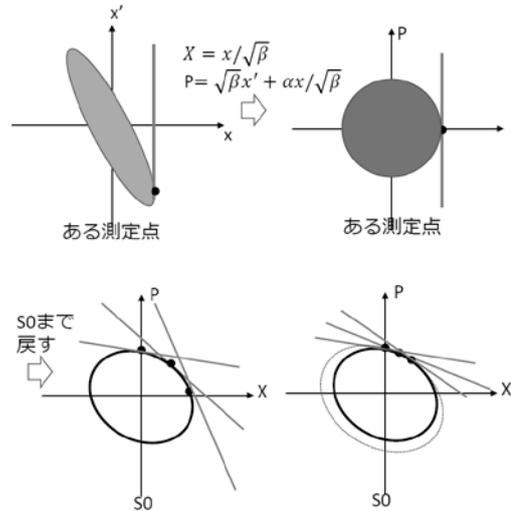


図 17 : 位相空間での測定データのプロットの概念図

また、測定点間の Phase advance が近いと、この斜めのラインが図 17 の右下のように、ほぼ同じ位置に来る。そうすると、楕円の決定がサイズ測定の誤差に敏感になるので、エミッタンス測定の誤差が大きくなる。測定点数が $N_{meas}$ の場合、測定点間の Phase advance $\Delta\mu$ が、 $\Delta\mu = 90^\circ/N_{meas}$ の位置に検出器を設置するとよい。

### 3.3. スリットスキャン(Slit scan)

スリットスキャン法では、図 18 のように、スリットである点でのビームを切り出して、その後あ

る距離だけ自由空間を進ませ、角度広がり (Divergence)によって広がったところでスクリーンモニターなどビームプロファイルを測定する。

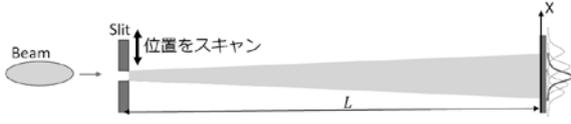


図 18：スリットスキャンの概念図

そのとき位相空間内のビーム分布の変化は図 19 のようになり、測定された位置分布が、スリットで切り出した部分の角度分布に対応するようになる。つまりスリットで切り出した位置  $x$  でのビームの  $x'$  分布が得られる。よって、スリットをスキャンしていくと、それぞれの位置での角度分布が得られ、そのデータから位相空間上でのビームの分布が構成できる(図 20)。その得られた楕円の面積からエミッタンスが求まる。

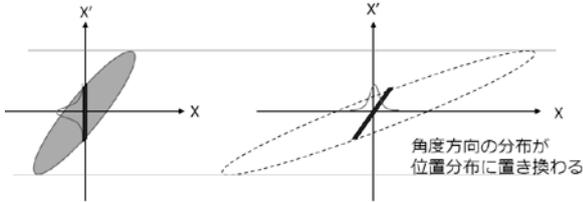


図 19：スリットスキャンで切り出したビームの位相空間での変化。切り出したビームが自由空間を進むと回転するため、回転後の位置分布は、切り出した時の角度分布を反映したものになる。

$x$  方向についてエミッタンスを測定する場合を考える( $y$  方向も同様)。図 18 のようにスリットをビームラインに挿入し、あるステップでスリットを動かしながら、スリットから距離  $L$  だけ離れたところにあるモニターで、それぞれのスリット位置  $x_i$  での位置分布を測定する。この分布は、

$$x' = \frac{(x - x_i)}{L} \quad (3.61)$$

として、角度分布に置き換えられる。よって、測定で得られた位置の強度分布を以下のガウシアンでフィットすると、その位置  $x_i$  における  $x'$  に関する強度分布が得られる。

$$I(x_i, x') = A \exp\left(-\frac{(Lx' - (b - x_i))^2}{2(\sigma^2 - \sigma_{slit}^2)}\right) \quad (3.62)$$

ここで、 $b$  はオフセット、 $\sigma$  はスクリーン上でのサイズ、 $\sigma_{slit}$  はスリットの幅の rms になる。これで、各点  $x_i$  に対する  $x'$  の分布が得られ、図 20 のようにデータを並べていくと位相空間上での分布が得られる。

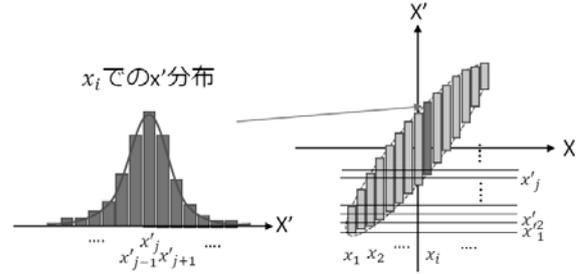


図 20：スリットで切り出したビームの角度データを位相空間上に構成。

エミッタンスは、式(1.8)で計算されるので、この式の各項の値を以下のように計算すれば、エミッタンスが得られる。

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i,j} x_i I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad (3.63)$$

$$\langle x' \rangle = \frac{\sum_{i,j} x'_j I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad (3.64)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x_i - \langle x \rangle)^2 I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad (3.65)$$

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x'_j - \langle x' \rangle)^2 I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad (3.66)$$

$$\langle xx' \rangle = \frac{\sum_{i,j} (x_i - \langle x \rangle)(x'_j - \langle x' \rangle) I(x_i, x'_j)}{\sum_{i,j} I(x_i, x'_j)} \quad (3.67)$$

$x'$  の強度分布をガウシアンでフィットして出したが、上記の式の値が計算できれば良いので、測定されたビームプロファイルのデータから直接計算してもエミッタンスは計算できる。

このスリットスキャン法は、低エネルギーのビームにおいて使われる。ビームをスリットにより切り出す必要があるため、スリット以外の部分のビームは通り抜けられないように止める必要があるためである。

また、低エネルギーのビームでは、空間電荷効果の影響を受けやすいが、この方法ではビームの一部を切り出すので電荷量が減り、この影響を受けずにエミッタンス測定ができる。つまり、そこまで電荷量が下がるようにスリット幅を選ぶ必

要がある。切り出したビームの空間電荷効果の影響については、式(3.34-36)のエンベロープ方程式で評価できる。

モニタ上での位置分布を式(3.61)で角度分布に置き換えるためには、モニタ上でのビームサイズがスリット幅に比べて十分大きい必要がある。例えばスリット幅が  $100\mu\text{m}$  なら、この rms は、 $100/\sqrt{12} \cong 30$  で約  $30\mu\text{m}$  になる。モニタ上のビームサイズは、これより十分大きい必要がある

位置分解能はスリット幅に依存し、また角度分解能はモニタの分解能とスリットとモニタの距離に依存する。エミッタンスが良いとビームは広がりにくいので、スリットとモニタとの距離  $L$  はより長く取る必要が出てくる。

スリット幅を狭くして、ステップ幅を細かくとれば位置分解能は上がるが、測定に時間がかかる。ショット毎のビーム安定性が良くない場合には、測定されるエミッタンスの誤差が増える。

図 21 は、KEK の cERL に設置されているスリットスキャンの装置の写真である。右は、スリット部の写真で、タングステン  $1\text{mm}$  厚のタングステン板に  $100\mu\text{m}$ 、 $200\mu\text{m}$ 、 $400\mu\text{m}$  のスリットが設けられている。また、その下に未使用時にビームを通すための穴が空けてある。スリットの下流  $3.8\text{m}$  のところにスクリーンモニタがあり、その間の四極電磁石は、エミッタンス測定時には OFF になっている。

図 22 に測定例を載せる。図 22 の上がスリットで切り出したのビームプロファイルで、図 22 の下が各点での測定データから、構成した位相空間

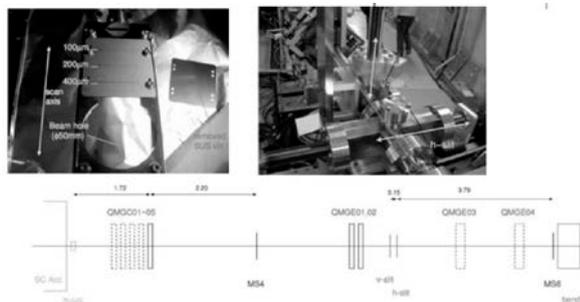


図 21 : KEK の cERL でのスリットスキャンの装置の写真 [22]。左がスリットの写真で、右が全体図の写真。

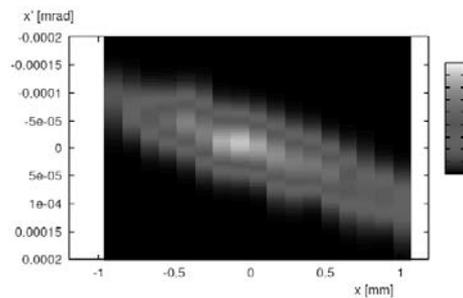
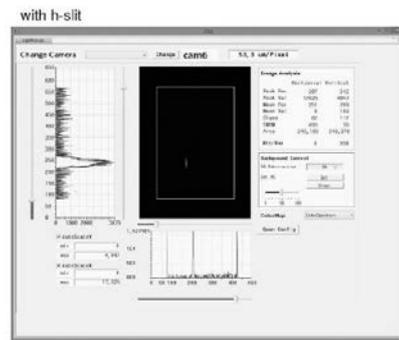


図 22 : KEK の cERL で行われたスリットスキャンでのエミッタンス測定の例 [22]。上はスキャン時のプロファイル、下が測定したデータから構成した位相空間分布。

分布となっている。このときに測定されたエミッタンスは  $0.210 \pm 0.004\mu\text{m}$  となっている。

### 3.4. ペッパーポット (Pepper-pot)

ペッパーポット法は、スリットスキャン法と測定原理は同じだが、ビームの切り出し方が違う。こちらは、スリットでビームを切り出すのではなく、 $X, Y$  平面上に穴の開いた板にビームを当てて、ビームを切り出す。図 23 のように、各々の穴を通り抜けたビームは、スリットスキャンと同じように下流にあるモニタで測定される。各々のビームプロファイルから、その各々の穴の点  $(x, y)$  での  $(x', y')$  が求まるので、スリットスキャンと同じようにエミッタンスを測定できる。

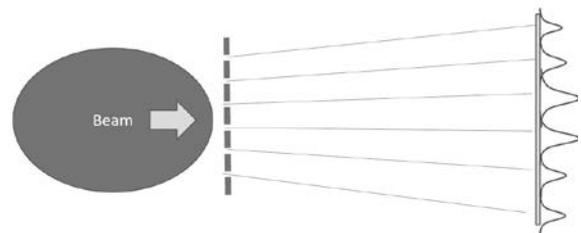


図 23 : ペッパーポットによる測定の概念図。

この方法のメリットは、スリットスキャンと違い、 $X, Y$ の両方のエミッタンスを1ショットで測定できることである。ただし、全ての穴からのビーム片のプロファイルを同時に測定するため、モニタ上での各々のビームのプロファイルが重ならないように穴の間隔を調整しないようにしなければならない。

この方法を使用して、 $1\mu\text{m}$ 以下のエミッタンスが測定できることが報告されている[20]。

#### 4. まとめ

今回は、よく利用されると思われる4つのエミッタンス測定方法について説明した。

$Q$ スキャン法は、四極電磁石の磁場強度をスキャンしたときの downstream のビームサイズの変化からエミッタンスを計算する。

ただし、四極電磁石の磁場を変更するため、downstream でビームロスが起きやすい。高エネルギーや高カレントのビームでは、ロスによる放射線の問題で制限がかかるかもしれない。その場合には、四極電磁石の磁場を変更しないで済む位相プロット法を使い、ビームサイズはワイヤースキャナーで測定すれば、ビームロスを低減できると思われる。

また、低エネルギービームで電荷密度が高いビームだと空間電荷効果の影響を受けてしまう。この影響による誤差が無視できないようなら、この影響を受けにくい、スリットスキャン法で測定したほうがよい。

位相プロットの方法は、 $Q$ スキャンと同じような原理だが、四極電磁石の磁場を変える代わりに、ビームサイズを測定する場所を変える。異なる3点以上の場所で(誤差を求めるなら4点以上で)、ビームサイズを測定すればエミッタンスを計算できる。この方法では、downstream のビーム光学系に影響を及ぼさずエミッタンス測定ができる。

スリットスキャン法では、スリットによりビームの一部を切り出し、その後、自由空間を飛ばすことにより発散角 $x'$ を位置 $x$ に置き換える。この位置分布から各位置 $x$ での $x'$ 分布が得られる。これらから位相空間上でのビームの分布を構成できる

ので、この分布の面積からエミッタンスを算出することができる。

ビームを切り出して測定するので、電荷量が下がり、空間電荷効果の影響を受けずに測定することが可能である。ただ、スリットで抜けてくるもの以外をきちんと止める必要があるので、低エネルギービームでのみ使用される。

ペッパーポット法は、スリットスキャン法と同じ原理だが、スリットではなく穴を開けた板でビームを切り出す。こうすることで、 $X, Y$ の両方向のエミッタンスを1ショットで同時に測定できるメリットがある。

以上のように、それぞれの方法によって特徴があるので、測定したいビームの特性、ビームラインの事情などによって、どの方法が最適かを考慮し選択するとよい。

#### 参考文献

- [1] 榎本収志, 「3.電子リニアックのビーム・モニタ」, OHO86
- [2] 小林仁, 「4. 電子線形加速器」, OHO88
- [3] 森義治, 「1.イオン源」, OHO89
- [4] 阪井寛志, 「8.ビーム計測」, OHO02
- [5] 佐藤康太郎, 「1. ビーム輸送の物理」, OHO07
- [6] 西森信行, 「6. ERL 電子銃」, OHO08
- [7] 佐藤健一郎, 「6. ビームモニター 2: ビームプロファイルモニター」, OHO10
- [8] 池上雅紀, 「12 ライナックと RFQ の物理 1: ライナックのビーム物理」, OHO10
- [9] 渡川和晃, 「5. 低エミッタンス熱電子銃」, OHO13
- [10] 前坂 比呂和, 「10. 高精度ビーム診断」, OHO13
- [11] 宮島 司, 「4. ERL のビーム力学」, OHO15
- [12] 高井 良太, 「9. ERL を支えるビームモニター」, OHO15
- [13] 久保木 浩功, 「7. 陽子ビームモニター」, OHO18
- [14] 夏井 拓也, 「3. 入射器の概略・全体(1)(2)」, OHO19

- [15] 細野米市, et.al., 「アルミナ蛍光板の発光特性」、第 27 回 リニアック技術研究会, 8P-26
- [16] J.Alabau-Gonzalvo, et al., “The ATF2 Multi-OTR System: Studies and Design Improvements”, Proc of IBIC2020, TUPB70.
- [17] H. Hayano, “Wire scanners for Small Emittance Beam Measurement In ATF”, Proc of 20th International Linac Conference, MOC01.
- [18] Michiko G. Minty, Frank Zimmermann, “Measurement and Control of Charged Particle Beams,” Springer, Chapter 4.1 Beam Emittance Measurements, (2003)
- [19] Uli Raich, “Emittance measurements”, U.S. Particle Accelerator School (<https://uspas.fnal.gov/>), Accelerator and Beam Diagnostics (2009)
- [20] Y. Yamazaki, et al., “High precision pepper-pot technique for a low-emittance electron beam”, Nucl. Instr. Method A322(1992) 139-145.
- [21] ATF group より提供頂いた
- [22] 本田洋介氏より提供頂いた