光モニター

1 はじめに

本講義「光モニター」では、光を用いたビームサイズ測定技術の基礎と応用を解説する。特に実用例として、SuperKEKB 加速器における X 線ビームサイズモニターを取り上げる。

この講義テキストでは、オンライン講義では紹介しきれなかった重要なトピックや、計算の詳細などに焦点を絞って解説する。ビームサイズ測定に必要な基礎的な物理や実際の測定に関わるノウハウ等は講義スライド [1] を参照して欲しい。

2 シンクロトロン放射強度の導出

シンクロトロン放射の重要な性質として、

- 強度
- 波長
- 空間的な広がり (3 次元的な広がり、方向)
- 時間的な広がり (パルス性)

の四点がある。これらの性質を定量的に議論するためには、Maxwell 方程式とシンクロトロン放射発生のための三条件 (電荷を持つ、光速に近い速度で運動する、加速度運動する) を出発点として、予めシンクロトロン放射を定式化する必要がある。シンクロトロン放射の定式化では、1) Liénard と Wiechert が完成した電磁波放射理論をシンクロトロン放射へと応用した (Liénard–Wiechert) [2] と、荷電粒子が作る磁場について Heaviside が行った定式化を Feynman が拡張した方法 (Heaviside–Feynman) [3, 4] の二種類が知られている。本講義では Heaviside–Feynman の方法を紹介するが、両者のアプローチの違いを明らかにする意味で、各々の手順を簡単にまとめておく。

まず Liénard–Wiechert では、

1. 運動する電荷からカレントを計算する
2. カレントを積分して Liénard–Wiechert ポテンシャル $(\Psi, \boldsymbol{A})$ を求める
3. ポテンシャルを微分 $(-\nabla\Psi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ して Liénard–Wiechert 場 $(\boldsymbol{E})$ を求める
4. $\boldsymbol{E}$ をフーリエ変換して周波数 ω に分解する
5. $|\boldsymbol{E}(\omega)|^2$ から周波数ごとの放射エネルギーを求める

という流れをとる。運動する電荷からカレントを求める際、またはカレントの積分から Liénard–Wiechert ポテンシャルを導く際に土台となる物理が Maxwell 方程式である。Liénard–Wiechert の定式化は [2] の他、多くの電磁気学の教科書 (例えば [5, 6]) や、過去の OHO セミナーでも解説されている [7]。Liénard–Wiechert は歴史的な経緯から最も一般的な手法ではあるが、計算途中でベクトルの内積・外積が頻出し放射強度の式から実際の現象をイメージしづらいという難点がある。

一方で、Heaviside–Feynman では、

1. 運動する電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}$ を直感的に求める
2. $\boldsymbol{E}$ をフーリエ変換して周波数 ω に分解する
3. $|\boldsymbol{E}(\omega)|^2$ から周波数ごとの放射エネルギーを求める

という手順を踏むだけである [4]。単純に Liénard–Wiechert にあった手順 1 と 2 をすっ飛ばして電場 $\boldsymbol{E}$ を天下り的に与えただけでは？という指摘はもっともだが、実際に計算してみると Heaviside–Feynman の特徴である物理現象を容易にイメージ出来る見通しの良さは Liénard–Wiechert からは得られないものである。

なお、Liénard–Wiechert と Heaviside–Feynman という 2 つのアプローチが結局は等価であるという事実は重要なポイントであり、これまで複数の論文上で証明がなされている (例えば [8])。

2.1 Heaviside–Feynman による定式化

ここからは Heaviside–Feynman の方法に沿って、シンクロトロン放射の放射強度を導き出していく。まず初めに 2 章で述べたように、運動する電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}$ を求める。これは [4] によると、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{R_{\rm ret}^2} + \frac{R_{\rm ret}}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{R_{\rm ret}^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right] \tag{1}$$

で与えられる。式中に現れる各変数は図 1 に示した通りで、以下に意味をまとめた。

- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$: 運動する電荷から作られ観測者が観測した電場

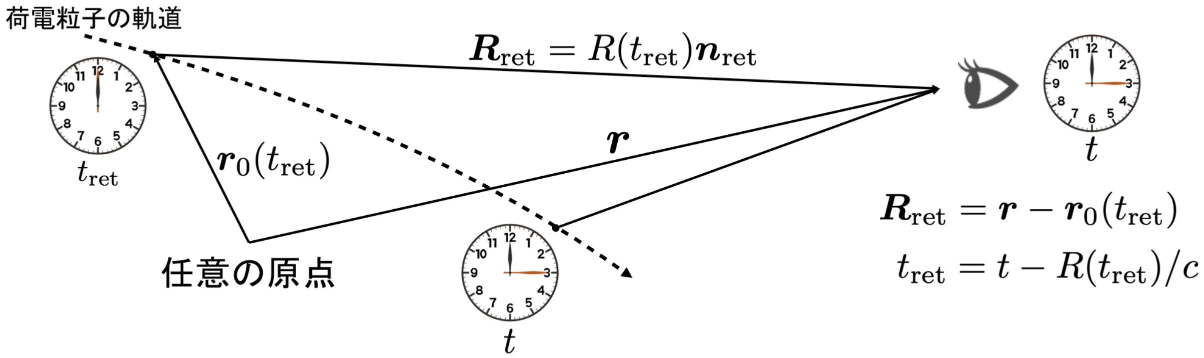

図 1　シンクロトロン放射の模式図。時刻 $t_{\rm ret}$ に荷電粒子から放射された電磁波が時刻 t に観測者により観測される。

- $\boldsymbol{r}$: 任意の原点から観測者へ伸びるベクトル
- t : 運動する電荷が作る電磁波を観測者が観測した時刻
- $t_{\rm ret}$: 観測者が時刻 t で観測した電磁波が実際に発生した時刻 (光の伝搬に有限時間かかるので、$t > t_{\rm ret}$ である)
- $\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})$: 任意の原点から運動する電荷が時刻 $t_{\rm ret}$ に電磁波を発生した地点まで伸びるベクトル
- $\boldsymbol{R}_{\rm ret}$: 電磁波の発光点 $\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})$ から観測者 $\boldsymbol{r}$ へ伸びるベクトル
- $\boldsymbol{n}_{\rm ret}$: 電磁波の発光点 $\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})$ から観測者 $\boldsymbol{r}$ を指す単位方向ベクトル。$\boldsymbol{R}_{\rm ret}$ の絶対値を $R_{\rm ret}$ と置けば $\boldsymbol{R}_{\rm ret} = R_{\rm ret}\boldsymbol{n}_{\rm ret}$ である

次に式 (1) の各項の説明である。式 (1) は 3 つの項で表され、それぞれ

- 第 1 項目：静電荷が作るいわゆるクーロン場 $\sim 1/R_{\rm ret}^2$
- 第 2 項目：等速運動する電荷が作る電磁場 $\sim 1/R_{\rm ret}^2$
- 第 3 項目：加速度運動する電荷が作る電磁場 $\sim 1/R_{\rm ret}$

という意味を持つ。Liénard–Wiechert に対して Heaviside–Feynman の定式化が持つ見通しの良さという最大の利点がここにあり、$R_{\rm ret}$ が非常に大きいと近似して良い場合、それぞれ $1/R_{\rm ret}^2$ に比例する第 1 項目と第 2 項目は $1/R_{\rm ret}$ に比例する第 3 項目に比べて無視して良いことが一目で分かる (Liénard–Wiechert では一目には分からない)。では、第 1 項目と第 2 項目を無視して良い程の $R_{\rm ret}$ は如何ほどかというと

$$R_{\rm ret} \gg \gamma\lambda \tag{2}$$

を満たせば良い。γ は Lorentz 因子と呼ばれるもので、詳しい定義は特殊相対性理論の教科書 [9, 10] を参照してもらいたい。本講義では近似式 $\gamma \approx E_{\rm beam}/m$ を用いて、運動する電荷 (つまりビーム) のエネルギー $E_{\rm beam}$ と電荷の静止質量 m から γ が良い精度で得られる事を理解すれば十分である。λ は電磁波の波長である。

例題 1. SuperKEKB 加速器では電子ビームエネルギーは 7 GeV である。電子の静止質量は $0.511\,\mathrm{MeV} = 0.000\,511\,\mathrm{GeV}$ なので、$\gamma \approx \frac{E_{\rm beam}}{m} \approx 14000$ である。光モニターで観測する電磁波を 3 keV 程度の X 線と仮定すると、波長は $\lambda = 4.1 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ である。式 (2) より、電磁波発生点から観測者までの距離 $R_{\rm ret}$ が $\gamma\lambda = 5.7\,\mu\mathrm{m}$ より長ければ、式 (1) の加速度運動の項以外を無視して良い事が分かる。SuperKEKB 加速器では $R_{\rm ret} \sim 40\,\mathrm{m}$ なので、加速度運動の項だけを計算すれば良いことが分かる。

と言うわけで、これからは式 (1) 第 3 項目の加速度運動に関する部分だけを計算する。

2.2　Poynting ベクトルと放射エネルギー

講義では細かい点に拘らず、放射エネルギーは電磁波振幅の二乗に比例し、それはつまり電場の二乗に比例するという事実から放射エネルギー

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c R^2}{\pi}|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 \tag{3}$$

を導き出した。この式を Poynting ベクトルを用いてきちんと導出すると以下の手順になる。

まず電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ が電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ および電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ を持つ電荷分布に与える仕事は

$$\frac{dU_{\mathrm{mech}}}{dt}=\int_V d^3r(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=\int_V d^3r\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4}$$

で表される。以降簡単のため、断わりが無い限り $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\equiv\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\equiv\boldsymbol{B}$ と書く。ここで V は電荷分布を含んだ空間である。式 (4) の真ん中の式の第 2 項が 0 になることは $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ を代入すれば明らかだろう。

次に式 (4) 右辺の $\boldsymbol{j}$ を Maxwell 方程式を用いて

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{5}$$

と書き換えると、

$$\frac{dU_{\mathrm{mech}}}{dt}=\int_V d^3r\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{E} \tag{6}$$

が得られる。さらに式 (6) 右辺の第 1 項を書き換えるため Maxwell 方程式から

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\\&=-\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{7}$$

を求める。式 (7) を式 (6) に代入し、dU_{mech}/dt を式 (4) の $\int_V d^3r\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ で表すと、

$$\begin{aligned}&\int_V d^3r\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+c^2\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})=\\&\qquad-\int_V d^3r\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}-\int_V d^3r\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{8}$$

が得られる。これを Poynting の定理と呼ぶ。式 (8) 左辺が意味するところは、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が任意の空間 V で持つエネルギーの時間変化である。左辺には電荷分布を表す ρ や $\boldsymbol{j}$ が含まれていない点に注意してほしい。

最後に

$$U_{\mathrm{EM}}=\int_V d^3r\frac{1}{2}\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+c^2\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{9}$$

と定義すれば、式 (8) の右辺第 1 項を左辺へ移動して

$$\begin{aligned}\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{dt}&=\frac{d}{dt}(U_{\mathrm{EM}}+U_{\mathrm{mech}})\\&=-\int_V d^3r\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\\&=-\int_S dA\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。S は空間 V を囲む曲面を表し、$\hat{\boldsymbol{n}}$ は曲面 S 上での法線ベクトルである。$\boldsymbol{S}$ は Poynting ベクトルと呼ばれ

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{11}$$

で定義されるものであり、時間あたりのエネルギー流量を表している。

Maxwell 方程式を用いて式 (11) 内の $\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{E}$ で置き換えると、

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0c|\boldsymbol{E}|^2\hat{\boldsymbol{n}} \tag{12}$$

なので、単位立体角 $d\Omega$ に放射されるエネルギーの時間変化は

$$\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{dtd\Omega}=\varepsilon_0cr^2|\boldsymbol{E}|^2 \tag{13}$$

である。最後の電場は $\boldsymbol{E}\equiv\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ であることに注意してほしい。

しかしこのままでは、どの周波数でより大きく (もしくはより小さく) 電磁波が放射されるかよく分からない。これを知るためには、式 (13) を時間ではなく周波数に依存した式へと変換する必要がある。

位相空間の変換と言えば Fourier 変換の出番だが、ここでも Parseval の等式 [11] を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt|\boldsymbol{E}(t)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 \tag{14}$$

という、時間の関数 (左辺) を波長の関数 (右辺) へ変換する式が得られる。この式の形を使える様に式 (13) の $dU_{\mathrm{tot}}/dtd\Omega$ を時間積分し

$$\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{dtd\Omega}=\varepsilon_0cr^2\int_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{E}|^2 \tag{15}$$

を得た後、右辺に Parseval の等式を代入すると

$$\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{d\Omega}=\frac{\varepsilon_0cr^2}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 \tag{16}$$

が得られる。なお式 (16) の右辺では $\boldsymbol{E}(\omega)=\boldsymbol{E}(-\omega)^*$ という事実を用いて積分区間を 0 から ∞ までとし、その代わり係数 2 を掛けた。

式 (16) を用いると、任意の単位立体角 $d\Omega$ および単位周波数 $d\omega$ あたりの放射エネルギー (単位立体角あたりの放射強度)

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega}=\frac{dU_{\mathrm{tot}}}{d\omega d\Omega}=\frac{\varepsilon_0 cr^2}{\pi}|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 \tag{17}$$

が得られる。$\boldsymbol{E}(\omega)$ は $\boldsymbol{E}(t)$ をフーリエ変換して得られる

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\boldsymbol{E}(t)\exp(i\omega t) \tag{18}$$

である。$\boldsymbol{E}(t)$ は式 (1) より明らかなように、$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ である点に注意が必要である。

式 (18) を式 (17) に代入する過程は講義スライド p32 を参照して欲しい。

2.3 方向ベクトル $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ の導出

講義スライド p32 に書いたように、$dI(\omega)/d\Omega\propto\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ なので、放射エネルギーを計算するためには $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ を知っておく必要がある。繰り返しになるが、$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ は電磁波の発光点 $\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$ から観測者 $\boldsymbol{r}$ を指す単位ベクトルである。従って、$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ を求めるにあたり $\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$ と $\boldsymbol{r}$ を予め知っておかねばならない。本講義では一般性を失わない程度に計算が楽になる $\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})$ と $\boldsymbol{r}$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})&=a[1-\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})]\hat{\boldsymbol{x}}+a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\hat{\boldsymbol{y}}\\ \boldsymbol{r}&=r\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}+r\cos\theta\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{19}$$

を採用する。

2.1 章の定義より

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}=\frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}}{|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}|}=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|} \tag{20}$$

なので、ここに式 (19) を代入すれば $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ が求まる。とは言え単純に代入しただけでは解析的に積分出来るような $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ にはならない。そのため、$\theta\approx 0$ と $t_{\mathrm{ret}}\approx 0$ という近似をとる。

この近似の下ではまず

$$|\boldsymbol{R}_{\mathrm{ret}}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t_{\mathrm{ret}})|\approx r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}} \tag{21}$$

が得られ、これは $\hat{\boldsymbol{z}}$ 成分以外を無視したことに等しい。計算上は $\sin\theta\approx 0$、$\cos\theta\approx 1$、$\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\approx\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$、$1-\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\approx 0$ という近似だが、$t_{\mathrm{ret}}\approx 0$ であっても $\omega_0\gg 1$ なので $\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ は 0 とせず有限に残しているところに注意して欲しい。式 (21) を用いて $\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}$ を書き下すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}\approx\ &\frac{a[\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})-1]}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\hat{\boldsymbol{x}}+\\ &\frac{r\sin\theta}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{r\cos\theta-a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{22}$$

となる。

これより $\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$ の各成分を計算して行く。初めに $\hat{\boldsymbol{x}}$ 成分を計算する。分子の $[\cdots]$ の中は $\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ の二次の項まで計算すると

$$\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})-1\approx 1-\frac{(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2}{2}-1=-\frac{(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2}{2} \tag{23}$$

となる。分母を含む項についても $\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ の二次の項まで計算すると

$$\frac{a}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\approx\frac{a}{r}\left[1+\frac{a}{r}\omega_0 t_{\mathrm{ret}}+\frac{a^2}{r^2}(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2\right] \tag{24}$$

が得られる。式 (23) と式 (24) を掛け算して、$\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ の二次以上の項を無視すると

$$\frac{a[\cos(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})-1]}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\approx-\frac{a(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2}{2r} \tag{25}$$

が得られ、これが $\hat{\boldsymbol{x}}$ にかかる係数になる。次に $\hat{\boldsymbol{y}}$ 成分を計算する。これは $\sin\theta\approx\theta$ と式 (24) の $[\cdots]$ 外の a を r で置き換えた式を掛け合わせ、フーリエ変換に関係ない定数項 (t_{ret} が掛からない項) を落とせば

$$\frac{r\sin\theta}{r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}}}\approx\frac{a}{r}\theta\omega_0 t_{\mathrm{ret}} \tag{26}$$

が得られる。これが $\hat{\boldsymbol{y}}$ の係数である。最後に $\hat{\boldsymbol{z}}$ 成分を計算する。ここでは θ^2 の項を落とすと

$$r\cos\theta-a\sin(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})\approx r-a\omega_0 t_{\mathrm{ret}} \tag{27}$$

となり、これは分子が近似的に分母と等しいことを意味している。実際に展開して計算を行っても t_{ret} が掛からない項しか残らないので、$\hat{\boldsymbol{z}}$ 成分は全て無視できる。最終的に式 (22) は

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ret}}\approx\frac{a}{r}\left[-\frac{1}{2}(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2\hat{\boldsymbol{x}}+\theta\omega_0 t_{\mathrm{ret}}\hat{\boldsymbol{y}}\right] \tag{28}$$

と近似出来る。

この章では多くの近似を交えて長大な計算を行って来たが、実際の状況でこの様な解析解が成立可能

とは限らない。むしろ現実世界では $\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})$ と $\boldsymbol{r}$ は実際の偏向電磁石と検出器の位置から決まっているので、式 (28) はあくまで放射強度の導出を学ぶ上で得られた一つの特殊解とみなすべきである。今回の計算に限らず、可能ならば数値計算で議論を進めたほうが楽な場合も多い。

2.4 $\boldsymbol{n}_{\rm ret}$ の時間を $t_{\rm ret}$ から t へ変換する

式 (17) より、周波数 ω に対応する放射強度 $dI(\omega)/d\Omega$ に必要なのは $\boldsymbol{E}(\omega)$ である。$\boldsymbol{E}(\omega)$ は式 (18) に式 (1) 第 3 項目を代入すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \boldsymbol{E}(t)\exp(i\omega t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{d^2\boldsymbol{n}_{\rm ret}}{dt^2}\exp(i\omega t) \qquad (29)\end{aligned}$$

と得られる。しかしここでは、式 (29) 内の積分と $\exp(i\omega t)$ は時間 t の関数だが、$\boldsymbol{n}_{\rm ret}$ は式 (28) より $t_{\rm ret}$ の関数であることに注意しなければならない。と言うわけで、本章の目的は $\boldsymbol{n}_{\rm ret}$ を電磁波が発生した時刻 $t_{\rm ret}$ の関数から、観測者が電磁波を観測した時刻 t の関数へと変換する事である。

変数変換の方針は、まず t と $t_{\rm ret}$ を結びつける式を見つけ、その式中で t と $t_{\rm ret}$ 以外の不定要素を極力除き、最終的に t と $t_{\rm ret}$ の方程式を $t_{\rm ret}$ について解くというものである。この方法は Feynman や Zangwill の教科書 [4, 12] に紹介されているかなり泥臭いものだが、他にスマートな方法があるのか良く分からない。なお計算の説明は Feynman の方がやや丁寧である。

2.4.1 t と $t_{\rm ret}$ を結びつける式を見つける

目的は $t_{\rm ret}$ から t への変数変換なので、まずこれら二変数を関係付ける式を見つける必要がある。目的に叶う式で我々が知っているのは、図 1 で出てきた

$$\begin{aligned}t_{\rm ret} &= t - R_{\rm ret}/c \\ \boldsymbol{R}_{\rm ret} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret}) \qquad (30)\end{aligned}$$

である。既に式 (19) より $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}_0(t_{\rm ret})$ は与えられているので、それらを $\boldsymbol{R}_{\rm ret}$ に代入すると、$\boldsymbol{R}_{\rm ret}$ の絶対値

$$\begin{aligned}R_{\rm ret} = [&r^2 - 2ar\cos\theta\sin(\omega_0 t_{\rm ret}) + \\ &2a^2(1-\cos(\omega_0 t_{\rm ret}))]^{1/2} \qquad (31)\end{aligned}$$

が得られる。$R_{\rm ret}$ を $t_{\rm ret} = t - R_{\rm ret}/c$ に代入すれば、t の関数として $t_{\rm ret}$ が求まるが、そのままでは計算が極めて複雑である。従って、予め $\theta \approx 0$ と $\omega_0 t_{\rm ret} \approx 0$ という近似を適用し式を極力簡単化しておく。具体的には

$$\begin{aligned}\cos\theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \sin(\omega_0 t_{\rm ret}) &\approx \omega_0 t_{\rm ret} - \frac{(\omega_0 t_{\rm ret})^3}{6} \\ \cos(\omega_0 t_{\rm ret}) &\approx 1 - \frac{(\omega_0 t_{\rm ret})^2}{2} \qquad (32)\end{aligned}$$

を代入し、$\omega_o a/c = \beta \approx 1$ で置き換える (ただし $1-\beta$ が出てきた場合は 0 とせずに、$1-\beta = 1/2\gamma^2$ と置いて残す)。さらに計算を進めると r にかかる定数項が出てくるが、この項は $t_{\rm ret}$ を計測する時計の開始時刻をずらせばキャンセル出来ると考えて除去する。結果的に

$$(\omega_0 t_{\rm ret})^3 + \frac{3(1+\gamma^2\theta^2)}{\gamma^2}\omega_0 t_{\rm ret} - 6\omega_0 t = 0 \qquad (33)$$

という方程式が得られ、これを解けば t の関数として $t_{\rm ret}$ が求まる。

2.4.2 Cardano の公式

さて式 (33) をどう解くかであるが、本講義では Cardano の公式を用いる (数値計算ではニュートン法やブレント法を使う)。Cardano の公式とは、

$$x^3 + px^2 + q = 0 \qquad (34)$$

の解が

$$\begin{aligned}x = &\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{1/3} + \\ &\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{1/3} \qquad (35)\end{aligned}$$

で得られるというもので、式 (33) は $\omega_0 t_{\rm ret} \to x$ と置けば公式に当てはめ直ぐに解ける形になっている。

式 (33) 解いてそのままの形でも良いのだが、ここでは

$$\begin{aligned}\eta &= 3\gamma^2(1+\gamma^2\theta^2)^{-3/2}\omega_0 t \\ \xi &= \frac{\omega}{2\omega^*}(1+\gamma^2\theta^2)^{3/2} \\ \omega^* &= \frac{3}{2}\gamma^2\omega_0\end{aligned} \tag{36}$$

という変換を用いて変数を整理することにする。この変換を用いると、式 (29) の $\exp(\cdots)$ の中身を $\omega t = \xi\eta$ とシンプルに保ったまま

$$\omega_0 t_{\mathrm{ret}} = \gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2\theta^2} \left[(\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3}\right] \tag{37}$$

と $\omega_0 t_{\mathrm{ret}}$ の解を簡単化出来る。

なお $\omega^* = \frac{3}{2}\gamma^2\omega_0$ は critical frequency と呼ばれ、シンクロトロン放射の議論では良く登場する。シンクロトロン放射の放射エネルギーはおおよそ ω^* でピークになり、$\omega > \omega^*$ の積算エネルギーと $\omega < \omega^*$ の積算エネルギーは 1:1 の関係となる。式 (36) で変数変換を行った意図は、最終的に導出される放射強度の式 (式 (50)) に critical frequency をあらわに含ませる点にある。

2.5 Fourier 積分

式 (28) を式 (29) に代入すれば、$\boldsymbol{E}(\omega)$ が $\hat{\boldsymbol{x}}$ および $\hat{\boldsymbol{y}}$ の各成分に対して t_{ret} の関数として導かれる。次に $\boldsymbol{E}(\omega)$ を式 (17) に代入すれば、$\hat{\boldsymbol{x}}$ および $\hat{\boldsymbol{y}}$ の各成分における放射強度が周波数の関数として以下の形

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2R^2\omega^4}{16\pi^3c^3} \left|\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{a}{R}\left[-\frac{1}{2}(\omega_0 t_{\mathrm{ret}})^2\hat{\boldsymbol{x}} + \theta\omega_0 t_{\mathrm{ret}}\hat{\boldsymbol{y}}\right]\exp(i\omega_0 t)\right|^2 \tag{38}$$

で得られる。なお式 (17) の r は電荷中心を原点と取っているため、ここでは図 1 に倣って R と置き換えた。

式 (37) より t_{ret} は t の関数として書けることが分かったので、実際に式 (36) と式 (37) を式 (38) に代入し t について積分を行ってみる。簡単のため、式 (38) の積分を $\hat{\boldsymbol{x}}$ 成分の

$$I_{\boldsymbol{x}} \equiv \int_0^{\infty} d\eta \cos(\xi\eta) \left[(\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3}\right]^2 \tag{39}$$

と $\hat{\boldsymbol{y}}$ 成分の

$$I_{\boldsymbol{y}} \equiv \int_0^{\infty} d\eta \sin(\xi\eta) \left[(\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3}\right] \tag{40}$$

へ分割する。

公式集 ([13, 14] 等) によれば式 (39) と式 (40) は

$$\int_0^{\infty} dx \sin(ax) \frac{(\sqrt{x^2+\beta^2}+x)^{\nu} - (\sqrt{x^2+\beta^2}-x)^{\nu}}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = 2\beta^{\nu}\sin\frac{\nu\pi}{2}K_{\nu}(a\beta) \tag{41}$$

および

$$\int_0^{\infty} dx \cos(ax) \frac{(\sqrt{x^2+\beta^2}+x)^{\nu} - (\sqrt{x^2+\beta^2}-x)^{\nu}}{\sqrt{x^2+\beta^2}} = 2\beta^{\nu}\cos\frac{\nu\pi}{2}K_{\nu}(a\beta) \tag{42}$$

という形を用いて計算出来る。K_{ν} は第二種変形ベッセル関数である。以後の計算を簡単にするため

$$\eta_{\pm} \equiv \sqrt{\eta^2+1} \pm \eta \tag{43}$$

と定義し、

$$\begin{aligned}\eta_+ + \eta_- &= 2\sqrt{\eta^2+1} \\ \eta_+\eta_- &= 1\end{aligned} \tag{44}$$

の関係をまず明らかにしておく。この関係を用いると、例えば $\hat{\boldsymbol{y}}$ 成分に掛かる $[\cdots]$ の中は

$$\begin{aligned}&(\sqrt{\eta^2+1}+\eta)^{1/3} - (\sqrt{\eta^2+1}-\eta)^{1/3} \\ &= \eta_+^{1/3} - \eta_-^{1/3} \\ &= \frac{(\eta_+^{1/3} - \eta_-^{1/3})(\eta_+ + \eta_-)}{2\sqrt{\eta^2+1}} \\ &= \frac{(\eta_+^{4/3} - \eta_-^{4/3}) - (\eta_+^{2/3} - \eta_-^{2/3})}{2\sqrt{\eta^2+1}}\end{aligned} \tag{45}$$

と展開できるので、これを積分すると

$$I_{\boldsymbol{y}} = \int_0^\infty d\eta \sin(\xi\eta) \frac{(\eta_+^{4/3} - \eta_-^{4/3}) - (\eta_+^{2/3} - \eta_-^{2/3})}{2\sqrt{\eta^2+1}}$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) K_{4/3}(\xi) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) K_{2/3}(\xi) \quad (46)$$

が得られる。ここで変形ベッセル関数の公式 [15]

$$K_{-\nu}(\xi) = K_\nu(\xi)$$
$$K_{\nu-1}(\xi) - K_{\nu+1}(\xi) = \frac{2\nu}{\xi} K_\nu(\xi) \quad (47)$$

を用いると式 (46) の右辺をさらに簡単化でき、最終的に

$$I_{\boldsymbol{y}} = -\frac{1}{\sqrt{3}\xi} K_{1/3}(\xi) \quad (48)$$

が得られる。$I_{\boldsymbol{x}}$ は $\cos(\xi\eta)(\eta_+^{1/3} - \eta_-^{1/3})^2$ の積分なのでやや面倒だが、基本的に同じ操作で積分でき

$$I_{\boldsymbol{x}} = \frac{2}{\sqrt{3}\xi} K_{2/3}(\xi) \quad (49)$$

が得られる [8]。

$I_{\boldsymbol{x}}$ と $I_{\boldsymbol{y}}$ を式 (38) に代入し $\Theta \equiv \gamma\theta$ と置き換えると、ようやく放射強度の式

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2 (1+\Theta^2)$$
$$\left[(1+\Theta^2) K_{2/3}^2(\xi) + \Theta^2 K_{1/3}^2(\xi)\right] \quad (50)$$

が得られる。

2.6 調和構造をあらわに含んだ表現

最後に、式 (50) を電磁波の周波数の調和構造をあらわに含んだ形で表現してみる。第 2 種変形ベッセル関数 ($K_{1/3}(\xi)$, $K_{2/3}(\xi)$) は次数 N が大きい場合は第 1 種ベッセル関数 (J_N, J'_N) と

$$K_{1/3}(\xi) = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}} J_N(N\beta\cos\theta) \quad (51)$$

$$K_{2/3}(\xi) = \frac{\sqrt{3}\pi}{1-\beta^2\cos^2\theta} J'_N(N\beta\cos\theta) \quad (52)$$

のように置き換えが可能である。ここで次数 N は

$$N = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (53)$$

で与えられるが、例えば ω として式 (36) の critical frequency ω^* を取れば

$$N = \frac{\omega}{\omega_0} \to \frac{\omega^*}{\omega_0} = \frac{3}{2}\gamma^2 \gg 1 \quad (54)$$

と確かに次数 N が大きい事を確認出来る。

2.7 偏光

2.7.1 偏光とは

先に「シンクロトロン放射により荷電粒子から電磁波が放射される」と述べたが、電磁波の正体とはなんだろうか？素粒子物理学の教科書 [16] に詳しい様に、我々の宇宙には四つの力が働いており、電磁波を記述する電磁相互作用もそのうちの一つである。ここで電磁相互作用の力を媒介する粒子がフォトン (光子) である。つまり電磁波の正体とはフォトンであり、このフォトンとはスピン 1 を持つ粒子なので実ベクトル場を用いて記述される。「ベクトル」と名付けられる様に場は四元ベクトルで表現されるが、これら四元ベクトルが粒子の偏極に対応する。実際はフォトンの質量は 0 なので自由度が狭まり偏極の自由度は 2 だけとなる。この 2 つの自由度がフォトンの横偏極 (フォトン進行方向に対して垂直方向にスピンの軸を持つ) に対応する。質量が 0 なので進行方向への偏極は持たない。ここで、フォトンの進行方向に対してある基準面をとり、その面に対して並行な横偏極を水平偏光、垂直な横偏極を垂直偏光と呼ぶ。

以上が簡単な偏光の導入であるが、ここからは放射された電磁波を記述する上で便利な基準面の取り方、そしてその面に対して並行および垂直に偏光した電磁波の強度を求めていく。

2.7.2 放射強度の π 偏光成分と σ 偏光成分

任意の方向 $\boldsymbol{n}$ に放射される電磁波 (つまりフォトンの進行方向が $\boldsymbol{n}$) の偏光を調べるため、互いに直交かつそれぞれ $\boldsymbol{n}$ とも直行する 2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_\parallel$ と $\boldsymbol{e}_\perp$ を導入する。方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$ と置くと、荷電粒子の軌道平面に対して並行なベクトル $\boldsymbol{e}_\parallel$ および垂直なベクトル $\boldsymbol{e}_\perp$ は

$$\boldsymbol{e}_\parallel = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{e}_\perp = (0, \cos\theta, -\sin\theta), \quad (55)$$
$$\boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_\perp \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_\parallel \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (56)$$

と置ける。この様に、互いに独立なベクトル $\boldsymbol{e}_\parallel$ と $\boldsymbol{e}_\perp$ を用いれば任意の方向ベクトル $\boldsymbol{e}_p$

$$\boldsymbol{e}_p = \cos\phi_p \boldsymbol{e}_\parallel + \sin\phi_p \boldsymbol{e}_\perp \quad (57)$$

を作れる。ϕ_p は $\boldsymbol{e}_p$ 成分と $\boldsymbol{e}_\parallel$ 成分がなす角である。以降 [17] に従い電磁波が $\phi_p = 0, \pi$ 方向に偏光していれば σ 成分、$\phi_p = \pi/2, 3\pi/2$ 方向に偏光していれば π 成分と呼ぶことにする。

なお、本来ならば $\theta \neq 0$ の場合 $\boldsymbol{n}$ は荷電粒子の軌道平面に沿ったベクトルではないのだが、シンクロトロン放射の広がり角 $\theta < 1/\gamma$ を考慮すると実際上 $\theta = 0$ と置いても問題にならない [18]。注意してほしいのは、ここで $\theta = 0$ と置くのはあくまで偏光ベクトルを定義する上のみであり、放射強度に $\theta = 0$ を代入するわけではない。以上の議論に基づきここでも簡単のために $\theta = 0$ と置くと、σ 成分 $(\phi_p = 0)$ は $\hat{\boldsymbol{x}}$ 成分、π 成分 $(\phi_p = \pi/2)$ は $\hat{\boldsymbol{y}}$ 成分と等価になる。つまり放射強度を表す式 (50) の $[\cdots]$ 内の第 1 項目が σ 成分、第 2 項目が π 成分となり

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dI(\omega)}{d\Omega}\right|_\sigma &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 (1+\Theta^2)^2 K_{2/3}^2(\xi) \\
\left.\frac{dI(\omega)}{d\Omega}\right|_\pi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2 c}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 (1+\Theta^2)\Theta^2 K_{1/3}^2(\xi)
\end{aligned} \tag{58}
$$

と表される。

σ 成分と π 成分の放射強度を各々の広がり角に対して図示すると、講義スライド p41–44 のようになる。図から明らかなように、広がり角が 0 では π 成分が消えてしまう。これは

$$
\left.\frac{dI(\omega)}{d\Omega}\right|_\pi \to 0 \;(\Theta \equiv \theta\gamma \to 0) \tag{59}
$$

から明らかである。また、$dI(\omega)/d\Omega$ を Θ について積分した放射強度 P を π 成分と σ 成分で比を取ると

$$
\frac{P_\pi}{P_\sigma} = \frac{1}{7} \tag{60}
$$

となり、放射強度の大部分は σ 成分から来ている事がわかる。これはシンクロトロン放射を観測する際、偏光フィルターを挿入し σ 成分を除去すると途端に暗くなる事実と対応している。

2.7.3 楕円偏光

これまではシンクロトロン放射の偏光を σ 成分と π 成分に区別して議論してきた。しかし実際のシンクロトロン放射は両者をそれぞれ含んだ楕円偏光である事が知られている。例えば偏光フィルターを入れてもどちらかの成分が真っ暗になるという事はない。ここからは楕円偏光がどの様に生じるのかを簡単に見ていく。

初めに図 2 から図 4 までのように、荷電粒子の運動ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を導入する。平面上の円軌道は加速器を回る荷電粒子の軌道であり、軌道上で発生したシンクロトロン放射は点線の先にいる観測者へ達する。つまり観測者は軌道平面よりやや上側からシンクロトロン放射を観測することになる。

荷電粒子が半時計回りで周回すると、図 2 から図 4 までの中で観測者が最初に観測する光は図 2 の時である (分かりやすくするため図をかなり極端に描いている)。この時、観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が鉛直下向きに伸びているように見える。電磁場は加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ と平行なので、ここでは電磁波が鉛直下向きに偏光しているように見える。

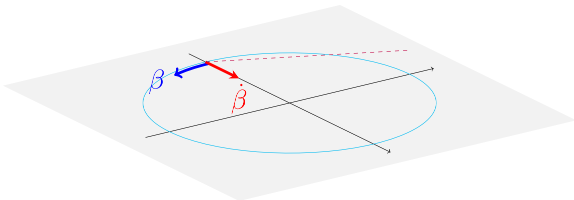

図 2　軌道平面上を反時計回りに回転する荷電粒子の運動ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$。点線は観測者の視線を表す。観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が下向きに見える。

荷電粒子が図 2 よりもさらに進行すると図 3 の地点に至る。この時、観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が右向きに伸びているように見える。つまり、ここでは電磁波が右向きに偏光しているように見える。

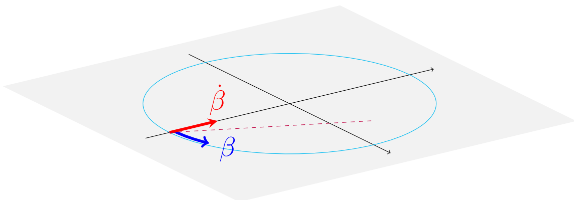

図 3　軌道平面上を反時計回りに回転する荷電粒子の運動ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$。観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が右向きに見える。

同じく荷電粒子が図 3 よりもさらに進行すると図 4 の地点に至り、これより進むと発生した光は観測者の視野に入らないとする。図 4 より観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が鉛直上向きに伸びているよう

に見える。つまり、ここでは電磁波が鉛直上向きに偏光しているように見える。結局、円軌道に沿って発生するシンクロトロン放射を軌道平面より上側の地点から観測すると、観測した光が下向き → 右向き → 上向きと順々に偏光して行くことが分かる。もちろん図 2 と図 3 の中間地点では、下向きと右向きが混ざった偏光、つまり楕円偏光した光として見えることになる。

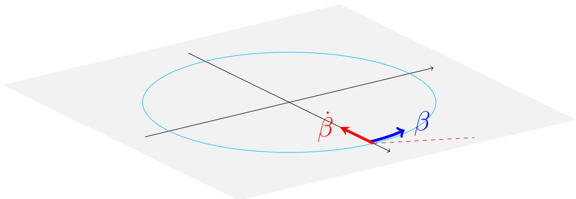

図 4　軌道平面上を反時計回りに回転する荷電粒子の運動ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$。観測者からは加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が上向きに見える。

ところで、今回は軌道平面より上側から眺めた場合を議論してきたが、下側から眺めた場合はどうなるだろうか？答えは上側から眺めた場合と同様に楕円偏光として見える。唯一の違いは楕円偏光の回転方向であり、上側から眺めた場合は下向き → 右向き → 上向きと偏光方向が変化していくので反時計回りに回転している。一方下側から眺めた場合は、上向き → 右向き → 下向きと偏光方向が変化していくので時計回りに回転している事になる。

3　光の回折

本章では光の回折を復習する。回折とは一言で言い表すと光の回り込みである。高校物理で学んだように、スリット (厚紙にカッターで細い切れ込みを入れたもの) を通過した光をスクリーンに投影すると、スクリーンに射影されるのはスリットそのものの形状ではなく、明るい部分と暗い部分が山谷の様に連なった強度分布である。これはスリットを通過した光がスリットの影に回り込む回折によるものである。明るい恒星の前を惑星が通過しても、惑星で隠された部分の恒星の明るさがゼロにならない事実も回折によって理解できる。

回折の理論には大きく分けてスカラー回折理論とベクトル回折理論の二種類がある。仮に光 (電磁波) が伝搬する媒質が光の偏光方向に依らず、誘電率が伝搬領域内で一定であり、さらに誘電率自身も波長に依存しなければ、電磁波が存在する空間を当方的なものとして扱える。結果的に電磁波そのものも偏光方向に依らないので、電磁波を記述する方程式もスカラー量で十分である。この様に回折光を当方的な空間内で光の向きに依らないスカラー量として扱ったものがスカラー回折理論である。一方のベクトル回折理論は、Maxwell 方程式を満足させつつ光を遮る遮蔽物の誘電率や電磁場の歪みなども考慮に入れ、回折光が本来のベクトル波として記述される理論である。

理論的にも計算的にもベクトル回折理論はスカラー回折理論に比べはるかに面倒であるが、遮蔽物の構造が光の波長より大きく、遮蔽物の電気的な性質を無視して良い場合はスカラー回折理論を適用しても実際的に問題ない。今回もスカラー回折理論に絞って解説する。

3.1　Kirchhoff の積分定理

誘電率 ε が一定で当方的ならば、Maxwell 方程式から

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial^2 t} &= 0 \\
\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial^2 t} &= 0
\end{aligned} \tag{61}
$$

が得られる。ただし $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$、$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ (μ は透磁率) である。この様に電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ に関する微分方程式は全く同じ形で書ける。そこで $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ を伝搬方向に依存しないスカラー場と置くと、任意のスカラー場

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega t) \tag{62}$$

を導入して、式 (61) の代わりに

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi(\boldsymbol{r}) = -k_0^2 \psi(\boldsymbol{r}) \tag{63}$$

と書ける。これを Helmhortz 方程式と呼ぶ。ここから Helmhortz 方程式を満たす一般解 $\psi(\boldsymbol{r})$ を求めていく。

まず Helmhortz 方程式を満たす特殊解 (ただし $\boldsymbol{r} = 0$ は除く) として補助関数

$$\psi_t(\boldsymbol{r}) = \frac{a_t}{r} \exp(ik_0 r) \tag{64}$$

を導入する。式 (64) は Helmholtz 方程式の一般解 $\psi(\boldsymbol{r})$ ではなく、あくまで発見法的に得られた特殊解であることに注意する。式 (64) から明らかなように、$\psi_t(\boldsymbol{r})$ は原点 $\boldsymbol{r}=0$ 近傍から発せられる球面波である。ともあれ $\psi_t(\boldsymbol{r})$ も $\psi(\boldsymbol{r})$ も Helmholtz 方程式を満たすので、両者に対する式 (63) の和を取れば

$$\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi = -\psi k_0^2\psi_t + \psi_t k_0^2\psi = 0 \quad (65)$$

が得られる。

ここで図 5 のように、曲面 $\mathcal{S}$ に囲まれた領域 $\mathcal{V}$ で式 (65) を積分し、Green の定理を用いて体積積分を面積分で置き換えると

$$\iiint_{\mathcal{V}}(\psi\nabla^2\psi_t - \psi_t\nabla^2\psi)dV = \iint_{\mathcal{S}}(\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}dS \quad (66)$$

という関係が得られる。$\boldsymbol{n}$ は曲面 $\mathcal{S}$ 上で $\mathcal{S}$ に対する外向き ($\mathcal{V}$ とは反対向き) 法線ベクトルである。

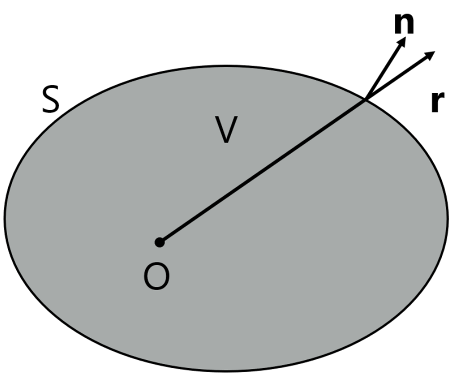

図 5　原点 $\mathcal{O}$ を含む領域 $\mathcal{V}$ とそれを囲む曲面 $\mathcal{S}$。$\boldsymbol{n}$ は曲面 $\mathcal{S}$ 上で $\mathcal{S}$ に対して外向きに伸びる法線ベクトル。

ところで補助関数 ψ_t が成り立つのは $\boldsymbol{r}\neq 0$ だけなので、$\mathcal{S}$ は $\boldsymbol{r}=0$ を除く必要がある。図 6 が示すように、$\boldsymbol{r}=0$ を含んだ領域を囲む曲面を $\mathcal{S}_0$ と置き、$\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}_1$ と置き換えると、式 (66) の右辺は

$$\left[\iint_{\mathcal{S}_0} + \iint_{\mathcal{S}_1}\right](\psi\nabla\psi_t - \psi_t\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}dS = 0 \quad (67)$$

と書ける。この積分が 0 となるのは式 (65) から明らかである。

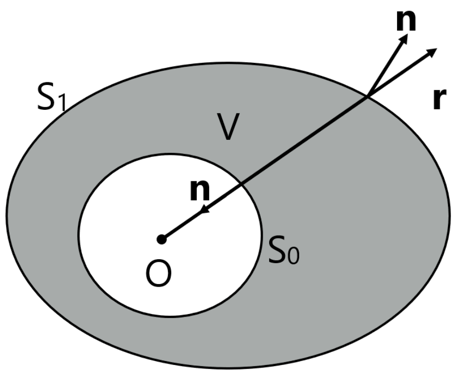

図 6　原点 $\mathcal{O}$ を含む領域の曲面を $\mathcal{S}_0$ と置き、$\mathcal{S}_0$ 上の法線ベクトルは原点を向くように取る。$\mathcal{S}_0$ の外側で領域 $\mathcal{V}$ 全体を囲む曲面を $\mathcal{S}_1$ と置く。

次に式 (67) に含まれる $\nabla\psi_t$ を計算する。式 (64) から

$$\begin{aligned}\nabla\psi_t &= \frac{a_t\boldsymbol{r}}{r^2}ik_0\exp(ik_0r) - \frac{a_t\boldsymbol{r}}{r^3}\exp(ik_0r)\\ &= \frac{a_t\boldsymbol{r}}{r^3}(ik_0r-1)\exp(ik_0r)\end{aligned} \quad (68)$$

なので、これを式 (67) に代入すると、

$$\iint_{\mathcal{S}_0+\mathcal{S}_1}\frac{a_t}{r^3}\exp(ik_0r)[\psi(ik_0r-1)\boldsymbol{r}+r^2\nabla\psi]\cdot\boldsymbol{n}dS = 0 \quad (69)$$

が得られる。

ここで先に $\mathcal{S}_0$ の寄与を簡単化する。まず $\mathcal{S}_0$ が囲む領域を十分小さく取れば $\psi\to\psi_0$(定数) と置ける。また $\boldsymbol{n}$ は $-\boldsymbol{r}$ と平行なベクトルになるので $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=-rn$、さらに $dS\to r^2d\Omega$ と置き換えれば、式 (69) は

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathcal{S}_0}\frac{a_t}{r^3}\exp(ik_0r)[\psi_0(ik_0r-1)\boldsymbol{r}+r^2\nabla\psi_0]\cdot\boldsymbol{n}r^2d\Omega\\ &= -\iint_{\mathcal{S}_0}a_t\exp(ik_0r)[\psi_0(ik_0r-1)-r\nabla\psi_0\cdot\boldsymbol{n}]d\Omega\end{aligned} \quad (70)$$

と変形できる。ここで $\mathcal{S}_0$ が囲む領域を十分小さく取っている (つまり $r\to 0$) ので、$ik_0r-1\to -1$、$r\nabla\psi_0\cdot\boldsymbol{n}\to 0$ と近似でき、結局式 (70) は

$$\iint_{\mathcal{S}_0}a_t\exp(ik_0r)\psi_0d\Omega = 4a_t\pi\psi_0 \quad (71)$$

と簡単に書ける。右辺への変換では $\exp(ik_0r)\to 1$ ($k_0r\to 0$) と $\iint_{\mathcal{S}_0}d\Omega = 4\pi$ を用いた。

最後に、式 (71) を式 (69) に代入すると

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \frac{1}{r^3} \exp(ik_0 r)[\psi(ik_0 r - 1)\boldsymbol{r} + r^2 \nabla\psi] \cdot \boldsymbol{n} dS = -4\pi\psi_0 \quad (72)$$

が得られ、この式は Kirchhoff の積分定理と呼ばれる。式 (72) は原点で ψ_0 という量を持つスカラー波 (右辺) と、原点から任意の距離 r 離れた曲面 $\mathcal{S}_1$ 上における ψ (左辺) の関係を表している。

3.2 Kirchhoff の回折公式

先の章で得られた Kirchhoff の積分定理を元に、光の回折を表す公式を導いてみる。式 (72) に含まれる ψ は曲面 $\mathcal{S}_1$ 上における任意のスカラー波なので、例えばこれを図 7 のように、曲面 $\mathcal{S}_1$ から離れた位置 Q で放射され放射点から d_1 だけ移動して $\mathcal{S}_1$ に達したスカラー波と置いても良い。その場合式 (64) より

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{f_s a_Q}{d_1} \exp(ik_0 d_1), \quad (73)$$

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{f_s a_Q \boldsymbol{d}_1}{d_1^3}(ik_0 d_1 - 1)\exp(ik_0 d_1) \quad (74)$$

と置ける。

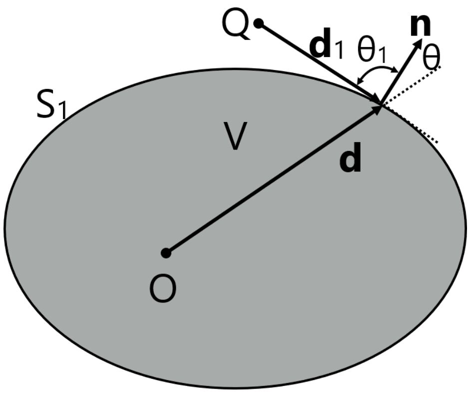

図 7 領域 $\mathcal{V}$ の外側の点 Q で発生した電磁波が $\mathcal{S}_1$ を通過し原点 O へ至る。

f_s は $\mathcal{S}_1$ 上での透過関数、a_Q は放射点 Q での振幅である。これらを式 (72) に代入すると、

$$a_Q \iint_{\mathcal{S}_1} f_s \exp(ik_0(d + d_1)) \left[\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}}{d_1 d^3}(ik_0 d - 1) - \frac{\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{n}}{d d_1^3}(ik_0 d_1 - 1)\right] dS = -4\pi\psi_0 \quad (75)$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n} = d\cos\theta$、$\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{n} = -d_1\cos\theta_1$ と置き、実際上 d と d_1 は光の波長 ($\lambda = 2\pi/k_0$) に比べて非常に大きいので $k_0 d \gg 1$ かつ $k_0 d_1 \gg 1$ という点に注意すれば、式 (75) は最終的に

$$\psi_0 = -\frac{ik_0 a_Q}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{f_s}{d d_1} \exp(ik_0(d + d_1)) \left(\frac{\cos\theta + \cos\theta_1}{2}\right) dS \quad (76)$$

という形になる。これは Kirchhoff の回折公式と呼ばれるもので、回折を表現する基本的な公式である。ただし Kirchhoff の回折公式は一つの点光源にのみ成り立つ点に注意が必要である。

3.3 Fresnel と Fraunhofer の回折近似

式 (75) の計算をさらに簡単な形にしたのが Fresnel 回折近似と Fraunhofer 回折近似であり、それぞれ

- Fresnel 回折近似：$S \geq \lambda d$
- Fraunhofer 回折近似：$S \ll \lambda d$

という条件の元で成り立つ。Kirchhoff の回折公式をそのまま使うか、Fresnel、Fraunhofer いずれかの近似を使うかは状況次第である。今回は題材である X 線ビームサイズモニターでは、スリットの開口部であっても CVD ダイヤモンド基板があるため完全な空間ではなく (講義スライド p90)、開口部を通過する際に光の位相も変化するため、Kirchhoff の回折公式を用いた方が正しい結果を与える。

詳細は省くが Kirchhoff の回折公式の導出には境界条件の扱いに矛盾が残っている。この点を取り除いたのが Rayleigh-Sommerfeld の回折公式である。とはいえ、両者は θ ($\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角) が小さければ同じ結果を与えるので、Kirchhoff の回折公式を用いても実際上問題は生じない。詳しい議論は Goodman の教科書 [20] を参照して欲しい。

4 金コーティングの厚みの影響

講義スライド p89–90 で紹介したように、X 線マスクは厚さ 600 µm の CVD ダイヤモンド基板上に厚さ 20 µm の金コーティングを施したものである。

金コーティングを除去した箇所がいわゆるスリットとなる。

図 8 は金を透過した X 線の透過率をエネルギーの関数で図示したもので、点線が厚み 10 µm、点線が 20 µm の場合である。この図から分かるように、たとえ金コーティングの厚みが 20 µm であっても 30 keV では 40 % 近くを透過してしまう。この影響が顕著に現れるのが検出器で観測する光 (X 線) 像である。検出器に到達する光像には、途中で通過する X 線マスクスリットの有無により濃淡が現れ、そのコントラストがシャープであればあるほどマルチスリットを用いたビームサイズ位置測定の精度が向上する。つまり金がコーティングされた部分では X 線を極力遮蔽し、金コーティングを除去した部分では X 線を極力透過させれば良いのである。

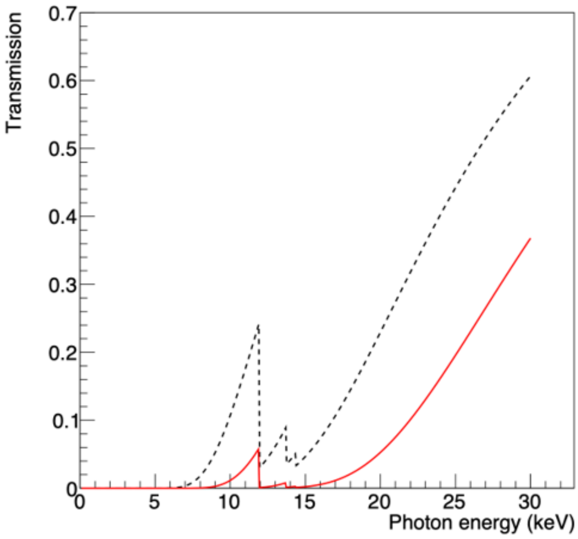

図 8　金 10 µm 厚 (点線) と 20 µm 厚 (実線) に対する X 線透過度。

では実際にどの程度コントラストに影響するのだろうか？図 9 は検出器スクリーンに投影される光像をシミュレートしたもので、二本の線のうち上側が金コーティング 20 µm 厚、下側が金コーティング 40 µm 厚である。横軸が 0 m あたりで影響がはっきり見られるが、40 µm 厚の方がディップの沈み込みが深いことが分かる。簡単に言うとピークとディップの差が大きければ大きいほど小さいビームサイズを測定できるので、特に極小ビームサイズ測定には金層の厚みが重要になることが分かる。

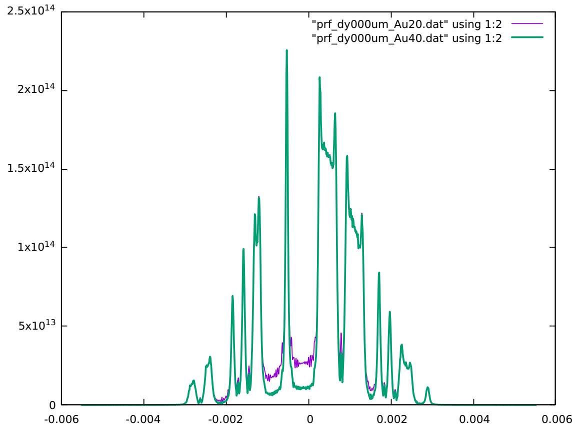

図 9　検出器スクリーンに投影される光像のシミュレーション。上側が金コーティング 20 µm 厚、下側が金コーティング 40 µm 厚である。

参考文献

[1] 三塚 岳、光モニター、OHO'20 講義スライド

[2] J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1947).

[3] 1902 年に発表したとされるが、どの文献なのか不明。

[4] R. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley (邦訳：ファインマン物理学、岩波書店). Web 版は `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/` で閲覧可能。

[5] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics [3rd ed.], John Wiley & Sons (邦訳：電磁気学 第 3 版、吉岡書店)

[6] 砂川 重信、理論電磁気学 第 3 版、紀伊國屋書店.

[7] 池田 仁美、放射光とビーム計測、OHO'04

[8] C. Wang, Phys. Rev. E 47, 4358 (1993).

[9] 佐藤 勝彦、相対性理論、岩波書店

[10] 風間 洋一、相対性理論入門講義、培風館

[11] 物理数学の本ではスミルノフや井町・内田の教科書、さらに数学的な本ではスタイン・シャカルチの教科書に詳しく書かれている。

[12] A. Zangwill, Modern Electrodynamics, Cambridge University Press.

[13] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press.

[14] A. Erdelyi, Tables of Integral Transforms,

McGraw-Hill.

[15] 岩波数学公式 III など特殊関数の公式集には大抵載っている。

[16] 代表的な教科書として M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory, CRC Press を挙げる。

[17] A. A. Sokolov and I. M. Ternov, Synchrotron radiation, Akademie-Verlag, Berlin

[18] シンクロトロン放射の文献として有名な [19] でも $\theta \approx 0$ という近似を用いている。K. Lechner, Classical Electrodynamics, Springer では $\theta = 0$ と限定することなく議論している。

[19] K. J. Kim, AIP Conference Proceedings **184**, 565 (1989).

[20] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics [3rd ed.], Roberts and Company Publishers (邦訳：フーリエ光学 第 3 版、東北出版)