ナノビーム技術

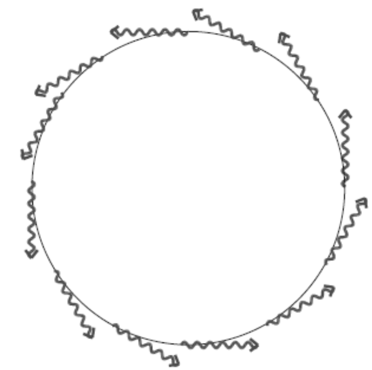
倉田　正和

OHOセミナー2021

2021年9月8日

なぜナノビームか？

- なぜリニアか?
  - 円形コライダーの場合、シンクロトロン放射によりエネルギーを損失
    - エネルギーの4乗で損失エネルギー増加



⇒半径を無限大にすれば解決 = **直線**

- **なぜナノメートルサイズに絞るのか?**
  - 事象生成数=(ルミノシティ)×(断面積)
    - 断面積は自然が決める(=測定対象)
    - 生成数を増やすにはルミノシティを上げる
- ルミノシティ

$$L = \frac{f_{col} \cdot N^2}{\text{ビーム断面積}}$$ f_{col}: 単位時間衝突数 N: 粒子数

  - 円形(LEP, LHCなど): f_{col}〜O(10^4)Hz　回っているうちに衝突チャンスがある
  - ILC: f_{col}〜5-10Hz 衝突は1回きり
  - **ILCはビームを出来るだけ小さく絞る⇒ルミノシティ上げる**

なぜナノビームか？

- 可能な限りサイズを小さくすればよさそうだが、問屋がおろさない
- Beamstrahlung:相手ビームの電場を受けて制動放射する
  - 放射の平均エネルギー: $\Upsilon_{ave} \sim \frac{5}{6} \frac{N r_e^2 \gamma}{\alpha \sigma_z (\sigma_x + \sigma_y)}$
  - 時間当たり平均光子数: $n_\gamma = 1.06 \alpha r_e N \frac{2}{\sigma_x + \sigma_y} U_0(\Upsilon_{ave})$
  - 平均損失エネルギー: $\left\langle -\frac{\Delta E}{E} \right\rangle = 0.216 \frac{r_e^2 N^2 \gamma}{\sigma_z} \left(\frac{2}{\sigma_x + \sigma_y} \right)^2 U_1(\Upsilon_{ave})$
  - ILCの場合: 1回の衝突で平均1個光子を放出

    ～数%のエネルギーを失う

  ⇒物理測定には重大な問題: エネルギー保存則

- **ビームが作る電場を抑えつつ、ビームを可能な限り小さくする**

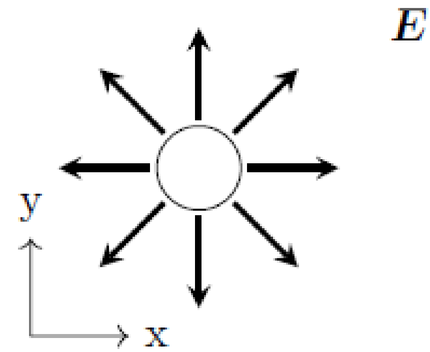
なぜナノビームか?

- 扁平ビームにする
  - 円形ビーム:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$2\pi\sqrt{\sigma_x\sigma y}\sigma_z E_y = \frac{eN}{\epsilon_0}$$

$$E_y \sim \frac{eN}{2\pi\epsilon_0\sqrt{\sigma_x\sigma y}\sigma_z}$$



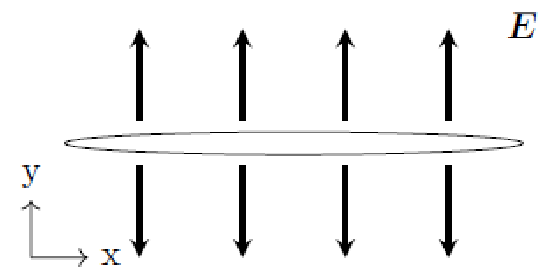
  - ルミノシティ大 = beamstrahlung大

  - 扁平ビーム:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$2\sigma_x\sigma_z E_y = \frac{eN}{\epsilon_0}$$

$$E_y \sim \frac{eN}{2\epsilon_0\sigma_x\sigma_z}$$

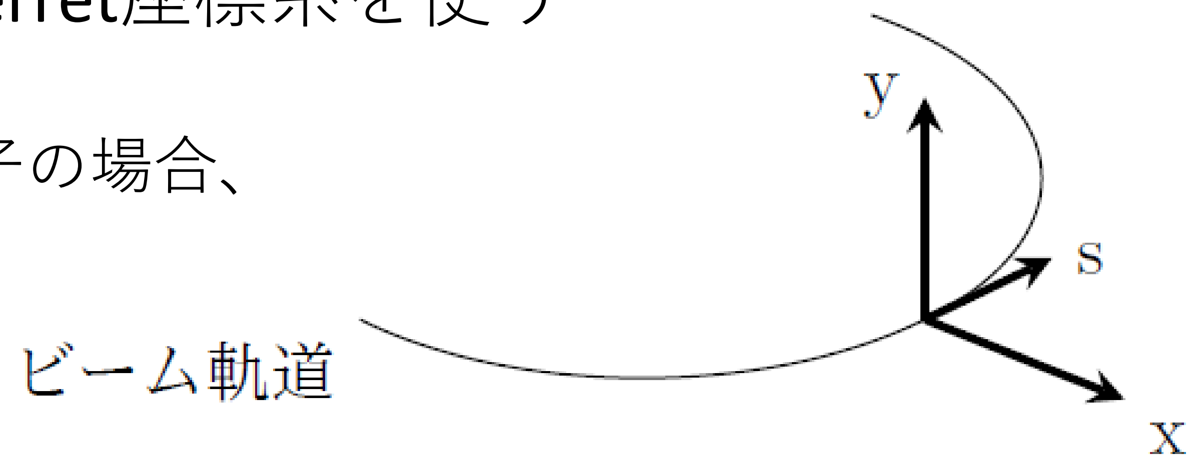


    - $\sigma_x\sigma_z$を一定にしてσ_yを小さくする

- y方向ビームサイズがナノメートルの超扁平ビームが必要

座標系

- しばしばFrenet-Serret座標系を使う
  - (x, y, z) ⇒ (x, y, s)
  - 高エネルギー電子の場合、
    - s≈z-ct など



- この場合、sで微分する

$$x' = \frac{dx}{ds}$$

$$y' = \frac{dy}{ds}$$

用いられる磁石

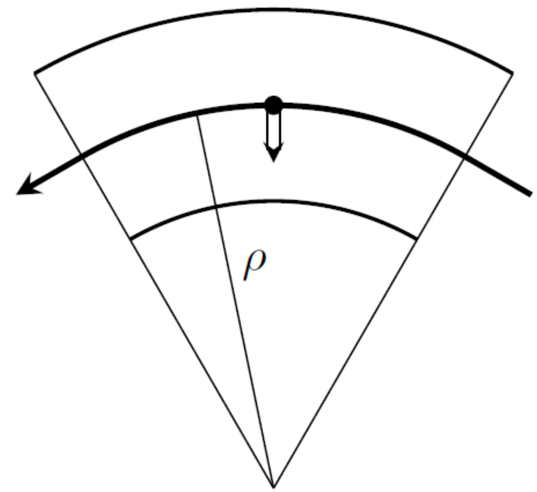
- 偏向電磁石
  - ローレンツ力により円運動

$$p = eB\rho$$

  - 運動方程式

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 0$$



  - 粒子の軌道を曲げるのに用いられる
- ディスパージョン
  - 曲率は運動量(エネルギー)に依存する
  - 軌道のエネルギー依存性

$$\delta = \frac{E - E_0}{E_0}$$

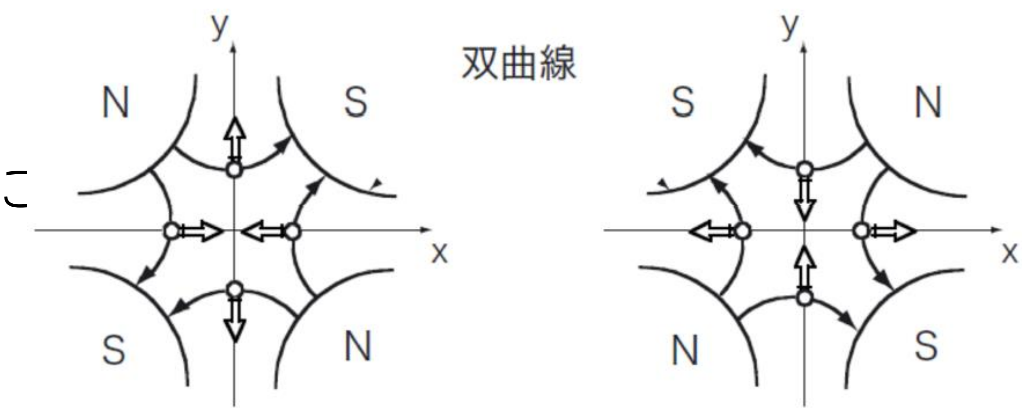
$$x(\delta) = x(0) + \eta_x \delta$$

$$y(\delta) = y(0) + \eta_y \delta$$

  - $\eta_{x(y)}$: ディスパージョン関数

用いられる磁石

- **4極電磁石**
  - ビームが逃げないように
    粒子を”閉じ込める”



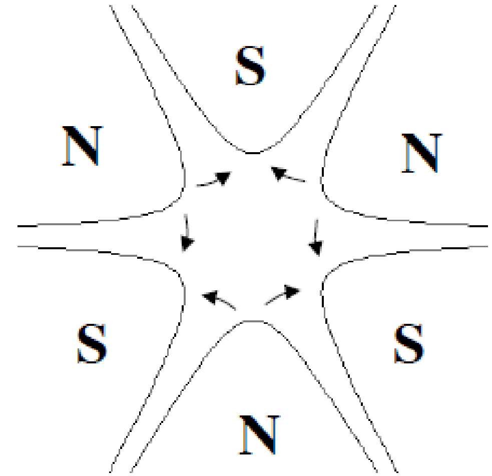
  - 運動方程式

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -k(s)x$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} = k(s)y$$

$$k(s) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B}{\partial y}$$

  - 単振動の式に酷似
    - 一方が収束 ←→ 一方が発散

用いられる磁石

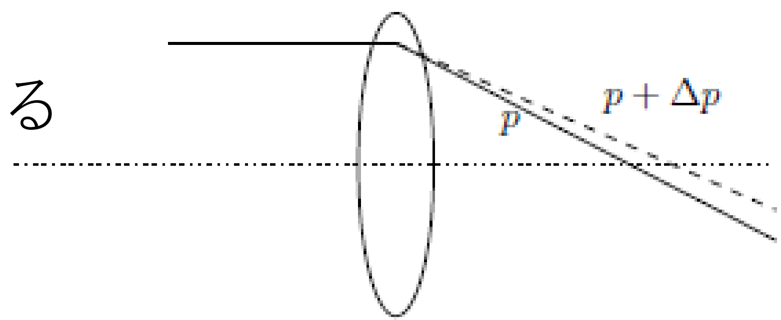


- 六極電磁石
  - 運動方程式

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{k_2}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{dy'}{ds} = k_2 xy$$

  - クロマティシティの補正に用いる



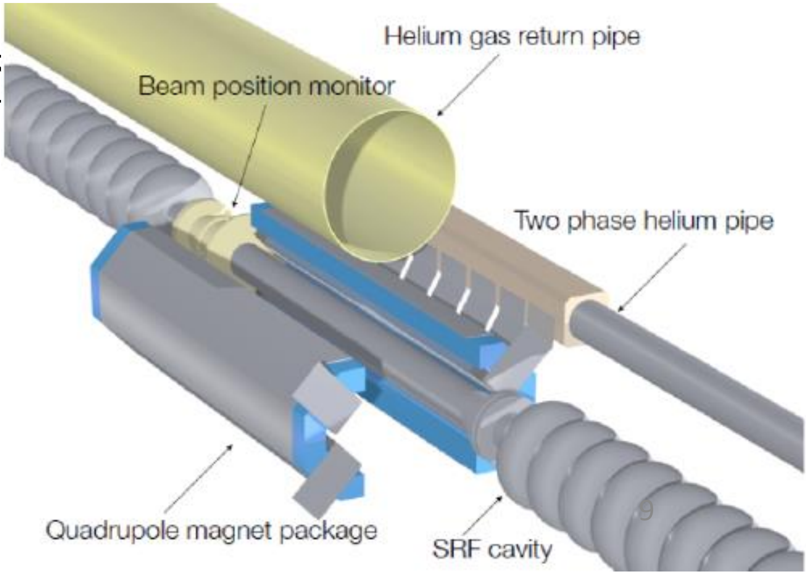
- クロマティシティ
  - レンズ光学の色収差: 焦点距離がエネルギーによって違う
  - 4極電磁石でクロマティシティが発生
- ディスパージョンがあるところで6極電磁石設置

  ⇒エネルギーに依存した収束力を得ることが可能

超伝導電磁石

- 通常は常伝導電磁石
- 超伝導電磁石も用いられる
  - 大きな磁場勾配
  - 電力効率
- 例: ライナックでの偏向・4極電磁石
  - 9セルの加速管からなるA型モジュール
  - 8セルの加速管+電磁石のB型モジュール
  - AABAAB…で配置する

  - 電子ビームにより空洞内に暗電流
  ⇒電子が電磁石に吸収
  ⇒超伝導が破れる

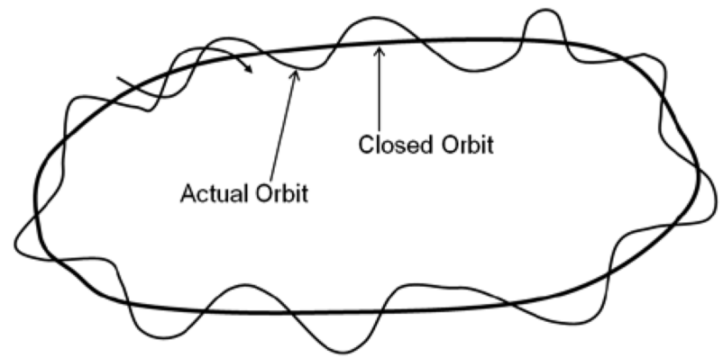


- 現在、詳細設計のR&Dが進行中

加速器内の粒子の運動

- 4重極磁石による粒子ビームのガイド
  - 理想的な場合: あるエネルギーで決まる閉軌道上を永遠に周回
  - 現実: 閉軌道上を振動しながら周回する: ベータトロン振動
- 運動方程式(x方向収束)

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -k(s)x$$

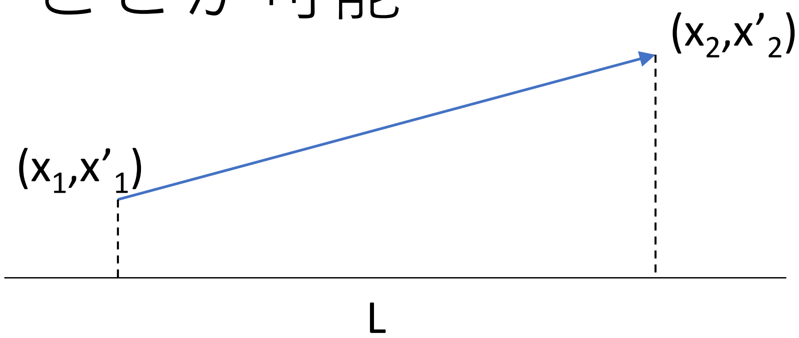


- 解: $x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\psi(s)+\psi_0)$
  - $\beta(s)$: ベータ関数 $\frac{1}{\beta(s)} = \frac{d\psi(s)}{ds}$
- sで微分: $x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}}\{\alpha(s)\cos(\psi(s)+\psi_0)+\sin(\psi(s)+\psi_0)\}$
  - $\alpha(s)$:

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\frac{d\beta(s)}{ds}$$

転送行列

- 線型の運動を行列を用いて表すことが可能
- 例: 自由空間
  - $x_1 \Rightarrow x_2=x_1+Lx_1'$
    $x_1' \Rightarrow x_2'=x_1'$



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

- 例: 4極電磁石

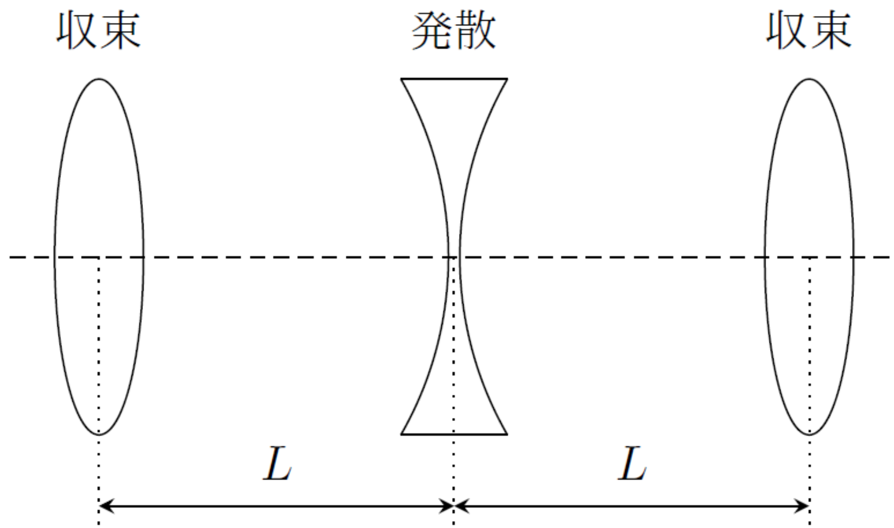
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}L & L\sin\sqrt{k}L \\ -\frac{1}{L}\sin\sqrt{k}L & \cos\sqrt{k}L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

  - kL一定(=K)で、L→0: 薄レンズ近似

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

転送行列の例

- 計算例



- 集束レンズ(厚さ半分)-自由空間-発散レンズ-自由空間-集束レンズ(厚さ半分)　　なので、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{2} & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{2} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 - \frac{K^2L^2}{2} & 2L(1 + \frac{KL}{2}) \\ -K^2L^2(1 - \frac{KL}{2}) & 1 - \frac{K^2L^2}{2} \end{pmatrix}
$$

転送行列

- 一般に、加速器内である位置s1からs2へ運動した粒子の転送行列

$$\left(\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array}\right)$$

$$m_{11} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos\Delta\psi + \alpha_1 \sin\Delta\psi)$$

$$m_{12} = \sqrt{\beta_1\beta_2}\sin\Delta\psi$$

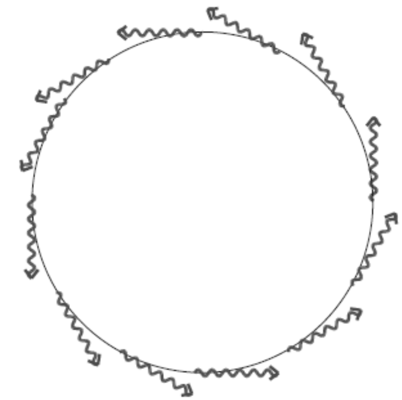
$$m_{21} = -\frac{(1+\alpha_1\alpha_2)\sin\Delta\psi + (\alpha_2-\alpha_1)\cos\Delta\psi}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}$$

$$m_{22} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos\Delta\psi - \alpha_2 \sin\Delta\psi)$$

- 円形加速器: 周期条件 $\beta(s+L)=\beta(s)$ があるので、

$$\left(\begin{array}{cc} \cos\Delta\psi + \alpha\sin\Delta\psi & \beta\sin\Delta\psi \\ -\gamma\sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi - \alpha\sin\Delta\psi \end{array}\right)$$

シンクロトン振動



- 加速度運動する荷電粒子は電磁波を放射
  ⇒加速空洞でエネルギーを補充
- 加速空洞から補充されるエネルギー

$$\Delta E = eV\sin(\Phi_0 + \omega t)$$

  - (損失エネルギー)=(補充されるエネルギー)なので

$$U_0 = eV\sin\Phi_0$$

- リング1周あたりのエネルギーずれ

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dn} &= \frac{eV}{E_0}\sin(\Phi_0+\omega t) - \frac{U_0}{E_0}\\ &= \frac{eV\omega}{E_0}(\sin\Phi_0\cos\omega t + \cos\Phi_0\sin\omega t) - \frac{U_0}{E_0}\\ &\approx \frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}t\end{aligned}$$

シンクロトン振動

- η_c: Momentum Compaction Factor 軌道のずれ(時間のずれ)のエネルギー依存性

$$\frac{L(\delta)-L(0)}{L(0)}=\frac{T-T_0}{T_0}\approx\eta_c\delta$$

- 1周あたりの変化 $\frac{d\delta}{dn}=\frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}T$ $\frac{dT}{dn}=T_0\eta_c\delta$

- よってエネルギーずれ、時間のずれの微分方程式

$$\frac{d^2\delta}{dn^2}=\frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}\eta_c\delta$$

$$\frac{d^2T}{dn^2}=\frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}\eta_c T$$

  - エネルギーずれは単振動する($\frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}\eta_c<0$): シンクロトン振動

エミッタンス

- 加速器ビームの品質を表す

$$\epsilon_x \equiv \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle x'^2 \right\rangle - \left\langle xx' \right\rangle^2}$$

  - エミッタンスが小さい: ビーム内粒子の方向がそろい、小空間に集まっている
  - ナノビームの実現 ⇒ 低エミッタンスビームが必須

  - 線型運動で保存

$$\begin{aligned}
\frac{d(\epsilon_x^2)}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle x'^2 \right\rangle - \left\langle xx' \right\rangle^2\right) \\
&= 2\left\langle xx' \right\rangle \left\langle x'^2 \right\rangle + 2\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle x'x'' \right\rangle \\
&\quad - 2\left\langle xx' \right\rangle \left\{\left\langle x'^2 \right\rangle + \left\langle xx'' \right\rangle\right\} \\
&= -2k(s)\left\langle x^2 \right\rangle \left\langle xx' \right\rangle + 2k(s)\left\langle xx' \right\rangle \left\langle x^2 \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

実際運転上でのビームの状態

- ビーム内粒子についての平均
  - ベータトロン振動上の粒子ごとの初期値で平均する

$$
\begin{aligned}
\epsilon_x^2 &= \langle u^2\rangle \langle (u+\alpha v)^2\rangle - \langle uv + \alpha u^2\rangle^2 \\
&= \langle u^2\rangle \left(\langle u^2\rangle + 2\alpha \langle u^2\rangle \langle uv\rangle + \alpha^2 \langle u^2\rangle\right) \\
&\quad - \left(\langle uv\rangle^2 + 2\alpha \langle u^2\rangle \langle uv\rangle + \alpha^2 \langle u^2\rangle^2\right) \\
&= \langle u^2\rangle \langle v^2\rangle - \langle uv\rangle^2 \\
&= \langle a^2\cos^2\psi_0\rangle \langle a^2\sin^2\psi_0\rangle - \langle a^2\cos\psi_0\sin\psi_0\rangle^2
\end{aligned}
$$

  - 実際の運転: u, vに相関がないようにする
    ⇒a, ψ_0が一様に分布しているようにとる

$$
\langle \cos^2\psi_0\rangle = \langle \sin^2\psi_0\rangle = \frac{1}{2},\ \langle \sin\psi_0\cos\psi_0\rangle = 0
$$

$$
\epsilon_x = \frac{1}{2}a^2
$$

  - このとき、ビームサイズ

$$
\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\beta\epsilon_x} \qquad \sigma_{x'} = \sqrt{\langle x'^2\rangle - \langle x'\rangle^2} = \sqrt{\gamma\epsilon_x}
$$

  - **ベータ関数はビームの大きさを表す指標**

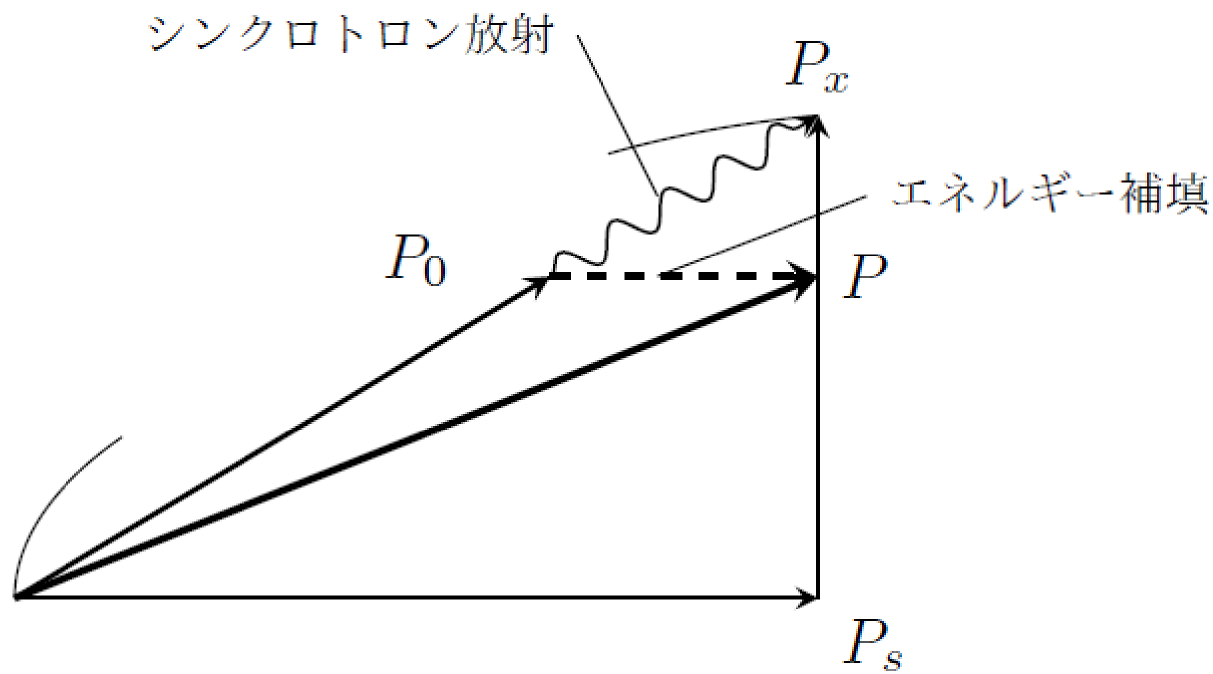
ベータトロン振動の放射減衰

- シンクロトロン放射+加速空洞による加速でエミッタンスを小さくすることが可能
  - シンクロトロン放射: 進行方向放射。エミッタンス不変
  - エネルギー補充: z方向のみ加速される

  ⇒ 角度が小さくなる
- 角度変化

$$\Delta x' = x'_{\mathrm{rf}} - x' = -\frac{U_0}{E_0}x'$$

$$x'_{\mathrm{rf}} = \frac{P_x}{P_s} \approx \left(1 - \frac{U_0}{E_0}\right)x'$$



ベータトロン振動の放射減衰

- $\epsilon_x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$: エミッタンス変化は角度変化に比例
- $\dfrac{d\epsilon}{dt} = -\dfrac{U_0}{E_0 T_0}\epsilon$
  - $\epsilon(t) \approx \epsilon(0)\exp(-\frac{U_0}{E_0 T_0}t)$ の形でエミッタンスが減衰
  - ダンピング時間: エミッタンスが$1/e^2$になるのにかかる時間

- ベータトロン振動のダンピング時間

$$\tau \approx 2\frac{E_0 T_0}{U_0}$$

シンクロトロン振動の放射減衰

- エネルギーEの粒子が磁場Bの中でシンクロトロン放射で失うエネルギー

$$\Delta E/E \propto E^2 B^2$$

$$U = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 U_0$$

- エネルギー減少の項が入ってエネルギーに関する方程式

$$\frac{d^2\delta}{dn^2} = \frac{eV\omega\cos\Phi_0}{E_0}\eta_c\delta - 2\frac{U_0}{E_0}\frac{d\delta}{dn}$$

  - 解は減衰振動

$$\delta = (\text{調和振動一般解})\cdot \exp\left(-\frac{U_0}{E_0 T_0}t\right) \quad \left(n = \frac{t}{T_0}\right)$$

  - ダンピング時間

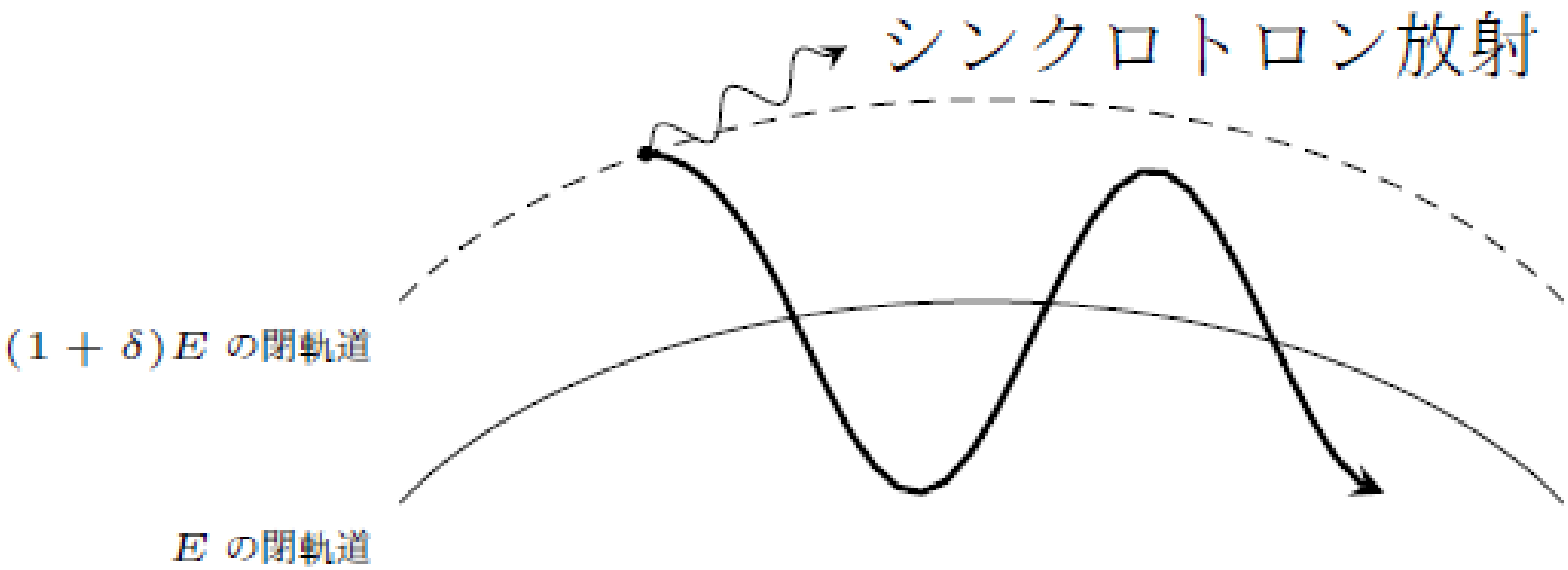
$$\tau \approx \frac{E_0 T_0}{U_0}$$

放射励起

- エミッタンスは放射減衰で減少

⇒無限に小さくはなれない

- ベータトロン振動の放射励起
  - シンクロトロン放射によって、異なるエネルギーの閉軌道上を振動する



放射励起

- シンクロトロン振動の放射励起
  - エネルギー同じ粒子群で
    - シンクロトロン放射が全粒子一定なら、エネルギー広がりは増大しない
  - 量子効果でそれぞれの粒子がバラバラな放射

  ⇒ シンクロトロン振動も励起する
- 十分な時間経過
  - 放射減衰と放射励起がつりあう
  - エミッタンスがあるところで平衡状態になる

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \exp\left(-\frac{2t}{\tau_{x(y)}}\right) + \epsilon_{eq}\left\{1 - exp\left(-\frac{2t}{\tau_{x(y)}}\right)\right\}$$

$$\delta_{eq} = \delta_0 \exp\left(-\frac{2t}{\tau_z}\right) + \delta_{eq}\left\{1 - exp\left(-\frac{2t}{\tau_z}\right)\right\}$$

x-yカップリング

- 垂直・水平方向が独立2成分でない場合:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = k(s)x + k_S(s)y$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} = -k(s)y + k_S(s)x$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{O}$$

  - (x, y)を同時に考えて、適当な変換によって独立な2成分系(X, Y)を得ることが可能

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \\ Y \\ Y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{s}) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$$

- カップリングを引き起こす要素
  - スキュー4極成分により引き起こされる
  - 4極電磁石のビーム軸周り回転誤差
  - 6極電磁石の設置誤差

例:6極電磁石設置誤差

- 6極電磁石が設計からy方向にdずれて設置

 ⇒中心をとおるはずの粒子は-dずれて通ることなる

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{k_2}{2}(x^2 - (y-d)^2)$$
$$\approx -\frac{k_2}{2}(x^2 - y^2) - k_2 dy$$
$$\frac{dy'}{ds} = k_2 x(y-d)$$
$$\approx k_2 xy - k_2 dx$$

- 余分なスキュー磁場が発生する

 ⇒カップリングが生成される

実際運転上でのビームの状態

- ビームサイズ

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\beta \epsilon_x}$$

- **ベータ関数はビームの大きさを表す指標**

ビームサイズ

- ディスパージョン
  - ディスパージョンがあると、ディスパージョンの分だけ粒子の位置がずれる
  - ビームサイズが $\sigma = \sqrt{\beta\epsilon + (\eta\delta)^2}$ に”ボケる”
- クロマティシティ
  - エネルギーずれによって焦点距離がずれるのでビームサイズが $\sigma = \sigma_0\sqrt{1 + (\delta\sigma_\delta)^2}$
    に”ボケる”
  - 6極電磁石で補正する: エネルギーずれに比例した収束力
    - 補正するためにはディスパージョンが必要

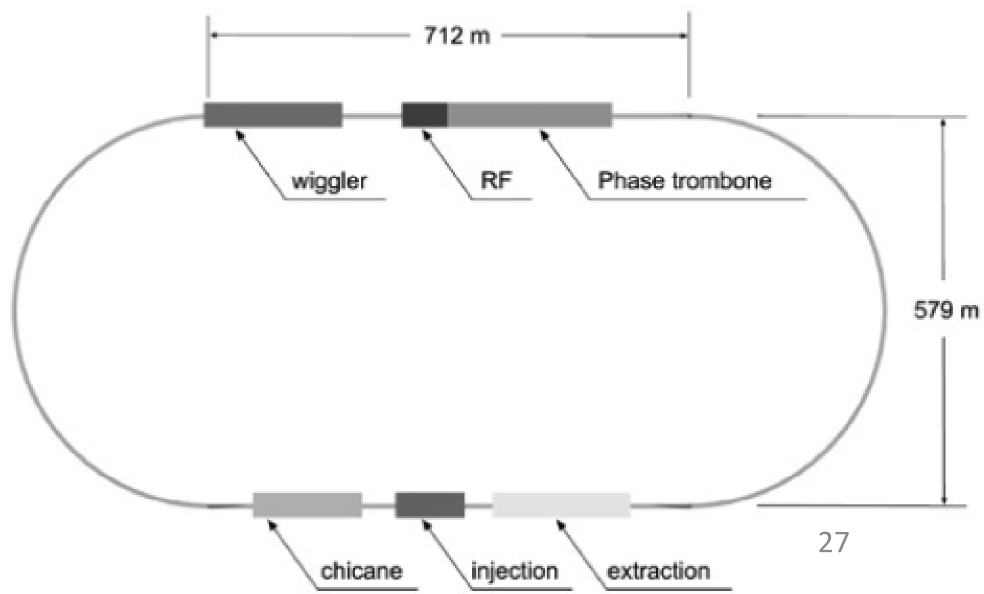
$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &= -\frac{k_2}{2}((x_\beta + \eta\delta)^2 - y^2) \\ &\approx -k_2\eta\delta x_\beta - \frac{k_2}{2}(\eta\delta)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} &= k_2(x_\beta + \eta\delta)y \\ &\approx k_2\eta\delta y\end{aligned}$$

ダンピングリング

- 電子・陽電子源で作られた粒子ビームのエミッタンスを下げる
  - ILCのビーム: 166m(554nsec)間隔で1312バンチ
  - そのままダンピングリングに入れると166×1312～200kmのダンピングリングが必要

  ⇒圧縮して6.15nsec間隔でダンピングリングに詰める
- 構成
- ウィグラー部
- 加速空洞設置部
- ビームの入射・取出し部
- アーク部 (偏向磁石･収束･クロマティシティ補正の六極電磁石)



ダンピング時間

- ビームのダンピングリングでの滞在時間は200ms
  - ダンピング時間

    x(y)方向: ～24ms

    s(z)方向: ～12ms
  - 減衰係数

$$\exp\left(-\frac{2t_{\mathrm{ext}}}{\tau_z}\right) \sim 3 \times 10^{-15}$$

$$\exp\left(-\frac{2t_{\mathrm{ext}}}{\tau_{x(y)}}\right) \sim 6 \times 10^{-8}$$

  - ダンピング時間は十分短くて取り出しではほぼ平衡エミッタンスになる
- 低エミッタンスのために
  - y方向ディスパージョンを小さく
  - カップリングも小さくしてx方向からの回り込みを抑える

ディスパージョン測定

- ディスパージョン補正のために測定する
- ビームのエネルギーを変えた時の位置変化を測定する
  - エネルギーによって粒子軌道が変わるため
  - 加速空洞の周波数を変えて粒子エネルギーを変える
    - 粒子は加速空洞の周波数の整数倍で周回する

$$\omega T_0 = 2\pi h$$

    - 加速空洞周波数 f_0 のときの粒子の周回長L(0)
      加速空洞の周波数$f_0+\Delta f$のときの粒子の周回長L(δ)

$$L(0)\propto\frac{1}{f_0},\ L(\delta)\propto\frac{1}{f_0+\Delta f}$$

ディスパージョン測定

- エネルギーずれにより周長が変わるので

$$\frac{f_0 + \Delta f}{f_0} = \frac{L(0)}{L(\delta)} \approx \frac{1}{1 + \eta_c \delta}$$

$$\Rightarrow \quad \delta \approx -\frac{1}{\eta_c}\frac{\Delta f}{f_0}$$

- よって、ディスパージョンは

$$\eta = \frac{x_{\Delta f} - x_0}{\delta}$$

  - 軌道はビーム位置モニタで測定する

- 補正は偏向電磁石を用いる

カップリング補正

- y方向エミッタンス～1/100 x方向エミッタンス
  - カップリングによりx方向から回り込んでくると垂直エミッタンスは大きな影響を受ける
  - カップリングの影響はできるだけ抑える

- カップリングの原因
  - ビームライン上のスキュー四極電磁石
  - 四極電磁石の回転設置誤差
  - 六極電磁石で中心からずれる場合

カップリング補正

- x, yをまとめて転送行列

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{pmatrix}$$

- 1成分の場合: 自由度は3つ σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} (α, β, ε(a))
- 2成分の場合: 自由度は10(3+3+4)
  - 独立な10個の位置測定が必要
- カップリングを補正= 4つの成分を0にする
  - 独立な4つのスキュー電磁石を用いて補正する

エミッタンス測定

- ビームサイズ: $\sigma = \sqrt{\epsilon\beta}$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\sigma^2}{\beta}$$

  - ビームサイズとベータ関数を測定する
- ベータ関数の測定
  - ダンピングリングを周回した時転送行列

$$\begin{pmatrix} \cos\tilde{\mu} + \tilde{\alpha}\sin\tilde{\mu} & \tilde{\beta}\sin\tilde{\mu} \\ -\tilde{\gamma}\sin\tilde{\mu} & \cos\tilde{\mu} - \tilde{\alpha}\sin\tilde{\mu} \end{pmatrix}$$

  - 周回して4極電磁石を通過(周期条件)

$$\begin{pmatrix} \cos\tilde{\mu}+\tilde{\alpha}\sin\tilde{\mu} & \tilde{\beta}\sin\tilde{\mu} \\ -\tilde{\gamma}\sin\tilde{\mu} & \cos\tilde{\mu}-\tilde{\alpha}\sin\tilde{\mu} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\mu+\alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu-\alpha\sin\mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\mu+\alpha\sin\mu-K\beta\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu-K(\cos\mu-\alpha\sin\mu) & \cos\mu-\alpha\sin\mu \end{pmatrix}$$

エミッタンス測定

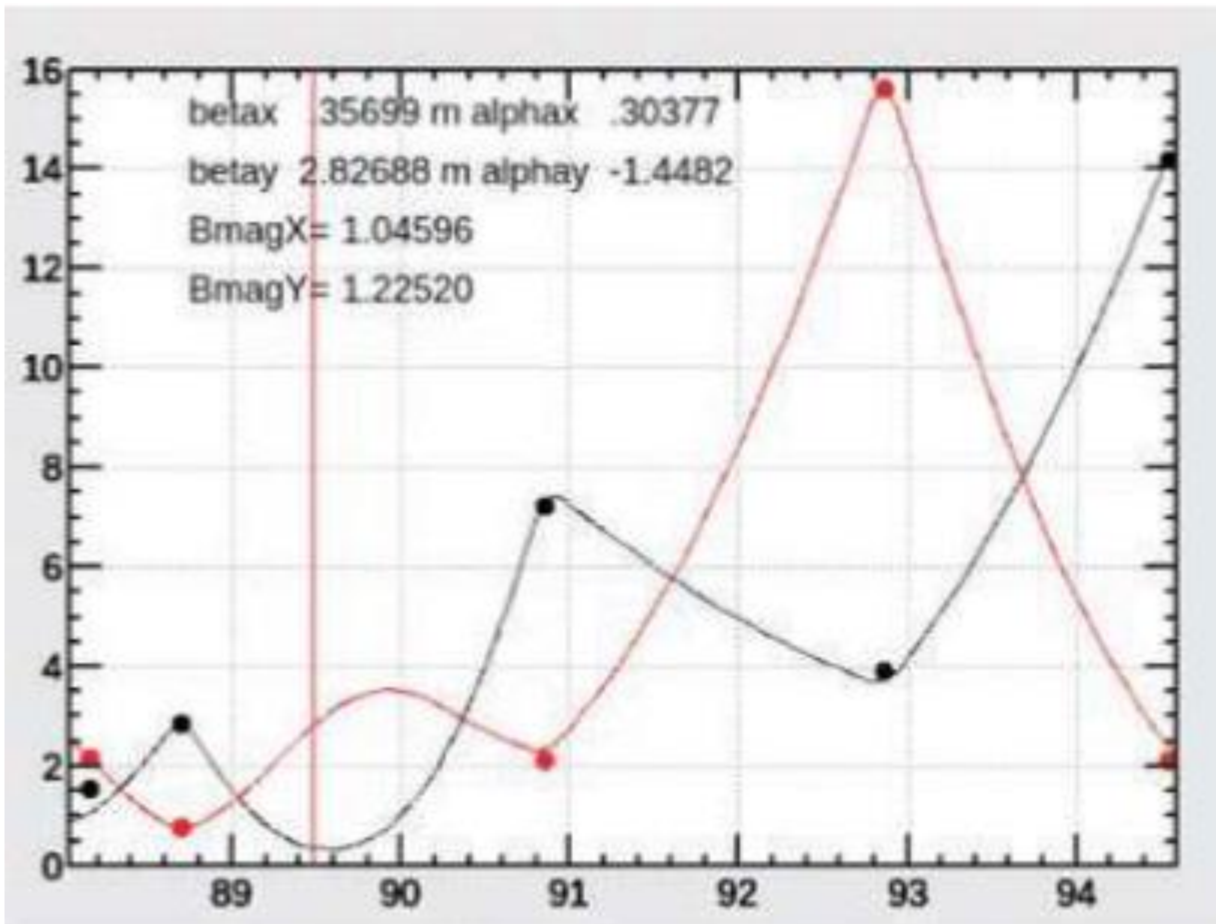
- 両辺のTrace

$$Tr/2 = \cos\tilde{\mu} = cos\mu - \frac{k\beta}{2}\sin\mu$$
$$\approx cos(\mu + \frac{k\beta}{2}) \ \ (if\ |k\beta| << 1)$$

  - 位相進み: $\tilde{\mu} = \mu + \frac{k\beta}{2}$
  - 4極電磁石の強さを変える ⇒ ベータ関数を比例係数として位相進みが変化
- 測定点の周囲にある4極電磁石でベータ関数を測定
  - 内挿して測定点でのベータ関数を求める。
- ビームサイズ: ビームサイズモニタを用いる
  - ビームからのシンクロトロン放射をスクリーンにあてて形を見る

ベータ関数測定例

- ATFにおけるベータ関数の測定例
  - 赤ラインにおけるベータ関数を測りたい
  - 点が4極電磁石のある位置



最終収束系

- Final Focus
  - 2つの4極電磁石の対を設置: 衝突点でのベータ関数を小さくする
- 絞るために:
  - ビームのエミッタンスを小さくする(ダンピングリング)
  - ビームが最終収束系での変形が小さいこと

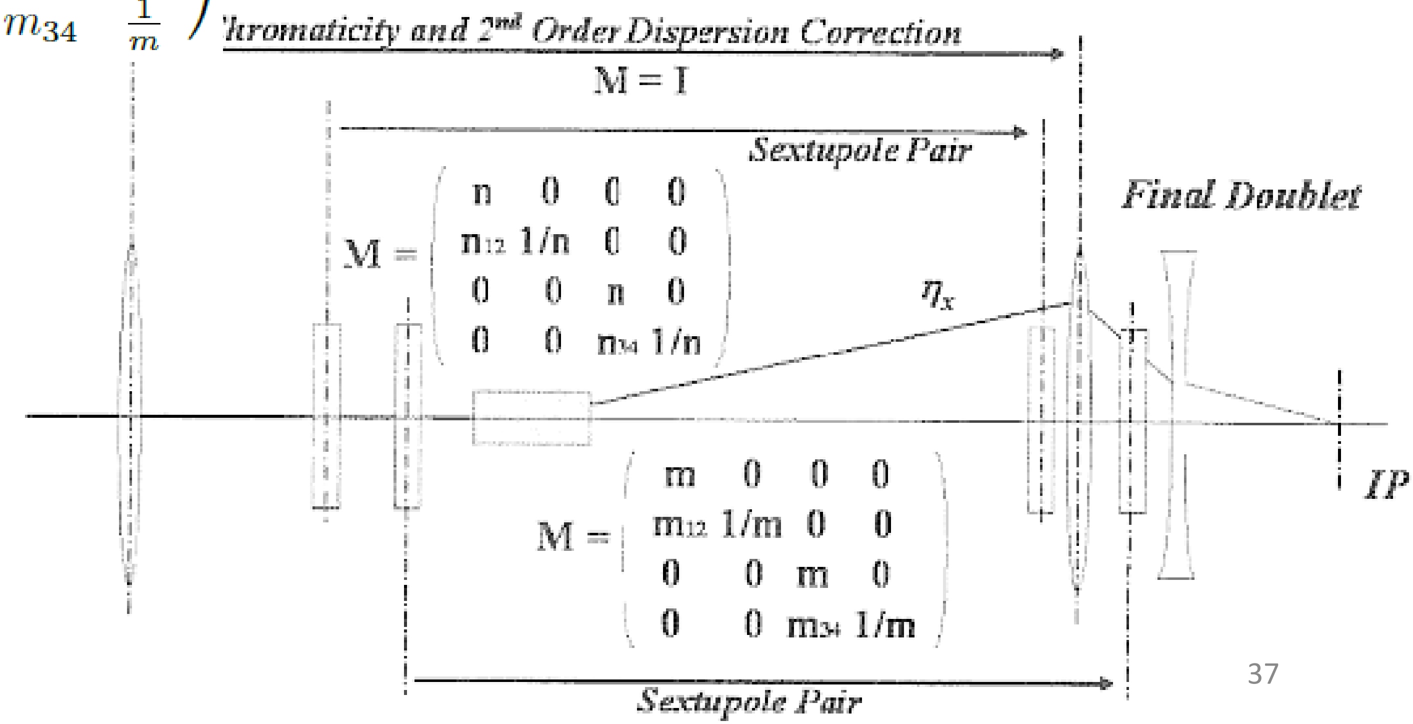
- 4極電磁石: 色収差が発生 ⇒ ビームサイズ増大
  - 6極電磁石を設置して色収差を補正する

- ILC: Local Chromaticity Correctionにより補正
  - 6極電磁石を4極電磁石のすぐそばに置く
  - 6極電磁石を設置したことにより起こるさらなる収差(Geometric Aberration)を上流に6極電磁石を置いて補正

Local Chromaticity Correction

- 4極電磁石のそば: ディスパージョンを与え6極電磁石(強さK_{s2})
- 上流: ディスパージョン0で6極電磁石(強さK_{s1})
- 2つの6極電磁石間の転送行列

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ m_{12} & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m_{34} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$



Local Chromaticity Correction

- 6極電磁石を通過する粒子がΔxずれて通過

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{k_2}{2}((x+\Delta x)^2 - y^2)$$

$$\approx -\frac{k_2}{2}(x^2 - y^2) - k_2 \Delta x x$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = k_2(x+\Delta x)y$$

$$\approx k_2 xy + k_2 \Delta x y$$

  - 新たに4極磁場が励起(強さ$k_2\Delta x$)

Local Chromaticity Correction

- Geometric Aberrationの補正
  - 系の転送行列(6極電磁石-6極電磁石):

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K_{s2}(m\Delta x+\eta_x\delta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m_{12} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K_{s1}\Delta x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m & 0 \\ m_{12}-(m^2K_{s2}+\frac{K_{s1}}{m})\Delta x - m\eta_x K_{s2}\delta & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{s2}(m\Delta x+\eta_x\delta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ m34 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{s1}\Delta x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m & 0 \\ m34+(m^2K_{s2}+\frac{K_{s1}}{m})\Delta x - m\eta_x K_{s2}\delta & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

  - Geometric Aberration補正:
    - Δxの項を補正

$$K_{s1} = -m^3 K_{s2}$$

Local Chromaticity Correction

- 色収差の補正
  - 2つ目の6極電磁石通過後の変位:
    - 2つ目の6極電磁石ではディスパージョンを与えているので入射前の変位は$\Delta x+\eta\delta$

水平方向

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\eta K_{s2}\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\eta_x K_{s2}(\Delta x+\eta_x\delta) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_x\delta \\ \eta_x'\delta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \Delta x+\eta_x\delta \\ \Delta x'+\eta_x'\delta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -K_{s2}\eta_x(2\Delta x\delta+\eta_x\delta^2) \end{pmatrix}$$

垂直方向

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta K_{s2}\delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ K_{s2}\eta_x\Delta y\delta \end{pmatrix}$$

- 色収差補正量が水平・垂直で違う(δ1次の項)

Local Chromaticity Correction

- 色収差の補正
  - 四極電磁石で生まれる色収差

  水平方向

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{1+\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{1+\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \delta \\ \eta'_x \delta \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Delta x + \eta_x \delta \\ \Delta x' + \eta'_x \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K(\Delta x \delta + \eta_x \delta^2) \end{pmatrix} \right\}$$

  垂直方向

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{1+\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \delta \Delta y \end{pmatrix} \right\}$$

  - 水平・垂直で同程度
    - $2K_{s2}\eta_x = K$を課しても2次の効果が残ってしまう。

Local Chromaticity Correction

- 色収差補正
  - 対処法: 系の外側からの色収差を含める
  - ディスパージョン0で転送行列がIの位置に4極電磁石を置く
  - ここでの色収差

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{K}{1+\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -K & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \Delta x \delta \end{pmatrix} \right\}$$

- 全てを含めた全体の収差による変位:

水平方向　色収差　$-2K_{s2}\eta_x \Delta x \delta + K\Delta\delta + K\Delta\delta$

2次の収差　$-K_{s2}\eta_x^2\delta^2 + K\eta_x\delta^2$

垂直方向　$K_{s2}\eta_x \Delta y \delta - K\Delta y \delta$

  - 補正の条件

$$K_{s2} = \frac{K}{\eta_x}$$

砂時計効果

- Final Focus後は自由空間: $x' = \mathrm{const.},\ x'' = 0$
- ビームサイズ $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ をsで微分

$$\frac{d(\sigma_x^2)}{ds} = 2\langle xx' \rangle^2 - 2\langle x \rangle \langle x' \rangle$$

$$\frac{d^2(\sigma_x^2)}{ds^2} = 2\langle x'^2 \rangle - 2\langle x' \rangle^2 = 2\sigma_{x'}^2 = \mathrm{const.}$$

- よって衝突点付近でのビームサイズ

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x'}^{*2} s^2 + \sigma_x^{*2}$$

$$\sigma_x^2 = \epsilon_x \beta^* (1 + \frac{s^2}{\beta^{*2}})$$

$$\sigma_x^{*2} = \epsilon_x \beta^*$$

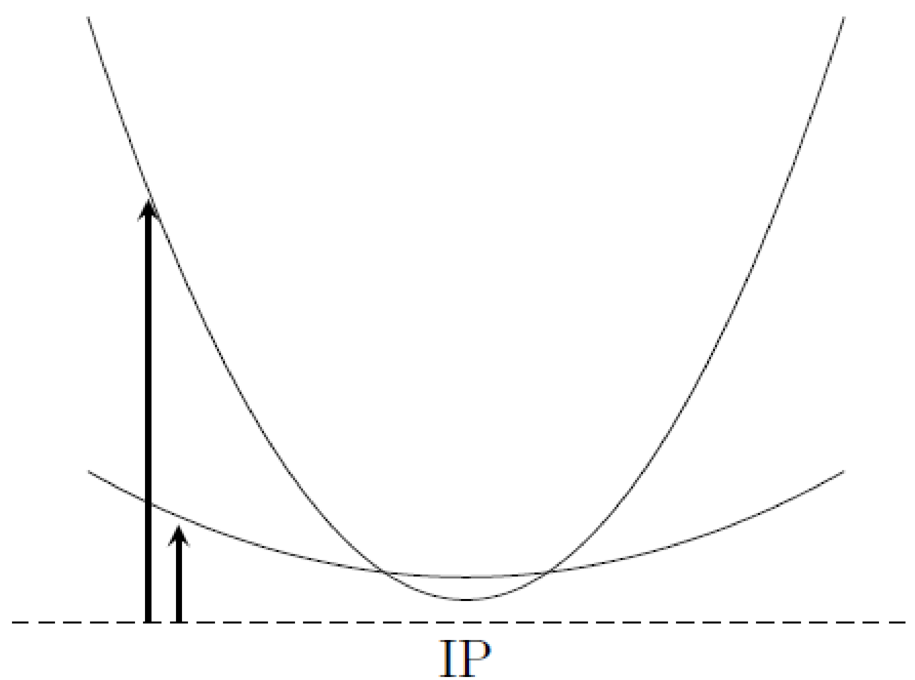
$$\sigma_{x'}^{*2} = \epsilon_x \gamma^* = \epsilon_x \frac{1 + \alpha^{*2}}{\beta^*} = \frac{\epsilon_x}{\beta^*}$$

  - 焦点付近では曲率1/β*の2次関数のような形

砂時計効果

- 焦点で絞りすぎると焦点から少しずれただけでビームサイズが急激に増大

  ⇒ルミノシティを損する(ビーム全体に寄与する)
- 焦点でのベータ関数はバンチ長位にする
  - ILC: ベータ関数0.48mm バンチ長 0.3mm

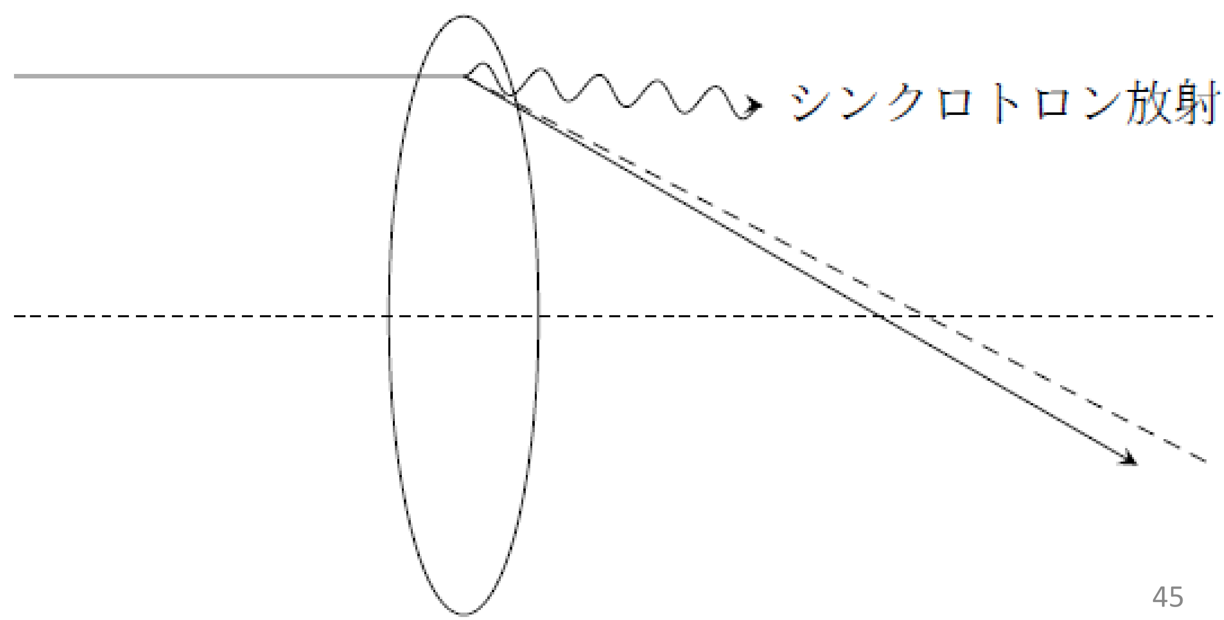


生出リミット

- 四極電磁石により粒子は曲げられる

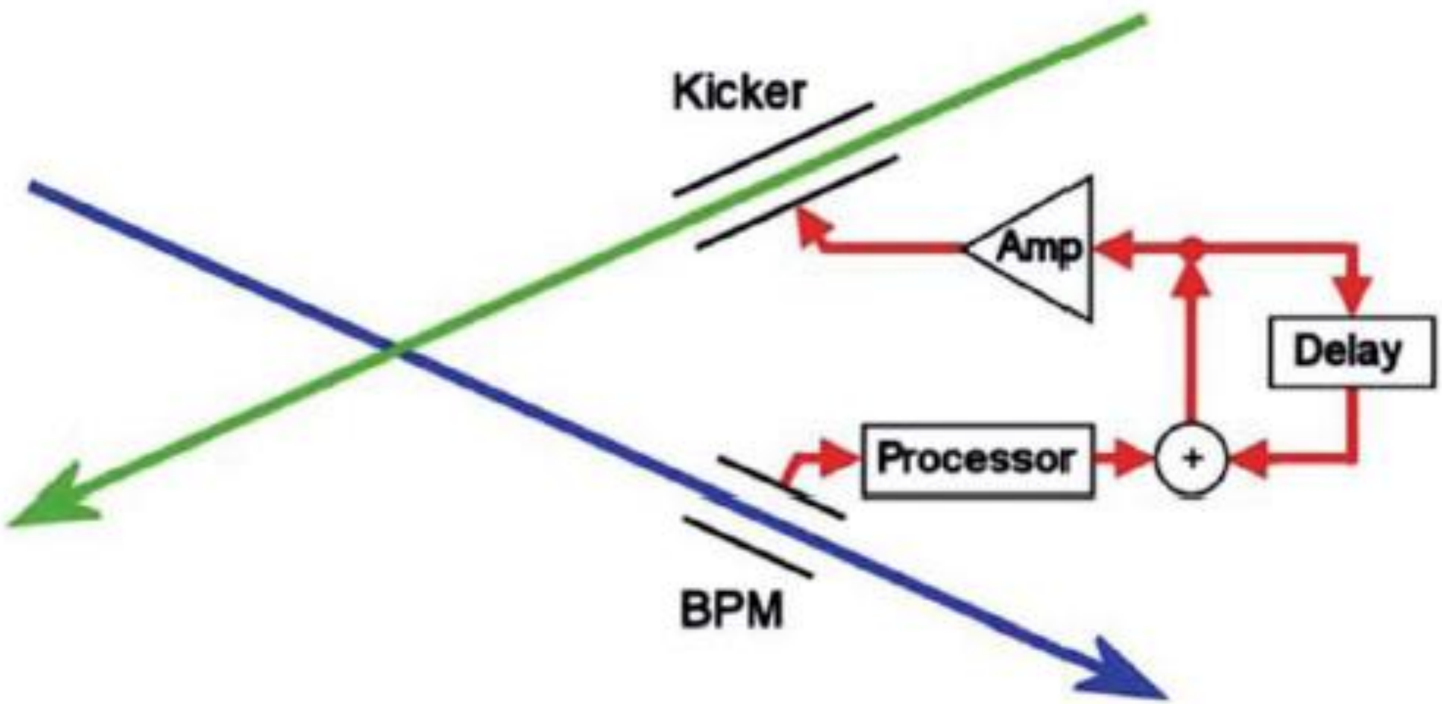
  ⇒加速度運動
- シンクロトロン放射によりエネルギーが変化

  ⇒ビームサイズが増大
  - 絞れるビームサイズに限界がある
- ILC: 生出リミットの200倍大きくビームサイズを設定



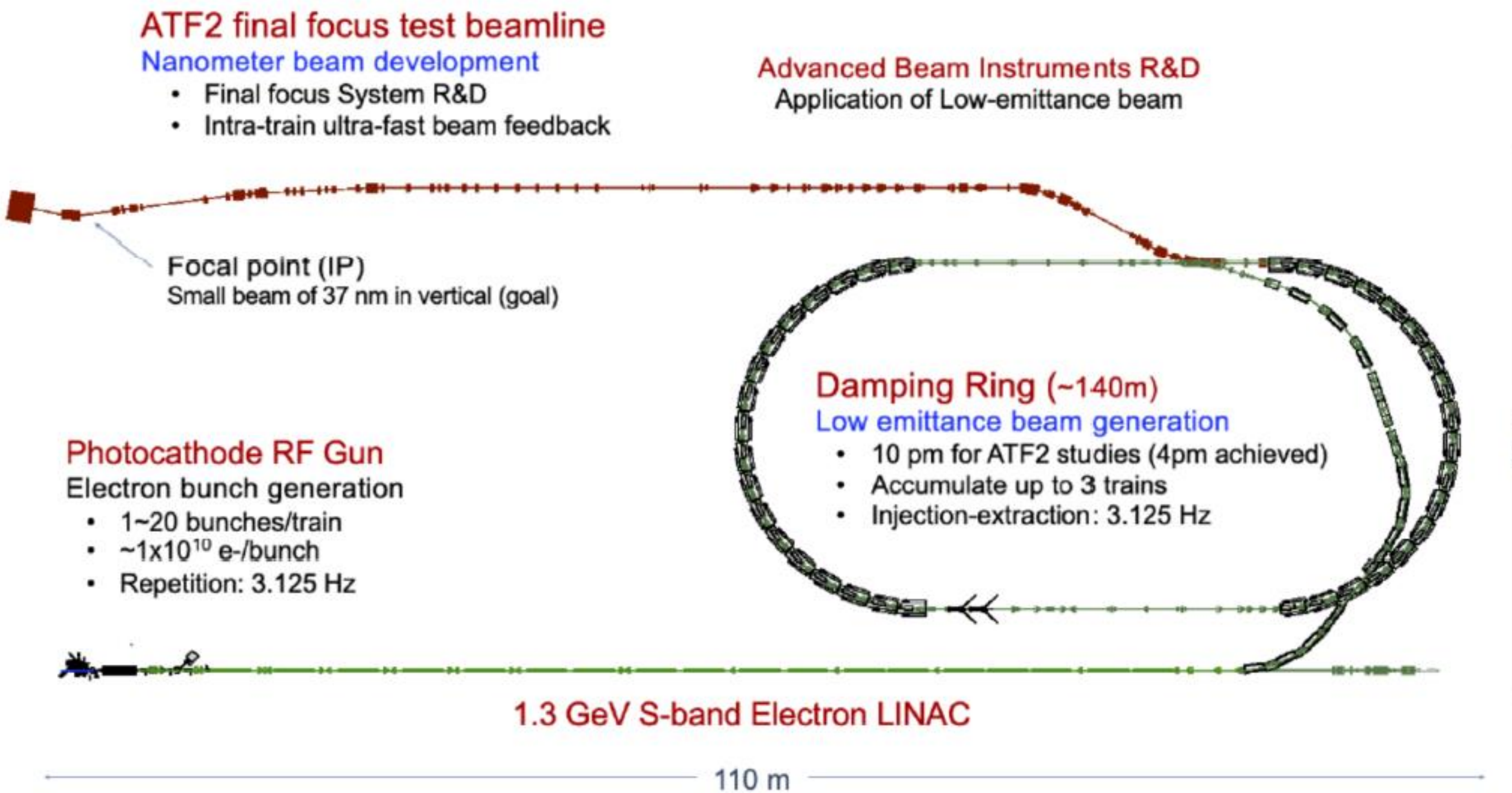
Feedback

- ILC: 1つのパルスに1312個のバンチ(554ns間隔)
  - バンチ間隔が長いので前方バンチを使って後方バンチの位置を補正する
  - ビーム同士の反跳を用いる
    - 中心からビームがずれた時に生じる角度変化を補正するようにkickする



Accelerator Test Facility(ATF/ATF2)

- ビームを小さく絞り、安定させるための技術の検証
  - ATF: ダンピングリング、ビーム取り出し
  - ATF2: Local Chromaticity Correctionによる最終収束

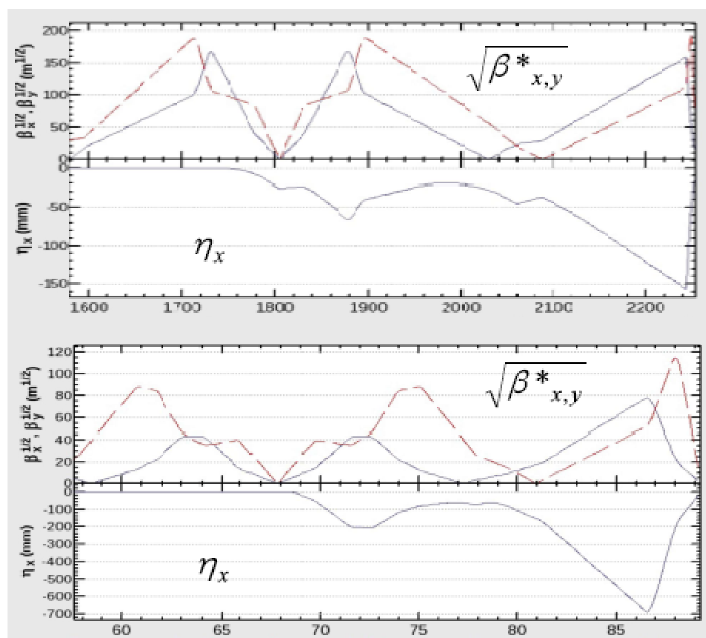


ATF/ATF2のパラメータ

- ILCと同等の色収差で絞れるビームサイズにGoalを設定

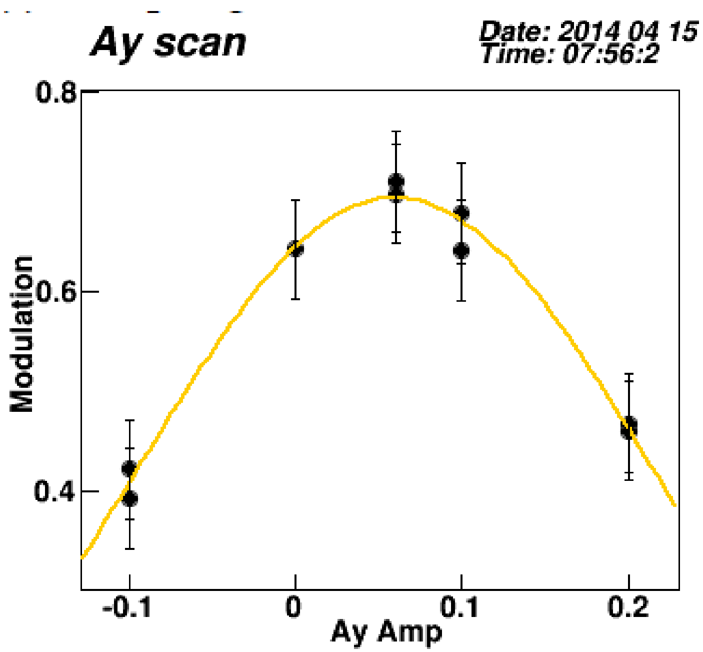
パラメータ	ATF2	ILC
エネルギー [GeV]	1.3	125
エネルギー拡がり (e^+/e^-)[%]	-/0.08	0.15/0.19
IP での水平 β 関数 [mm]	4	13
IP での垂直 β 関数 [mm]	0.1	0.41
垂直エミッタンス [nm]	1.1	0.02
水平エミッタンス [pm]	12	0.07
水平ビームサイズ [nm]	37	7.7
垂直クロマティシティ (ILD/SiD)	10000	(7300/9400)

- ILCと同等の収束系



ビーム調節

- ATF2の5つの6極電磁石で極小ビームのサイズ調整
  - 5つの6極電磁石の組み合わせで1つのパラメータのみが独立に変化するようにknobを設計している
    - 線型のパラメータ
    - 高次のパラメータ(完全に独立にしておくのは難しい)



M vs. knob strength
IPBSM 30 deg. mode

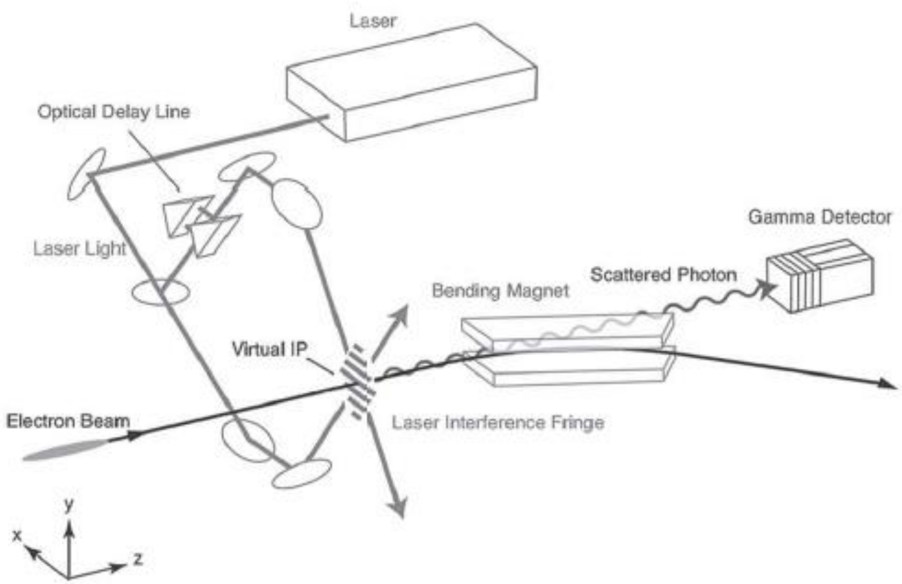
	電磁石パラメータ	調整パラメータ
線型 knob	六極 水平方向 移動	yy' (焦点位置)
	六極 垂直方向 移動	yE (ディスパージョン)
		$x'y$ (x-y カップリング)
非線型 knob	六極 磁場強度	$x'yy'$
		$yy'E$ (クロマティシティ)
	skew 六極 磁場強度	xxy
		xyE
		yEE (2 次ディスパージョン)
		$yy'y'$

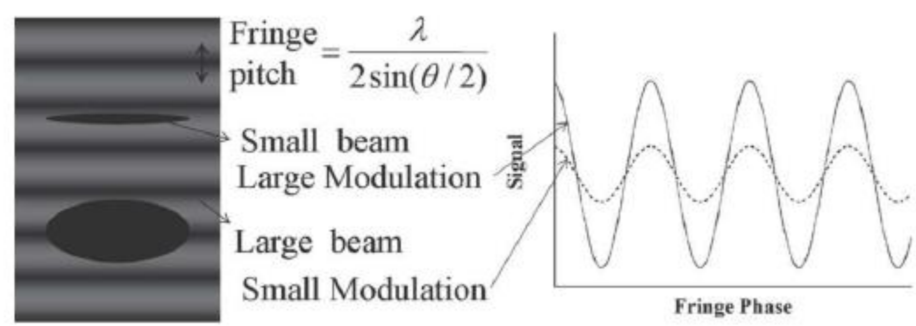
ビームサイズ測定

- **ATF2**ではビームは**1**本: サイズ測定に別な技術が必要
  - ビームをレーザー干渉縞にぶつけコンプトン散乱光を見る
  - 当たった縞の位置によって散乱光の強度は変化

  ⇒分布が波のようになる
  - ビームサイズによって波の振幅が変化

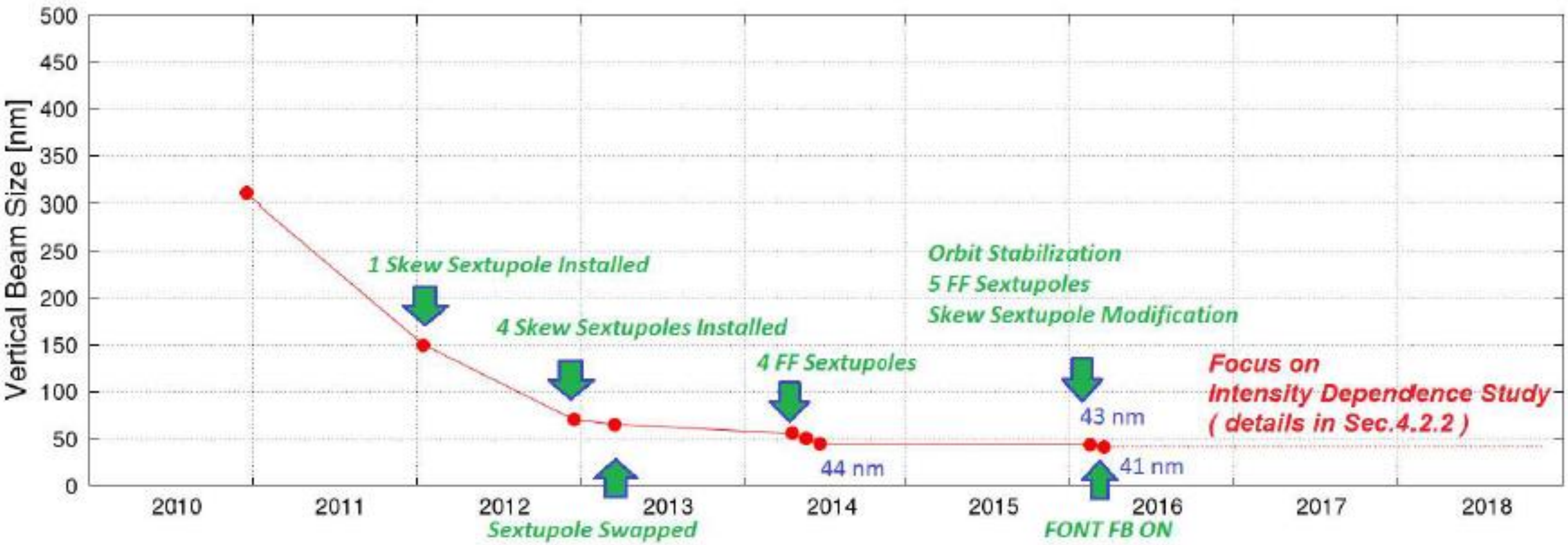
  ⇒ビームサイズが測定可能





ナノビームへの挑戦

- 37nmビームサイズに挑戦
- 現在: 41nm ほぼgoalに到達しつつある



今後

- 37nmを目指して
  - IPBSMの安定性の研究
    - レーザー光の変形
    - レーザー光の安定性
  - ダンピングリング→最終収束系のエミッタンス増大の原因を突き止める

- ビームの強度によってビームサイズが変化
  - Wakefieldの研究
    - 前方バンチが励起する電磁場によって後方バンチが影響を受けてビーム軌道が変化する
    - 今のところ考えているWakefieldのシミュレーションと理論経緯さんは一致している
    - ビームライン上にある考慮に入れていないWakefield源の調査

まとめ

- ナノビーム技術はリニアコライダーにおける基幹技術
  - ダンピングリングでの低エミッタンスの実現
  - 最終収束系でのナノメートルサイズへの絞り込み

- ATF/ATF2における実証: ナノビーム生成のためのほぼ技術は確立している
  - ダンピングリングはOK
  - ATF2のビームサイズはほぼgoalに到達
  - ビームサイズ37nmに向けたさらなる研究が進行中