

# 10. g-2/EDM 超伝導電磁石開発と MRI への精密磁場技術

高エネルギー加速器研究機構

阿 部 充 志

# 目 次

## g-2/EDM 超伝導電磁石開発とMRIへの精密磁場技術

1	はじめに	10-1
1.1	既開発の磁場設計技術	10-1
1.2	磁場設計と正則化	10-2
1.3	本資料の内容	10-2
2	最小二乗法と正則化	10-3
2.1	正則化による最小二乗解	10-3
2.2	固有モード強度に注目したTSVD 正則化	10-4
2.3	目標磁場について	10-6
3	TSVD 正則化を用いる例題	10-7
3.1	例題の計算体系	10-7
3.2	電流-磁場の応答行列と特異値分解	10-9
3.3	磁場・電流分布の再構成	10-11
3.4	目標磁場とMaxwell 方程式	10-13
3.5	3章のまとめ	10-16
4	MRI 用磁石の一樣磁場設計	10-18
4.1	MRI 磁石磁場設計の磁場成分	10-19
4.2	概念検討(Step-1)	10-19
4.3	起磁力配置の離散化(Step-2)	10-23
4.4	巻き線数の離散化(Step-3)	10-25
4.5	鉄芯型MRI 磁石の場合	10-26
4.6	磁場シミング	10-28
4.7	MRI 磁石静磁場設計のまとめ	10-33
5	g-2/EDM磁石の磁場設計	10-35
5.1	主磁場	10-35
5.2	調整装置	10-41
5.3	Muon 入射&蓄積関係の磁場発生機器	10-46
5.4	g-2/EDM 磁石磁場設計のまとめ	10-52
6	まとめ	10-53
	参考文献	10-55

# g-2/EDM 超伝導電磁石開発と MRI への精密磁場技術

## 1. はじめに

J-PARC ではミュオンについて物理的性質を正確に計測する2つの実験が準備されている。共に、極めて一様性の良い高磁場を必要としている。一様性の良い磁場は既に MRI(Magnetic Resonance Imaging)で実現され、利用されている[1,2]が、J-PARC での実験に必要な磁場の一様性は、MRI に比べると、さらに極めて良好な磁場である。これらは、ミュオンニウムの超微細構造精密測定の高磁場 MuSEUM (Muonium Spectroscopy Experiment Using Microwave)実験[3,4]、および、ミュオン異常磁気能率/電気能率(g-2/EDM)高精度測定実験である[5-7]。これらの実験内容の説明は他文献を参考にして頂くが、共に精度良い一様磁場を必要とする実験である点に共通点がある。それぞれ、1.7T および 3.0T を永久電流(Persistent current)通電の超伝導磁石を用い、磁場分布を補正する受動的(主に磁化鉄片利用)シミングにより、製作・組み立て・設置時に混入した誤差磁場を補正して、必要な空間的な均一度を実現する。本資料の説明で、「均一度」という言葉が頻繁に出てくるが、この定義は下記である。ある検討領域(VOI: Volume of Interest と言うこともある)の磁場均一度とは、

$$\text{均一度} = \frac{\text{磁場分布の最大最小値の差}}{\text{平均磁場}} \times 10^6 \text{ [ppm]} \quad (1-1)$$

であり、通常、ppm 単位で表す。

MRI 撮像には、一様な磁場(一般的な MRI 装置では 0.3~3.0T)を必要とするが、通常の MRI 磁石では 10ppm 程度の均一度(直径 50cm 球内)である[1,2]。

一方、MuSEUM 実験では狭い領域(20cm 直径 30cm 長回転楕円体)ではあるが、1.7T  $\pm 0.17\mu\text{T}$ (0.1ppm)以内の超良好な一様磁場が必要である。そして、既にこのような超良好均一度を実現できることは示されている[8]。g-2/EDM 精密計測実験では、半径 0.333m、半径方向幅

3.0cm、軸方向高さ 10.0cm の領域で、 $3.0\text{T} \pm 0.30\mu\text{T}$ (0.1ppm)が目標である[6-7]。共に、式(1-1)では均一度の目標は 0.2ppm である。

このような極めて良い均一な磁場を得るには、設置時、使用開始前に、磁場調整(シミング)を行うことは当然であるが、その磁場調整を可能とするには、使用する磁石に、その能力が備わっていることが必要である。本資料中で紹介するが、概念的には次のようである。極めて良い均一度に調整するには、空間的に細かい磁場分布まで調整する必要があり、細かい空間分布の調整にはシム片(強磁場中で磁化した鉄片シムを使うことが多い)を大量に使用する。適切に磁場設計がなされていると、製作・組み立て・設置時に発生した誤差磁場成分のみの補正にとどまり、少ないシム量で均一磁場の実現が可能である。しかし、適切に設計されて無い場合、本来設計時に加えておくべき空間的に細かい磁場成分まで、補正することになり、大量のシム片が必要となる。実際的には目標均一度の実現が不可能となる。磁場設計で計画した均一度以上に良い均一度を得ることは事実上、不可能であり、磁場設計では、磁石に良好な均一度を発生できる能力を与える設計が重要である。

ここで、単語「磁場設計」を定義しておく。ここでは、磁気応用機器に必要な磁場分布が与えられ、その磁場を発生する起磁力配置を設計する、と言う意味である。実際的に実現できるという意味で、コイルの電流密度、超伝導導体の経験磁場、シミング可否も考慮する必要がある。さらに、起磁力が小さくして、低コストで製作できる設計が望ましい。このような検討を含んで磁場設計を行う。

### 1.1. 既開発の磁場設計技術

このような、超精密磁場技術について、MRI 磁石用に開発した技術が利用できると考えている。実際に、良好な均一度実現のため、MRI 磁石技術を応用・利用している。一般に、MRI 装置では、既に、J-PARC 実験より数 10 倍の悪い(大きな)均一度であるが、より広い空間で均一磁場

を実現している。筆者は、MRI 装置での均一磁場実現のために、磁場設計技術と設置後の磁場調整技術を開発した[9-15]。この磁場設計には起磁力分布と磁場分布の間の応答行列に対して、最少二乗法を打ち切り特異値分解(TSVD: Truncated Singular Value Decomposition)を用いて解く手法[16-20]を利用している。簡単に、TSVD 正則化(regularization)ということも多い。

この手法は、当初、トカマク装置のプラズマ安定化のため利用していた磁場分布・電流分配を特異値分解(SVD: Singular Value Decomposition)固有モードに分解して制御・調整した方法であった[21-23]。これを、MRI 磁石の設計と調整に応用した。SVD 固有モードの加算数を増加(打ち切り固有モード番号を増加)させることで磁場精度を向上させることが出来る。この利点を利用して磁場設計に応用している。一方、固有モード数が多すぎると、磁場精度は良いが、実現が難しい(高コスト)の起磁力源配置の設計となる場合もある。実例を通して TSVD 利用の磁場設計を紹介し、その上で、g-2/EDM の詳細計測実験で Muon を蓄積する磁場(以後では簡単に Muon 蓄積磁石、MSM: Muon Storage Magnet、とする)の磁気設計と設置後の精密磁場調整(磁場シミング)について説明する。

## 1.2. 磁場設計と正則化

実験装置の磁場分布を求めるには、Biot-Savart の法則や有限要素コードを用いて、与えられた電流や磁気モーメント(MM : Magnetic Moment)分布等の起磁力配置から磁場分布を計算する。しかし、磁気応用機器の設計では、目標とする磁場分布が与えられ、それを実現できるコイルや強磁性体等の起磁力配置を求める。いわゆる逆問題となる。磁気応用機器の設計では必ず解く必要のある問題である[20]。

筆者は、核融合装置の設計や磁気共鳴撮像(MRI: Magnetic Resonance Imaging)装置などの高精度な磁場を必要とする機器で、逆問題を解いてきた。多くは超伝導利用である。電流や磁性体の配置を正確に求める逆問題に加え機器設置後

に計測された誤差磁場の補正磁場を生成する MM 配置を求める逆問題(シミング計算)もある。

また、実験においても、このような逆問題が存在する。先ほど述べたように、核融合分野ではプラズマ位置形状や表面位置を実時間で制御する負帰還(FB: Feedback)制御演算も逆問題である[21-23]。限られた点数の磁場・電流計測データを用いて、プラズマ付近のポロイダル磁場分布を空間連続的に把握(再構成)する磁場計測手法[24-26]も代表的な逆問題として存在する。

このような磁場関連で逆問題を解く方法として、最小二乗法を TSVD により解く手法を、筆者は提案する[9-15]。その方法を本資料でも扱う。この手法は高精度な磁場分布を実現する上で有利な設計手法と考える。

## 1.3. 本資料の内容

本資料の内容は、

- (i) 最小二乗法と TSVD 正則化
  - (ii) TSVD 正則化利用の簡単な具体例
  - (iii) MRI 磁石の均一磁場設計
  - (iv) g-2/EDM 磁石(Muon 蓄積磁石)の磁場設計
- であるが、(iii) (iv)では誤差磁場の補正に必要な磁場シミング手法を代表とする、磁場に関連した誤差を補正する機構についても説明する。また、(iv)では、Muon 入射に必要な磁場を作るコイル群についても、現状の設計を説明する。全て、TSVD 利用した最小二乗法を利用している。

これらの実例や設計状況を通して、磁場設計における逆問題、正則化の必要性、および、特異値分解の利用価値を把握してもらえると、有意義であると考えられる。

余談であるが、参考文献[19]によれば、特異値分解が任意の行列に適用していることは 1939 年[27]に初めて示された。計算機の誕生と同じ時期である。また、この文献[19]には、「システム制御の有効な手法の 1 つとして定着していくであろうと思われる」と書かれているが、磁場設計の分野で、積極的に用いた例は見えない。

## 2. 最小二乗法と正則化

ある磁場分布を持つ磁気応用機器を設計する場合、その磁場を発生する電流分布  $I$  を求め(磁場設計)、それを保持できる構造(耐電磁力、耐電圧、電流密度、冷却など)を設計していく。磁場設計の部分で逆問題を解く。目標磁場分布として、多くの場合、磁場・磁束密度( $\text{Wb}/\text{m}^2$ )分布であるが、ベクトルポテンシャルや磁束( $\text{Wb}$ )分布を考えることもある。多数の磁場評価点(MFEP: Magnetic Field Evaluation Point)上の磁場分布  $B$  (要素  $B_i$  は  $i$  番目 MFEP の磁場)と電流分布  $I$  (要素  $I_j$  は  $j$  番目回路の電流値)の関係は、線形方程式系、

$$B = AI \quad (2-1)$$

で表現できる。電流から磁場への応答行列  $A$  の要素  $A_{ij}[\text{T}/\text{A}]$  は  $i$  番目電流が  $j$  番目 MFEP に作る単位電流あたりの磁場強度であり、Biot-Savart の法則等で算出し、(MFEP 数) $\times$ (電流要素数)の次元を持つ。目標の磁場分布  $B^{\text{TG}}$  を再現する電流配分は  $A$  の逆行列を用いることで把握できる。しかし、一般的には  $A$  は非正則であり、逆問題の多く例で、式(2-1)は不良設定(ill-posed)問題となる。そのため、 $B^{\text{TG}}$  を近似的に再現する電流分布  $I$  を、最小二乗法[17, 20, 28, 29]により算出する。つまり、

$$\|(B^{\text{TG}} - AI)\|^2 = (B^{\text{TG}} - AI)^t(B^{\text{TG}} - AI) \rightarrow \text{最小} \quad (2-2)$$

の電流分布  $I$  の近似解を求める。この解は、 $I$  について微分して、極値を持つ条件から、

$$(A^tA)I = A^tB^{\text{TG}}, \quad (2-3)$$

を解くことで得られる。ここで上添え字  $t$  は転置行列であることを示す。 $(A^tA)$  は正方行列なので、多くの場合、逆行列を算出でき、式(2-3)から下記を得る。

$$I = (A^tA)^{-1}A^tB^{\text{TG}} \quad (2-4)$$

最もよく知られた逆問題解であるが、この解で算出する電流分布に基づいた磁気応用機器の設計・製作は難しい。多くの場合、必要以上の磁場精度を振幅(要素  $I_j$  の最大・最小値の差異)の大

きな  $I$  で発生する解を算出し、過大な起磁力を要求する解が算出される事が多い。このため、式(2-4)の解では、磁場設計・磁気応用機器の設計には使えない。

現実的な解を求めるために、正則化法を使う[20]。代表的な正則化手法として、Tihonov 正則化とここで取り扱う TSVD 正則化がある。後者には次の利点があると考えられる。

- (i) 単位電流(起磁力)あたりの磁場強度(特異値)が大きな(低次)固有モードから選択する。従って、最小の起磁力で必要な磁場を発生する電流分布を選択する機能を TSVD が持っている。
- (ii) 固有モード数と磁場分布の近似精度には明確な関係があり、得られる精度を把握しながら、低次成分で起磁力配置を検討できる。
- (iii) 各 SVD 固有モードと目標磁場分布を比較することで、使用する固有モードから実機で必要とする起磁力配置を把握できる。
- (iv) 分布電流で自由度の多い起磁力配置についても、磁場に対して大きな寄与を持つ起磁力分布をあらかじめ把握・選択し、必要な精度を確保しながら、自由度を減少させて、磁場設計できる。

まとめると、最少の起磁力(i)で、求める磁場分布(iii)と磁場精度(ii)を、選択範囲を狭めて(iv)、議論していくことが出来る。これら利点については、例題と実機設計例で示していくが、上記項目全体に共通していることは、固有モードの選択を通じて把握できることである。

正則化は線形方程式系の逆計算を安定に行う手法であるが、以下では上記特徴を引き出すために、固有モードに注目して、その加算で逆問題を解く。従って、正則化というより、有益な固有モードの抽出とその利用方法についての議論となる。

### 2.1. 正則化による最小二乗解

機器設計に必要な解  $I$  は、妥当な精度で、実現可能な電流分布を与えるものである。これに対して、磁場精度と  $I$  の実現性を取引する手法としての正則化法があり、代表的には、Tihonov 法と

TSVD 法の正則化がある[20]。本資料では、TSVD 法を応用した議論となる。

行列  $\mathbf{A}$  に SVD を適用すると、

$$\mathbf{A} = \sum \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k^t, \quad (2-5)$$

であり[16-19]、磁場分布を表す基底  $\mathbf{u}_k$ 、これと一対一に対応した電流分布の基底  $\mathbf{v}_k$ 、および、相互の換算係数[T/A]と考えることのできる特異値  $\lambda_k$  の組み合わせを、固有モード番号  $k$  について加算した式で表現できる。通常、特異値  $\lambda_k$  の大きさの順に固有モードの番号  $k$  を付ける。これを用いて  $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t$  を求めると、

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t / \lambda_k, \quad (2-6)$$

である。これが  $\mathbf{A}$  の一般逆行列であることは、式(2-5, 2-6)から、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A}$  が成り立つ(つまり、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$  は無作用)ことで確認できる。つまり、SVD 固有モードを用いると、容易に一般逆行列を求めることができる。この結果、 $\mathbf{I}$  を式(2-4)から、

$$\mathbf{I} = \sum_k (\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG}) \mathbf{v}_k / \lambda_k \quad (2-7)$$

で求めて、逆問題を解く。加算は、固有モード番号  $k$  について行い、必要な磁場精度が確保できる固有モード番号  $M_T$  で加算を打ち切り(Truncation)、低次(大きな  $\lambda_k$ )の SVD 固有モードのみ加算に加える。全ての固有モードを加算すると通常の最小二乗解{式(2-4)}である。この場合、高次(小さな  $\lambda_k$ )の固有モードを含めて加算するため、分母に小さな  $\lambda_k$  を持つ項の加算で、解が不安定となり、過大な電流を求めることにつながる。TSVD 正則化は、低次の固有モードを加算し、発生する磁場は些細として高次成分を無視して、妥当な電流で磁場を近似的に再現する。加算する固有モードの選択については、次節で実例を対象にして、議論する。

一方、Tihonov 正則化を使うと、式(2-3)に誤差  $\varepsilon$  を含ませ、

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L}) \mathbf{I} = \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{TG} \quad (2-8)$$

とする。 $\mathbf{L}$  は線形な行列であり、単位行列であれば、上式は、 $\varepsilon$  に応じて電流  $\mathbf{I}$  を小さくする解を

求める。行列  $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})$  は正則となるため、求める電流配分(逆問題解)  $\mathbf{I}$  は、

$$\mathbf{I} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{TG} \quad (2-9)$$

で、解は、SVD 固有モードを用いて示すと、

$$\mathbf{I} = \sum \left\{ \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \varepsilon^2} \right) \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG} \right\} \mathbf{v}_k \quad (2-10)$$

である。ただし、式(2-10)では  $\mathbf{L}$  を単位行列とした。和は、固有モード番号  $k$  について行う。式(2-7)と式(2-10)を比較すると、Tihonov 正則化では、 $\lambda_k = \varepsilon$  となる固有モード番号付近で加算を打ち切り、おおよそ TSVD と同様な解を出力すると理解できる。ただし、通常、Tihonov 正則化では、 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})$  の逆行列を求めて計算を実行すると、固有モードを意識することはない。

式(2-3)と式(2-8)の意味を考えると、磁場  $\mathbf{B}^{TG}$  を再現する時に式(2-3)に  $|\mathbf{L}|$  を小さくする条件を追加したことになる。 $\mathbf{L}$  として単位行列を用いれば、式(2-9)で電流ノルム  $|\mathbf{I}|$  を小さくする条件を加えたことになるが、これは TSVD 正則化も持っている特徴である。単位行列以外の  $\mathbf{L}$  を使うことも可能であり、電流以外のパラメータを小さくする条件を加えることも可能である。しかし、Tihonov 正則化では、打ち切りが緩やかに行われるために、本来必要でない高次(小特異値)成分が解に入り込み、電流を大きくする可能性がある欠点が存在する。筆者の磁場設計では TSVD 正則化を使ってきた理由のひとつがこれである。

## 2.2. 固有モード強度に注目した TSVD 正則化

TSVD 正則化では、一般的に、式(2-7)で、特異値の大きなもの(低次)から加算し、必要な精度が得られる  $M_T$  番目で打ち切るが、式(2-7)を参考にすると、固有モードの寄与は  $(\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG}) / \lambda_k$  で解  $\mathbf{I}$  に反映されることが解る。言い換えると、ill-posed は  $(\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG}) / \lambda_k$  が発散していくような行列  $\mathbf{A}$  を持つ問題と理解できる。この意味で、 $\lambda_k$  が小さいため、わずかな磁場しか発生できなない高次固有モードは不必要であり、加算から除外す

る。これにより安定な解を獲ることが出来る。これを、磁気応用機器の磁場設計に応用してきたが、筆者のTSVD正則化では、加算に選択する条件に、固有モードが有意な磁場分布を持ち、強度を持つことを条件に加えた。つまり、ill-posedの問題による発散を防ぎ、近似解を求めるために、各固有モードで磁場に対して下記のように、実現できる電流で有意な寄与を持つ固有モードのみを選択・加算して目標の磁場を近似的に発生できる起磁力配置を求める。

固有モードの選択のために、式(2-7)を書き直して、

$$I = \sum \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}^{TG} / \lambda_k = \sum_k n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P^{TG}_k / \lambda_k, \quad (2-11)$$

として、下記の固有モード強度、

$$P^{TG}_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}^{TG} / n_p^{1/2} \quad (2-12)$$

で、固有モードを加算する。ここで、 $n_p$ はMFEP数で、 $\mathbf{B}^{TG}$ や $\mathbf{v}_k$ の次元数である。固有モード強度を規格化するために $n_p^{1/2}$ で割っている。再現磁場 $\mathbf{B}^{REC}$ は、電流 $I$ でも計算できるが、MFEP点での磁場は、

$$\mathbf{B}^{REC} = \sum_k n_p^{1/2} P^{TG}_k \mathbf{u}_k \quad (2-13)$$

である。TSVD正則化による逆問題の解法、特に式(2-11)、(2-13)の加算を模式的にFig. 2-1に示す。SVDで、磁場と電流分布の基底と特異値を求め、式(2-12)の $P^{TG}_{ik}$ を図右側の様に求め、左側のように、式(2-11)の加算を実行する。加算する固有モードを多くすると、上部左側のように細かく振動する不安定な解になることが多いが、固有モード数を低次だけで適数にすると、実用性のある解を得る。TSVDで加算する固有モードの選択は、下記の様に考える。

1) 残差磁場 $\mathbf{B}^{RE}$ が目標値 $\epsilon$ 以下となるように加算、

$$\mathbf{B}^{RE} = \mathbf{B}^{TG} - \mathbf{B}^{REC} = \mathbf{B}^{TG} - \sum n_p^{1/2} P^{TG}_k \mathbf{u}_k \quad (2-14)$$

で、加算する固有モード数 $M_T$ を多くすると、残差磁場は小さくなる。下記の振幅(PP: peak-to-peak)が目標値以下となるまで固有モードを加算する。つまり、

$$B^{RE}_{PP} = B^{RE}_{MAX} - B^{RE}_{MIN} < \epsilon \quad (2-15)$$

となる $M_T$ を選ぶ。

- 2) SVD固有モードの磁場分布と強度に注目、式(2-5)で説明したように、磁場基底 $\mathbf{u}_k$ 、電流基底 $\mathbf{v}_k$ および特異値 $\lambda_k$ で $k$ 番目の固有モードを構成する。個々の磁場基底 $\mathbf{u}_k$ が必要であるのかを、(i)  $P^{TG}_k$ が有意な大きさか？ (ii) 目標磁場に必要固有モードか？から判断した上で、加算する。 $\mathbf{u}_k$ はMFEPでの磁場を示しているのみであるが、 $\mathbf{v}_k$ で計算する単位電流分布あたりの磁場分布 $\mathbf{b}(\mathbf{v}_k)$ を固有モードの磁場分布とすると理解しやすい。
- 3) 必要電流強度の実現性、式(2-11)で各電流 $I_j$ が実用的に実現できる範囲である。

以上の条件で打ち切り次数 $M_T$ や加算する固有モードを設定するが。上記の3項目を同時に満たさない場合もある。たとえば磁石の設計であれば、電流配置を考えている領域が不適切、もしくは過大な目標磁場領域の大きさや精度(均一度)等の原因がある。この場合、検討している幾何学的体系や磁場仕様を再検討することになる。

以下では、TSVD正則化による逆問題解法を応用した磁気応用機器の磁場設計例を示すが、電流 $I$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の関係{式(2-1)}からの議論だけでなく、他の組み合わせの場合もある。例えば、磁場 $\mathbf{B}$ ではなく、磁束(ベクトルポテンシャル) $\Phi$ とする場合、起磁力側では、電流 $I$ でなく磁気モーメント分布 $\mathbf{M}$ とする場合、もある。

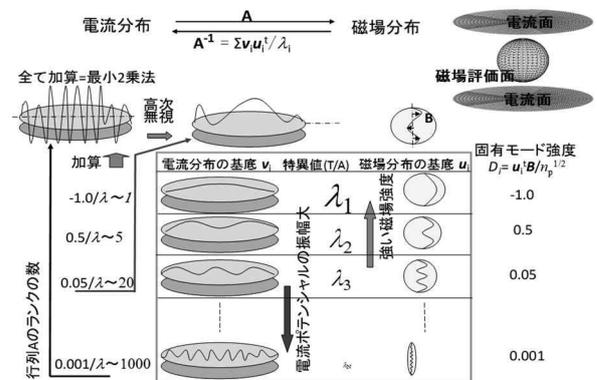


Fig. 2-1. 打ち切り特異値分解正則化を用いた逆問題解法の模式的説明

## 2.3. 目標磁場について

目標磁場  $\mathbf{B}^{\text{TG}}$  は一般的には任意成分の磁場分布が可能であり、次章では、 $B_R$  成分を扱う場合も説明する。また、勾配の存在する磁場を扱う場合もある。しかし、本資料で主に扱う均一磁場の場合、 $\mathbf{B}$  は MFEP の磁場分布を軸方向成分 ( $B_{zi}$ ) で構成する。

MRI では磁場絶対値  $B$  で均一な磁場が必要であるが、起磁力配置検討は軸方向成分  $B_z$  で定式化する。必要な均一磁場が得られた段階では、磁場強度の変動分は通常、主磁場が 0.5T から 3.0T であっても、磁場絶対値の変動は 1 ガウス (3.0T に対して 33.3ppm peak to peak) 以下であり、磁石軸に垂直な磁場成分  $B_{\perp}$  (主に半径方向成分  $B_R$ ) も同程度以下である。そのため、 $B_z$  と  $B$  の差異は  $0.02\mu\text{T}$  以下となり、MRI で必要な均一度の数 ppm (従って  $1\mu\text{T} \sim 10\mu\text{T}$  の磁場振幅) に対して十分小さい。そこで、均一磁場を発生する磁石の磁場設計では  $B_z$  で磁場設計を進めることが出来る。そのため、扱う式が線形となり、これまで話した式を使って設計を進めることが出来る。この考えは、4.6 節で説明するシミング計算 (計測磁場から磁場を補正して均一磁場分布に調整するための磁気モーメント配置  $\mathbf{M}$  を求める計算) でも同じであり、軸方向成分  $B_z$  でシミング計算 (4.6 節) も定式化する。

一方、均一磁場でない場合、例えば、 $B_z$  成分以外も扱う場合とか、一様でない磁場を扱う場合には注意が必要で、特に、Maxwell 方程式と矛盾しない目標磁場となるように注意する必要がある。例題を通して、次章で説明する。

### 2.3.1. 補足/コメント

以下で、記号  $\mathbf{B}^{**}$  (上添え字  $**$  は、MS (計測磁場), TG (目標磁場), REC (再構成磁場), RE (残差磁場) 等) の要素は  $i$  番目磁場評価点に対して  $B_i^{**}$  である。

次章で、具体的な例題を通して、理解の助けとなるよう説明していく。また、本設計手法の中心は、最小二乗法と TSVD 組み合わせて最適な起磁力配置を求める手法である。しかし、以下では、式 (2-6) の SVD 固有モード利用で一般逆行

を求めることが出来る点に中もして、簡単に、TSVD 正則化利用と表現することもある。

それから、余談であるが、'90 年代始めまでは、Internet が十分には利用できず、特異値分解のプログラムも自作せざるを得なかった。筆者も正方行列の固有値・固有ベクトルを求めるプログラムを元に自作した。現在ではより良いプログラムが web 上から入手できる。便利な時代である。使って行くことが出来ると考えます。

### 3. TSVD 正則化を用いる例題

本章では TSVD 正則化により起磁力配置を求める例題を解き、g-2/EDM 磁石の磁場設計に使っている、磁場設計手法の理解を助ける。円環(トーラス)体系の具体例を通して、TSVD 正則化の有用性を理解してもらおう。

#### 3.1. 例題の計算体系

ここでは、打ち切り特異値分解を利用して最小二乗解を求める TSVD 正則化を使って、目標の磁場を生成できる電流分布の磁場設計を、簡単な体系で試みる。円環(トーラス)面上の円電流分布を円環の内部に上方向の一様磁場( $B_z=1.0T$ )を作り電流分布を算出する。直円筒上でなく、円環上なので、三角関数のコイル(サインコイル)の電流分布ではない電流分布である。

計算体系は Fig. 3-1 である。円環(トーラス)体系であり、ポロイダル断面(円環形状の垂直断面)で示す。外側に電流面(CCS: Current Carrying Surface)があり、CCS 上に円電流(X印、 $j=1\sim N_f$ )が多数配置され、その電流値・分布を求める。CCS の内部に磁場評価点(MFEPs, X 印、 $i=1\sim M$ )を持つ磁場評価面が配置されている。図中の  $A_{ij}$  は、 $j$  番目の円電流が、 $i$  番目の磁場評価点に作る磁場であり、応答行列  $\mathbf{A}$  の成分である。評価磁

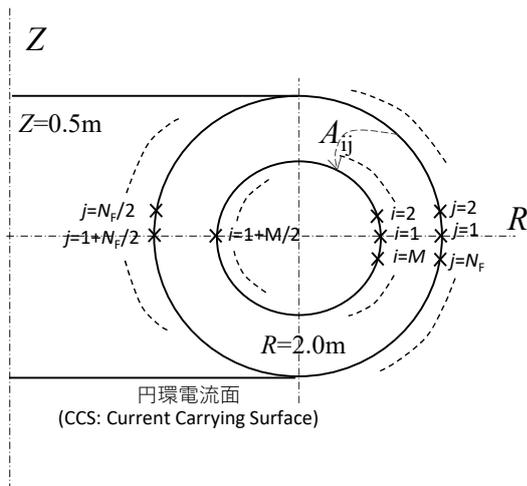


Fig. 3-1. 練習問題の計算体系(ポロイダル断面)。円環(トーラス)面上に周回方向電流を多数配置し、その内側に小半径の小さい円環上に磁場評価点(MFEP)を配置した。

場を、ここでは、 $B_z$  としているが、 $B_R$  等の他成分の場合や、ベクトルポテンシャルの場合もある。また、Fig. 3-1 のような円筒座標の 2D 体系では、周回方向のベクトルポテンシャル成分  $A_\theta$  を  $2\pi R$  倍して、磁場評価点を通る円面を通過する磁束(Wb)を磁場評価の物理量とする場合もある。また、核融合研究の分野では  $RA_\theta$  を磁束関数 [Wb/radian] と呼ぶ場合もある。

この例題では軸方向(Z方向)成分  $B_z(T)$  を評価磁場成分とする。応答行列の成分  $A_{ij}$  を求めるには、線電流が作る磁場を正確に計算する必要がある。ここで、「正確に」とは、0.1ppm の磁場分布を正確に計算できる精度であり、0.01ppm 程度以下の誤差で磁場計算できる必要がある。また、磁場設計に使う以上、高速に計算出来る必要もある。その方法を次に述べる。

#### 3.1.1. 円電流による磁場

例題を解くためには、細い円電流(線電流)が作る磁場を正確に計算する必要がある(Fig. 3-2 参照)。磁場の計算式の基本は Maxwell 方程式であるが、その変形である下記の Biot-Savart 式を利用する。

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3-1)$$

ここで、 $\mathbf{b}$  は磁場ベクトル( $b_R, b_z$ )で、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  は、それぞれ、磁場評価点と電流位置の位置ベクトル、 $\mu_0$  は真空中の透磁率、そして、積分は電流経路に沿って電流値倍で実行される。

磁気応用機器では円形コイルを組み合わせる目標の磁場を発生するように設計されることが多い。製作の面からは、最も作りやすい形状で

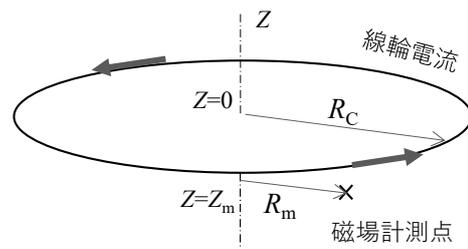


Fig. 3-2. 線輪(細い円)電流

あり、単位線材量あたりの磁場空間が大きな形状であり、応力的には平均化されて耐強磁場に都合が良い、と言える。そこで、円電流による磁場を高速に計算できることは、磁場設計上、重要な項目である。ここで、精度の良い、高速な計算法を紹介する。

線輪電流(太さは無限小で  $Z=0$  面上、半径  $R_c$  の線電流  $I(A)$ )が、半径  $R_m$ 、軸方向位置  $Z_m$  に作る磁場(Fig. 3-2 参照)は、円電流に沿って Biot-Savart 式を積分し、電磁気学の教科書に書かれているように、下式で計算できる。

$$B_Z = \frac{\mu_0 I \sqrt{k}}{4\pi \sqrt{R_c R_m}} \left[ \frac{R_c^2 - R_m^2 - Z_m^2}{(R_c - R_m)^2 + Z_m^2} E(k) + K(k) \right] \quad (3-2)$$

$$B_R = \frac{\mu_0 I Z_m \sqrt{k}}{4\pi R_m \sqrt{R_c R_m}} \left[ \frac{R_c^2 + R_m^2 + Z_m^2}{(R_c - R_m)^2 + Z_m^2} E(k) - K(k) \right] \quad (3-3)$$

ここで、 $E(k)$ 、 $K(k)$  はそれぞれ第 2 種、第 1 種の完全楕円積分であり、それぞれ、

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 \theta} d\theta \quad (3-4)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}} \quad (3-5)$$

$$k = \frac{4R_c R_m}{(R_c + R_m)^2 + Z_m^2} \quad (k=0 \sim 1.0) \quad (3-6)$$

である。式(3-6)の  $k$  は人によっては  $k^2$  と定義する場合もあるので注意する必要がある。このなかで、長い計算時間を要する可能性のある部分は、完全楕円積  $E(k)$ 、 $K(k)$  の計算であるが、良い近似式が提案されており、利用できる。また、式の形から見て、磁場計算の精度は完全楕円積分の計算精度に依存する。つまり、式(3-2, 3-3)の形から見て、 $E(k)$ 、 $K(k)$  の近似精度は、そのまま磁場計算値の精度となる。完全楕円積分値の計算には、式(3-4, 3-5)を数値積分する方法もあるが、この場合、計算時間が長くなり、磁気設計に対して、実用的な適用は難しい。

一方、変数  $(1-k)$  の多項式で近似する方法が提案されている[30, 31]。参考文献[32]には、文献[30]を参考に Chebyshev 近似計算法が解説されており、2次から 10次までの多項式で計算するための係数が記述されている。

参考文献[33]には、4 次の多項式での近似計算で、多項式の係数が示されている。この文献には精度が 4 次の展開式を使う場合で、 $2.0E-8$  (計算誤差/磁場強度)程度と書かれている。MRI 磁石の磁気設計には利用できる精度である。

参考文献[34]には 10 次の多項式について係数が示されている。この文献には精度が  $1.0E-14$  以下が得られると書いている。そこで、文献[34]の係数値を使うことにする。文献[32]にも 10 次の計数值が示されているが、数値が若干異なる。試し計算を行ったところ[32]の数値で、10 次では良い精度は得られなかった(利用は控えた方が良い)が、9 次では良い精度の計算が出来るようだ。

筆者は、これまで、これは核融合装置や MRI 用磁石の設計のために、4 次の多項式近似を使い、計算誤差を  $B^{\text{err}}/B^0 \approx 2E-8$  (0.02ppm)程度であると考えてきた。しかし、J-PARC で準備が進められている実験(MuSEUM 及び g-2/EDM 計測)で必要な均一度 0.1ppm 精度(3T に対して  $\pm 3E-7T$  以内)での設計には余裕のない計算精度となった。そこで、現在は、精度の改善のため完全楕円積分

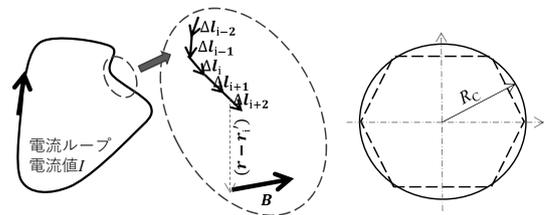


Fig. 3-3(a) 曲線の線分割

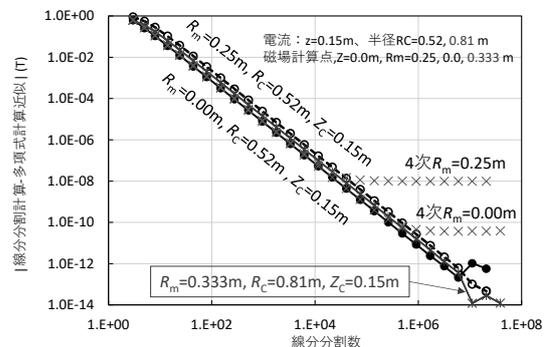


Fig. 3-3(b) 磁場計算精度の確認。完全楕円積分に近似式を使った解析式による値と線文分割による計算値の比較。

の計算精度を、(1-k)の 10 次までの多項式を用いて、十分な精度の磁場設計を行っている。

式(3-2~3-6)による磁場計算精度を確認するため、式(3-1)を周回数値積分して求めた値と比較する。文献[34]によれば、1.0E-14 の精度が期待できる。比較は、式(3-2),(3-3)で計算した値と、式(3-1)を使い、Fig. 3-3(a)のような線分の集合で円電流を表現した場合で、軸方向磁場  $B_z$  を比較した。結果は Fig. 3-3(b) であり、横軸は線分分割数、縦軸は 2 つの計算値の差異の絶対値である。分割数を増やすと線分分割法の磁場計算精度が良くなり、式(3-2)を 10 次の近似式による計算値とよく一致してくる。しかし、600 万分割を超えると、単調な減少は無くなる。これは、両者の計算値が一致しなくなっていることの反映であるが、10 次式の場合、少なくとも、1.0E-12 の計算精度は確保されていると判断できる。

しかし、この分割数では、一個の円電流の作る磁場の一点の計算時間が 10 秒以上になり、数百個の円電流が数千点の位置で、磁場計算する磁場設計では多大な計算時間を要する。実際には、使用できない。この計算時間の問題は式(3-2), (3-3)を完全楕円積分  $E(k)$ ,  $K(k)$ の近似計算法と併せて使うことで、大きく緩和される。

電流は電流方向に平行なベクトルポテンシャルを発生するが、円電流の場合には周回方向のベクトルポテンシャル成分  $A_\theta$  のみが存在し、

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I \sqrt{R_c}}{\pi \sqrt{k R_m}} \left[ \left(1 - \frac{k}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (3-7)$$

である。このベクトルポテンシャル値も 1.0E-12 以下の誤差で計算できる。この式は、 $R$ - $Z$  座標で磁束等高線を書く場合(磁束は  $2\pi R_m A_\theta$ )、円形コイルのインダクタンスの算出に利用できる。

### 3.2. 電流-磁場の応答行列と特異値分解

電流と磁場評価点を、Fig. 3-4(a)に示した。この計算体系に、軸方向磁場  $B_z$  を算出する式(3-2)、および、半径方向磁場  $B_R$  を算出する式(3-3)、を使って、応答行列  $\mathbf{A}$  を求める。そして、行列に特異値分解を適用し、固有分布がどのような分布であるかを把握する。

式(3-2), (3-3)で、 $R_m=R_{mi}$  とし、式中の  $Z_m$  を  $Z_m=Z_{mi}-Z_{cj}$ , そして、電流  $I$  を 1.0A の単位電流とすれば、

$$A_{ij}^Z = \frac{\mu_0 \sqrt{k}}{4\pi \sqrt{R_c R_{mi}}} \left[ \frac{R_{cj}^2 - R_{mi}^2 - Z_m^2}{(R_{cj} - R_{mi})^2 + Z_m^2} E(k) + K(k) \right] \quad (3-8)$$

もしくは、

$$A_{ij}^R = \frac{\mu_0 Z_m \sqrt{k}}{4\pi R_{mi} \sqrt{R_c R_{mi}}} \left[ \frac{R_{cj}^2 + R_{mi}^2 + Z_m^2}{(R_{cj} - R_{mi})^2 + Z_m^2} E(k) - K(k) \right] \quad (3-9)$$

が応答行列の要素で、単位電流当たりの磁場の  $Z$  ( $R$ )方向成分である。また、

$$A_{ij} = \cos(\theta) A_{ij}^R + \sin(\theta) A_{ij}^Z \quad (3-10)$$

として、磁場のトーラス小半径方向成分  $B_r$  を評価することも可能である。ここで、 $k$  は式(3-6)で計算するが、 $j$  番目電流位置と  $i$  番目磁場計算位置に対応して実行される。式(3-8)は  $B_z$  磁場に注目した応答行列に関するものであるが、 $B_R$  {式(3-9)}、または、ベクトルポテンシャル  $A_\theta$  に注目して構成する場合もある。 $A_\theta$  の場合は、

$$A_{ij} = \frac{\mu_0 \sqrt{R_{cj}}}{\pi \sqrt{k R_{mi}}} \left[ \left(1 - \frac{k}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (3-11)$$

$$k = \frac{4R_{cj}R_{mi}}{(R_{cj}+R_{mi})^2 + Z_{mi}^2} \quad (k=0 \sim 1.0) \quad (3-12)$$

である。

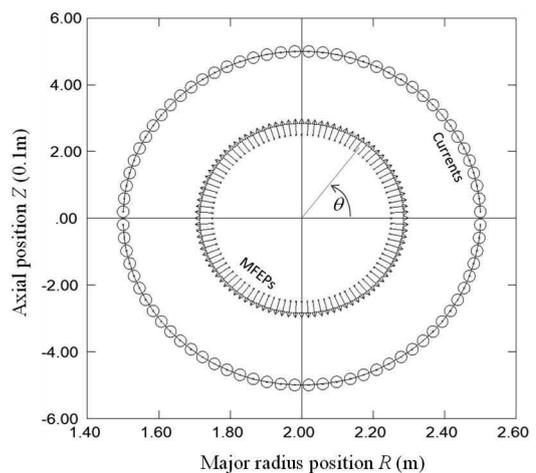


Fig. 3-4(a) 固有モード計算体系のポロイダル断面。断面中心の主半径は 2.0m, 小半径 25cm の円環上に磁場評価点を配置、矢印(小半径)方向磁場を評価する。○は電流位置。

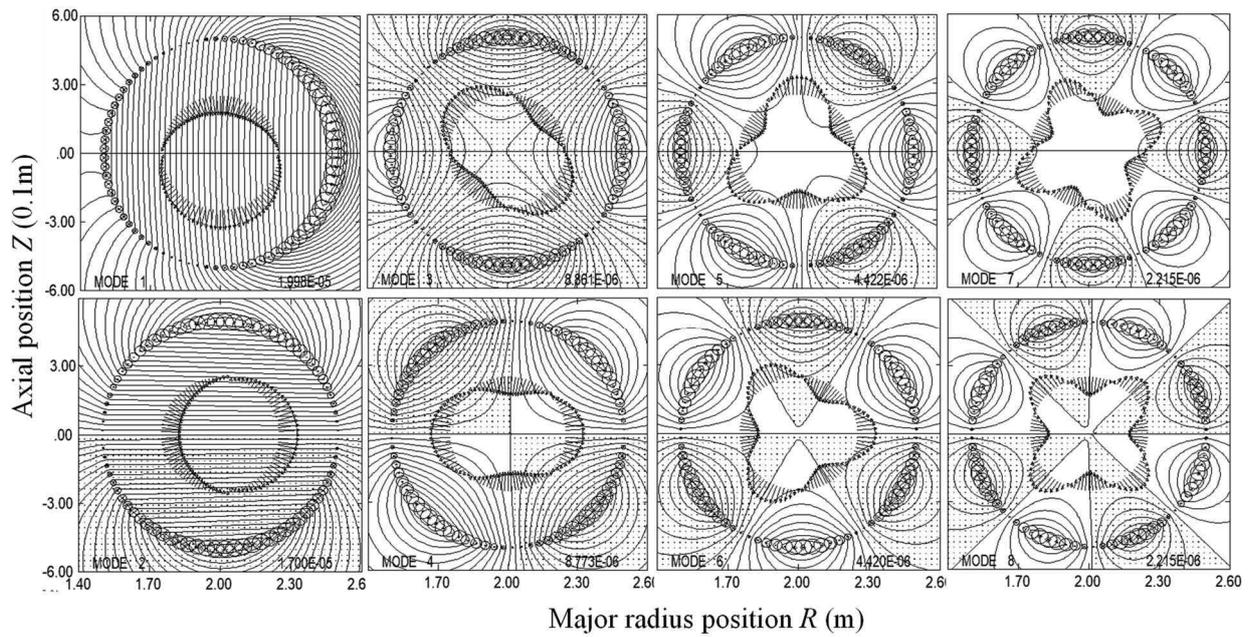


Fig. 3-4(b) 線輪電流-小半径方向磁場の行列による SVD 固有分布。主半径 2.0m を中心としたポロイダル断面上で示す。左下に固有モード番号、右下に特異値を示す。小半径 0.5m 上の○は半径に比例した電流であり、⊗は負電流を示す。小半径 0.25m 円環面上の矢印は磁場の方向を示す。等高線は電流の SVD 固有分布  $\mathbf{v}_k$  から計算された等磁束線(磁力線)であり、打点領域で磁束は負である。

特異値分解は  $\mathbf{A}$  を式(2-5)のように展開すると、固有磁場分布  $\mathbf{u}_k$  と固有電流分布  $\mathbf{v}_k$  を得る。それぞれ、磁場分布と電流分布の基底であり、磁場分布・電流分布は、それらの固有分布の組み合わせで表現できる。まず、この基底を調べ

ておく。Fig.3-1 の幾何学的体系、Fig.3-4(a)は計算体系で、求めた磁場及び電流の固有分布が Fig.3-4(b)である。Fig.3-4(a)で、○の中心に円電流を想定し、矢印の始点に磁場評価点を想定し

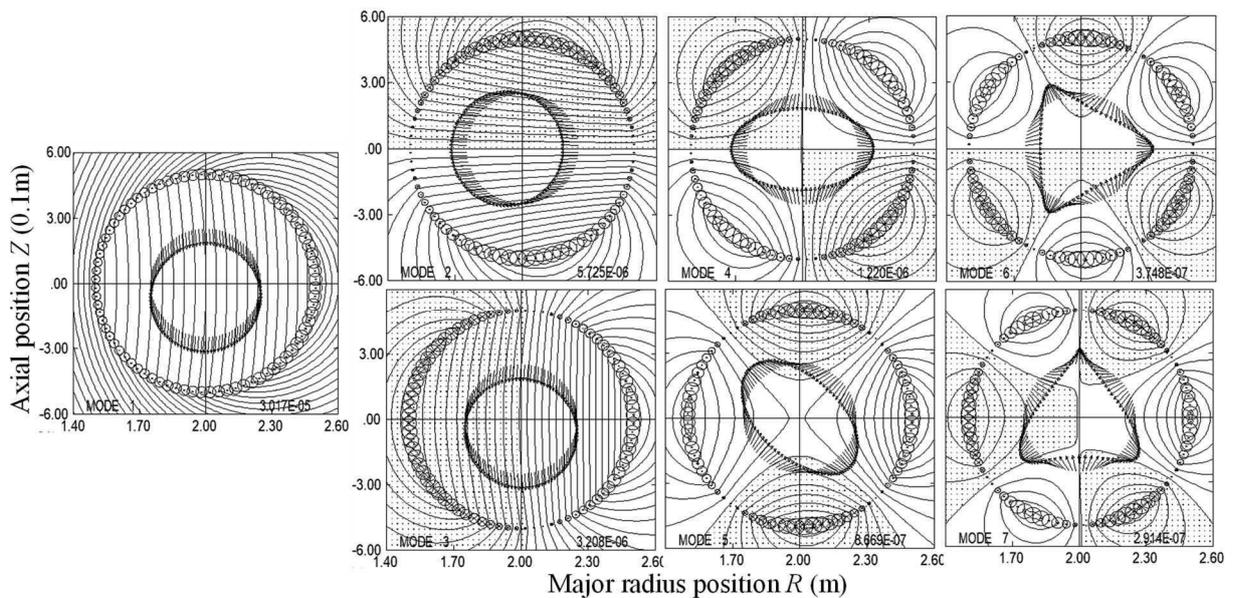


Fig. 3-5 線輪電流-ベクトルポテンシャル周回方向成分の行列による SVD 固有分布。

ている。評価磁場は(3-10)を用いて、Fig.3-4(a)の矢印方向の磁場を評価する。

この計算体系で求めた固有分布を Fig.3-4(b)に低次から 8 個示した。主半径 2.0m を中心にポロイダル断面上で示している。線輪電流-磁場(小半径方向成分)についての固有分布である。

順番は特異値の大きさ順である。言い換えると、少ない電流で大きな磁場強度を出せる 8 個の固有分布{磁場  $\mathbf{u}_k$ (矢印および等高線)、および、電流  $\mathbf{v}_k$ (○印)}を示している。互いに直交し、それぞれの分布に対して基底を作っている。求める磁場分布およびその磁場分布を発生できる電流分布は、これらの固有分布の加算で構成でき、加算は式(2-11~13)で行われる。

線輪電流-ベクトルポテンシャル周回方向成分  $A_\theta$  の行列{式(3-7)}を特異値分解する場合もある。この場合、Fig.3-5 に示した固有分布である。ポロイダル断面中心( $R=2.0\text{m}$ ,  $Z=0.0\text{m}$ )では、1 番目の固有モードは正味の周回方向磁場成分  $A_\theta$  を持つが、2 番目以降の固有モードでは  $A_\theta(2.0, 0.0)=0$  である。磁場分布に対して有意なものは、2 番目以降の固有モードであるが、Fig.3-4(b)と似た分布が並んでいることが解る。2D 位置( $R, Z$ )でのベクトルポテンシャルを  $A_\theta = A_\theta(R, Z)$  とすると、2D 体系では( $R, Z$ )位置の円面を通過する面の磁束  $\Phi(R, Z)$ は、

$$\Phi(R, Z) = 2\pi R A_\theta(R, Z) \text{ [Wb]} \quad (3-13)$$

である。1 番目以外の固有モードは、ポロイダル断面中心の磁束は零であるが、線輪電流-磁場で求めた固有モードの電流・磁場分布とよく似た分布である。このため、こちらの固有モードを用いても目標の磁場分布を構成できると考えられる。

### 3.3. 磁場・電流分布の再構成

ここでは、式(2-11)~(2-13)と前節(3.2 節)の SVD 結果を用いて目標磁場を再現する電流分布を算出する例を示していく。Fig. 3-6 には、固有モード番号の関数で、特異値と固有モード強度{式(2-12)}、それに打ち切り固有モード番号  $M_T$  で、残差磁場  $B^{\text{RE}}$ {式(2-14)}の peak-to-peak 値  $B_{\text{pp}}^{\text{RE}}$  を示して

いる。目標磁場は半径 25cm の円断面上(ポロイダル断面)で、1.0T の軸方向(紙面上方向)磁場としている。加算数( $M_T$ )を増やすと残差磁場  $B_{\text{pp}}^{\text{RE}}$  が減少し、精度良く目標磁場を再現する起磁力配置(電流分布)が求まることを示している。

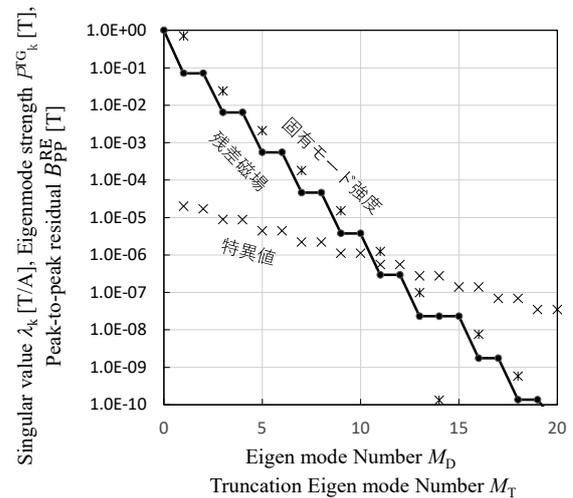


Fig. 3-6 特異値  $\lambda_k$ 、固有モード強度  $P^G_k$  と残差磁場  $B_{\text{pp}}^{\text{RE}}$  をそれぞれ、固有モード番号  $M_D$  と打ち切り固有モード番号  $M_T$  で示す。

高次(小特異値、大番号：番号は特異値の降順に番号付け)では、特異値の減少以上に固有モード強度が小さくなることを解るが、この場合、式(2-11)の加算で、固有モード毎の電流分布  $n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P^G_k / \lambda_k$  が高次(大  $k$  番号)では、減衰している。電流分布は収束していくことを示しており、性質の良い問題(well-posed problem、良設定問題)であると言える。

幾何学的な体系に依存して、高次モードの電流が増加していく問題もある。このような性質の悪い問題(ill-posed problem、不良設定問題)では、必要な磁場精度に応じて、 $M_T$  を小さめで加算を打ち切り、工学的に実現可能な電流分布とするか、もしくは、幾何学的体系や目標磁場を再考することが必要である。このような問題の例については本節の後半で示す。

Fig. 3-7 は以上の議論を背景に、Fig.3-4(b)の固有モードと式(2-11)の電流分布計算で、目標磁場  $B_z=1.0 \text{ T}$  を磁場評価点(MFEPs)で実現しようとする電流分布と磁場強度分布を示している。磁場

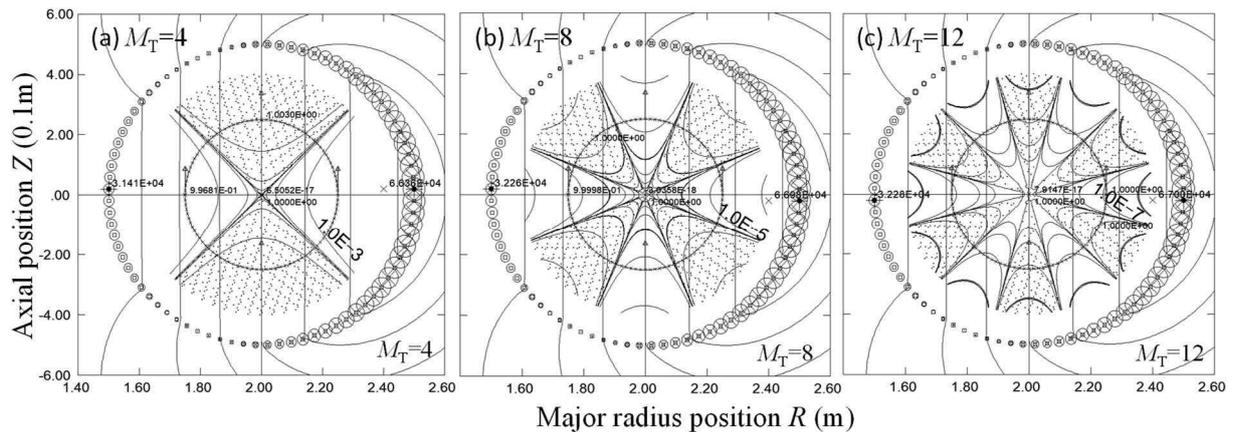


Fig. 3-7. ポロイダル断面の大半径 2.0m, 小半径 25cm 円断面を持つ円環面上で一様磁場 1.0T を発生するように構成した電流分布(○および⊗:互いに電流方向が逆)とその電流分布による磁場分布。放射状模様の等高線は残差磁場強度分布で、中心磁場から  $\pm 1\text{nT}(1.0\text{E}-9) \sim \pm 1\text{mT}(1.0\text{E}-3)$  の一桁毎に示す。電流で囲まれた円環内で上下の等高線は周回方向のベクトルポテンシャルで  $4.0\text{E}-3 \text{ Tm/線}$ 。

分布は等高線で書いているが、縦方向に走っている等高線は周回方向ベクトルポテンシャル  $A_\theta$  で、 $4.0\text{E}-3\text{Tm}$  毎にプロットしている。この等高線は磁力線でもある。上下方向に一樣に走っており、目標通り、軸方向磁場  $B_z$  が発生できていることが解る。

放射状に模様のある等高線は、磁場強度とポロイダル断面中心( $R=2.0\text{m}$   $Z=0.0\text{m}$ )の磁場強度の差異を、 $\pm 1.0\text{E}-3$  から  $\pm 1.0\text{E}-9 \text{ T}$  で、一桁毎にプロットしている。やや太い等高線は  $1.0\text{E}-6 \text{ T}$  ( $1.0\text{ppm}$ )に相当する。磁場評価点付近を通過する代表的投稿繊維は数字を記入した。

(a)、(b)、(c)では、それぞれ、 $M_T=4, 8, 12$  である。式(2-11)で加算する固有モード数を増加させることで、構成された磁場分布の精度が向上することが解る。これは、Fig. 3-6 と矛盾しない。ポロイダル断面中心から半径 25cm の円断面内で  $\pm 0.1\text{ppm}$  程度以内で均一な磁場を発生しようとする場合、 $M_T=12$  とすれば、実際に、Fig. 3-7(c)のように  $\pm 0.1\text{ppm}$  ( $\pm 1.0\text{E}-7 \text{ T}$  の等高線)以内に磁場強度振幅に収まる一樣磁場が得られる。

一方、Fig. 3-5 のベクトルポテンシャル周回方向成分  $A_\theta$  に関する固有モードを利用することも可能である。磁場  $B_z$  は周回方向ベクトルポテンシャル  $A_\theta$  から、

$$B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial R A_\theta}{\partial R} \quad (3-14)$$

であるので、 $B_z=1.0 \text{ T}$  をつくるには、

$$A_\theta = R/2.0 + \text{Const}/R \quad (3-15)$$

が目標分布となる。Const は任意の常数であり、いくつであっても磁場分布に影響が無いが、小半径中心(ここでは  $R=2.0\text{m}$ )での式(3-15)値は、 $1.0 + \text{Const}/2$  であり、半径 2m の円面を通過する磁束が、 $2\pi R A_\theta$  で有ることを考えると、磁場分布には影響を与えないが、磁束や磁気エネルギー、また、線輪電流値には影響を与える量であると予想できる。

Fig. 3-7 の  $R=2.0\text{m}$  では、 $A_\theta=0.57167 \text{ Tm}$  であったので、これを再現するように、 $\text{Const} = -0.85666$  とし、Fig. 3-7(b)と同じ磁場再現精度を求めて、 $M_T=9$  とした場合を、Fig. 3-8(a)に示した。両者は同様の磁場分布となっていることが解る。つまり、 $A_\theta$  に注目した目標磁場を利用することも可能であることが解る。ただし、Fig. 3-8(a)では、ポロイダル断面で、 $A_\theta=0.57167 \text{ Tm}$  としたが、この値は、式(3-15)の Const を変更することで、任意に変更が可能である。

Fig. 3-8(b)と(c)には  $A_\theta(0)$  を  $\pm 0.15\text{Tm}$  (Const は  $\pm 0.3$ ) 変更した場合を示した。等高線で示した磁場分布に大きな変化はなく、同じ磁場分布を、異なった  $A_\theta(0)$  値で実現できている。しかし、 $A_\theta(0)$  値を変更するために電流値は、特に、負側(大半径の小側)の電流、変化している。 $I$  のノルム、

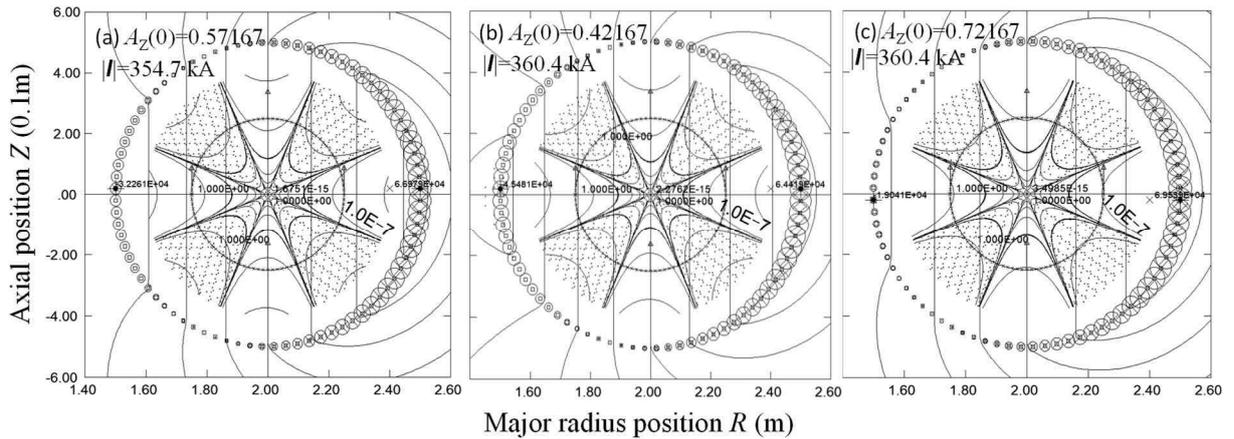


Fig. 3-8. 周回方向ベクトルポテンシャルによる SVD 固有モード 9 個と中心  $A_0$  を調整して求めた磁場分布。Fig. 3-7 で  $M_T=8$  の場合と同様の磁場分布、電流分布が得られる。

$$|I| = \sqrt{\sum I_i^2} \quad (3-16)$$

で比較(各棒上部の  $|I|$ )すると、磁場で評価した場合と同じ条件の(a)で、 $|I|$ が小さくなっていることが解る。

一般に、特異値分解の固有モードは、特異値  $\lambda_k$  の大きなものから利用する。磁場設計に応用する場合に、特異値  $\lambda_k$  は単位電流あたりの磁場強度と理解できる。TSVD 正則化では、大きなモードから必要数だけ選択、必要強度を考慮して、加算する。このため、少ない電流で必要な磁場を生成できるように電流値を決めていると理解できる。この点にも、TSVD 正則化の利点がある。

### 3.4. 目標磁場と Maxwell 方程式

#### 3.4.1. 目標磁場を $B_R$ とする場合

目標磁場には任意の  $B^{TG}$  分布が有り得るが、Maxwell 方程式と矛盾する事が無いようにしておく必要がある。極端な例で有るが、Fig. 3-4(a)の体系で、目標磁場として半径方向の一様磁場、

$$B_R^{TG} = 1.0 \text{ [T]} \quad (3-17)$$

を生成しようとする場合を試みる。一様  $B_R$  としたので、 $B_z=0.0$  である。前項までの例題は、目標の磁場分布が確実に発生できる、「性質の良い」問題であったが、実際の磁石磁気設計では、幾何学的な配置から「性質の悪い」場合も多いが、

式(3-17)は、間違った問題設定である。  $\text{div} \mathbf{B}=0$  であるため、円筒体系では、

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R B_R}{\partial R} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3-18)$$

であり、明らかに、式(3-17)は正しくない。この場合の残差磁場  $B_{pp}^{RE}$  と打ち切り固有モード番号  $M_T$  の関係を、特異値  $\lambda_k$ 、固有モード強度  $P_k^{TG}$  と共に示す。当然で有るが、このような物理的に正しくない(maxwell 方程式と矛盾)目標磁場を与えた場合、 $M_T$  を大きくしても、 $B_{pp}^{RE}$  は減少しない (Fig. 3-9 参照)。

次に、Maxwell 方程式と矛盾しない目標磁場、

$$B_R^{TG} = R/2.0 \text{ [T]} \quad (3-19)$$

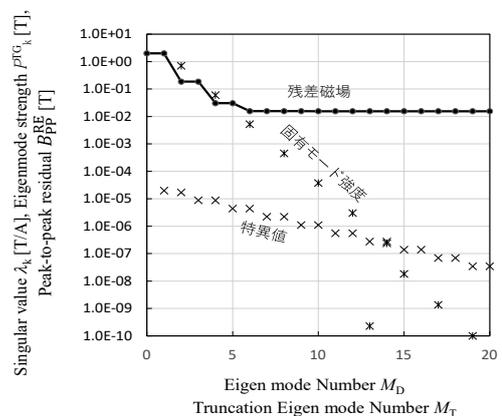


Fig. 3-9. 目標磁場  $B_R^{TG} = 1.0$  として、特異値  $\lambda_k$ 、固有モード強度  $P_k^{TG}$  と残差磁場  $B_{pp}^{RE}$  を固有モード番号  $M_D$  と打ち切り固有モード番号  $M_T$  の関数で示す。

$$B_Z^{TG} = -Z \quad [T] \quad (3-20)$$

を試みる。この目標磁場はカプス磁場である。ポロイダル断面中心( $R=2.0\text{m}$ ,  $Z=0.0$ )で  $B_R=1.0\text{T}$  としている。これは、

$$A_\theta = -RZ/2.0 \quad (3-21)$$

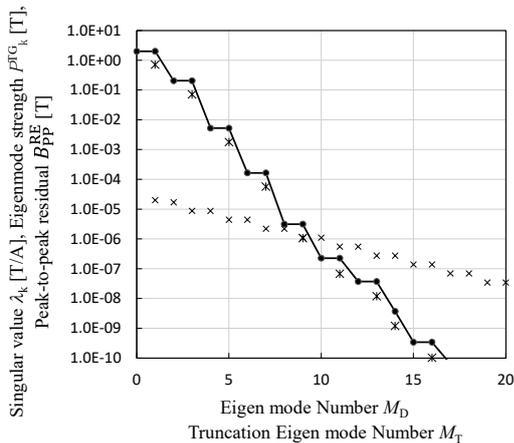


Fig. 3-10 目標磁場  $B_R=R/2.0$ ,  $B_Z=-Z$  とし、特異値  $\lambda_k$ 、固有モード強度  $P_k^{TG}$  と残差磁場  $B_{pp}^{RE}$  を、固有モード番号  $M_D$  と打ち切り固有モード番号  $M_T$  の関数で示す。

とし、 $B_Z=(1/R)(\partial R A_\theta / \partial R)$  および  $B_R=-\partial A_\theta / \partial Z$  から決めているとも言える。この目標磁場で、 $M_T$  と残差  $B_{pp}^{RE}$  の関係を、特異値  $\lambda_k$ 、固有モード強度

$P_k^{TG}$  と共に、Fig. 3-10 に示した。この目標磁場では、残差が、使用する固有モード数の増加(大  $M_T$ )と共に、小さくなり、磁場分布の再構成が精度良く可能であると解る。

Fig. 3-4(b)には再構成した磁場分布を示す。Fig.3-5 の固有モードと式(2-11)の電流分布計算で、目標磁場を磁場評価点(MFEPs)で、式(3-19)と式(3-20)を纏めて式(3-10)の磁場を実現しようとしたTSVD計算で得られた電流分布と磁場強度分布を示している。磁場分布は等高線で書いているが、横方向に走っている等高線は周回方向ベクトルポテンシャル  $A_\theta$  で、 $0.01\text{Tm}$  毎にプロットしている。この等高線は磁力線でもある。放射状に模様のある等高線は、残差磁場を  $\pm 1.0\text{E}-3 \sim \pm 1.0\text{E}-9 \text{ T}$  で、一桁毎にプロットしている。やや太い等高線は  $1.0\text{E}-6 \text{ T}$  ( $1.0\text{ppm}$ )に相当する。打ち切り固有モード番号  $M_T$  は、(a)、(b)、(c)で、それぞれ、4, 8, 12である。式(2-11)で加算する固有モード数を増加させることで、構成された磁場分布の精度が向上することが解る。これは、Fig. 3-10 と矛盾しない。このような、 $B_R$  に注目した磁場を再構成する場合でも、前項の  $B_Z$  に注目した場合と同様に、 $M_T$  の増加と共に、再構成磁場を目標磁場に、より近づける電流分布が得られたことが解る。

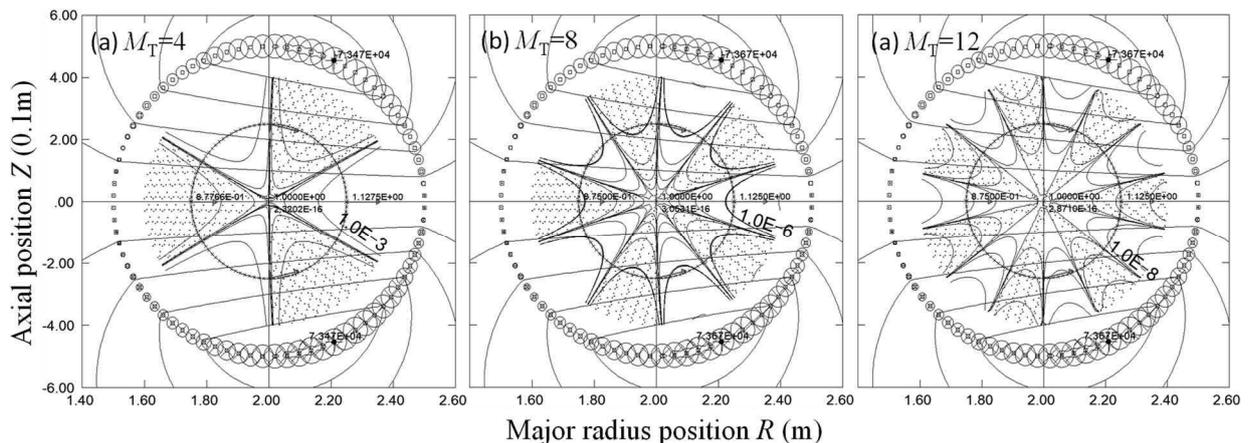


Fig. 3-11. 目標磁場を  $B_R=R/2.0$ ,  $B_Z=-Z$  とした場合の磁場再構成結果。ポロイダル断面の大半径  $2.0\text{m}$ , 小半径  $25\text{cm}$  円断面を持つ円環面上で、目標磁場を  $B_R=R/2.0$ ,  $B_Z=-Z$  として構成した電流分布 (○および⊗:互いに電流方向が逆)とその電流分布による磁場分布。放射状の模様を持つ等高線は残差磁場強度分布を中心磁場から  $\pm 1\text{nT}(1.0\text{E}-9) \sim \pm 1\text{mT}(1.0\text{E}-3)$  の差異を持つ位置を、一桁毎の差異で示している。  $1.0\text{E}-6 \text{ T}$  で太線とした。電流で囲まれた円環内で左右に走っている等高線は周回方向のベクトルポテンシャルで  $0.01 \text{ T}$  毎にプロットし、磁力線の方角を示している。

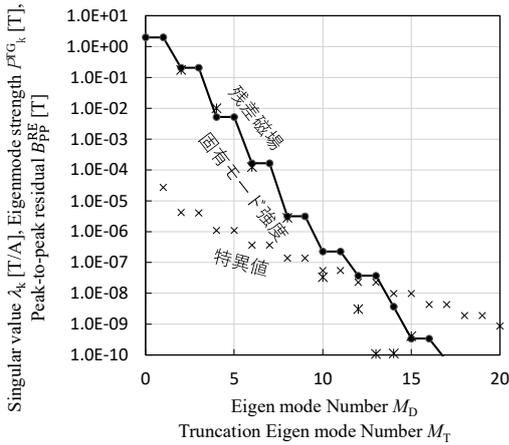


Fig. 3-12(a). 目標磁場を $A_0=RZ/2.0$ とした場合の、特異値 $\lambda_k$ 、固有モード強度 $P_k^{IG}$ と残差磁場 $B_{pp}^{RE}$ を、固有モード番号 $M_D$ と打ち切り固有モード番号 $M_T$ で示す。

### 3.4.2. 目標磁場にベクトルポテンシャル利用

前項同様に $B_R$ に注目した場合でもベクトルポテンシャルで起磁力配置が同程度の精度で求まることを次に示しておく。目標とするベクトルポテンシャルは周回方向成分で式(3-21)である。Fig. 3-5 の SVD 固有モードを利用すると、Fig. 3-12(a)が得られ、Fig. 3-10 と同様に、この目標磁場で使用する固有モード数の増加(大 $M_T$ )と共に、

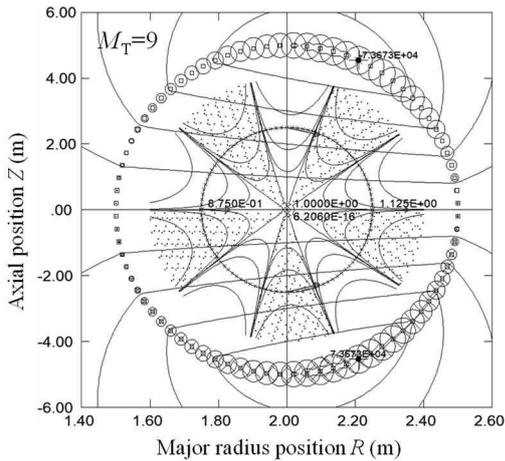


Fig. 3-12(b) 目標磁場を $A_0=-RZ/2.0$ とした場合の磁場再構成結果。左右に走る線は磁力線(等 $A_0$ 線)、放射パターンの等高線は、 $A_0$ の残差で、円環断面中心から $\pm 1.0E-07$ ,  $\pm 1.0E-8$ ,  $\pm 1.0E-9$ (Tm)の残差でプロット。

残差 $B_{pp}^{RE}$ が小さくなり、式(3-21)の磁場を再現する電流分布が精度良く求まることが解る。求めた電流分布で計算した磁場分布を、 $M_T=9$  の場合について、Fig. 3-12(b)に示す。これは、Fig. 3-11(b)と同じ条件での磁場分布再構成結果である。Fig. 3-12(b)で $M_T=9$ とした理由は、ベクトルポテンシャルによるSVD固有モードの場合、Fig. 3-5 の様に、1 番目固有モードが磁場分布には寄与しないためである。実際に使用した SVD 固有モード数は 8 個であり、式(3-19), (3-20)で磁場に対して目標を与えた場合と同様な電流配置と磁場分布の再構成結果が得られることが解る。ただし、Fig. 3-12(b)では目標磁場が $A_0 = -RZ/2.0$ であったので、放射状に描いている残差は、 $A_0$ の残差であり、分布形は似ているが、値は異なることをコメントしておく。

### 3.4.3. 目標磁場に勾配のある $B_Z$ 分布

次に、 $B_Z$ 分布に勾配(傾斜: MRI 分野では傾斜磁場)を持たせる場合を考える。つまり、赤道面( $Z=0.0m$ )上の $R=2.0m$ 付近で、

$$B_Z(R) = 1.0 + Const(R - 2.0) \text{ [T]}, \quad (3-22)$$

のように、磁場に勾配、

$$\frac{\partial B_Z}{\partial R} = Const \text{ [T/m]} \quad (3-23)$$

がある。この場合、赤道面( $Z=0$ )面以外では、 $B_R$ 成分があり、 $\text{rot} \mathbf{B} = 0$  から、 $\frac{\partial B_R}{\partial Z} = \frac{\partial B_Z}{\partial R}$ であり、

$$B_R^{TG} = \frac{\partial B_Z}{\partial R} Z \quad (3-24)$$

で、 $Z$ 位置に比例する $B_R$ 成分がある。また、この $B_R$ と共に $\text{div} \mathbf{B} = 0$ であるため、円筒座標で、 $\frac{1}{R} \frac{\partial R B_R}{\partial R} + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0$ である事が必要

で、 $Z=0$ 面以外では、

$$\begin{aligned} \Delta B_Z^{TG} &= - \int \frac{1}{R} \frac{\partial R B_R}{\partial R} dZ = - \int \frac{1}{R} \frac{\partial B_Z}{\partial R} Z dZ \\ &= \frac{-1}{R} \frac{\partial B_Z}{\partial R} \frac{Z^2}{2} \end{aligned} \quad (3-25)$$

を目標磁場に加える事が必要である。

半径方向に勾配を持つ軸方向磁場 $B_Z(R)$ は、

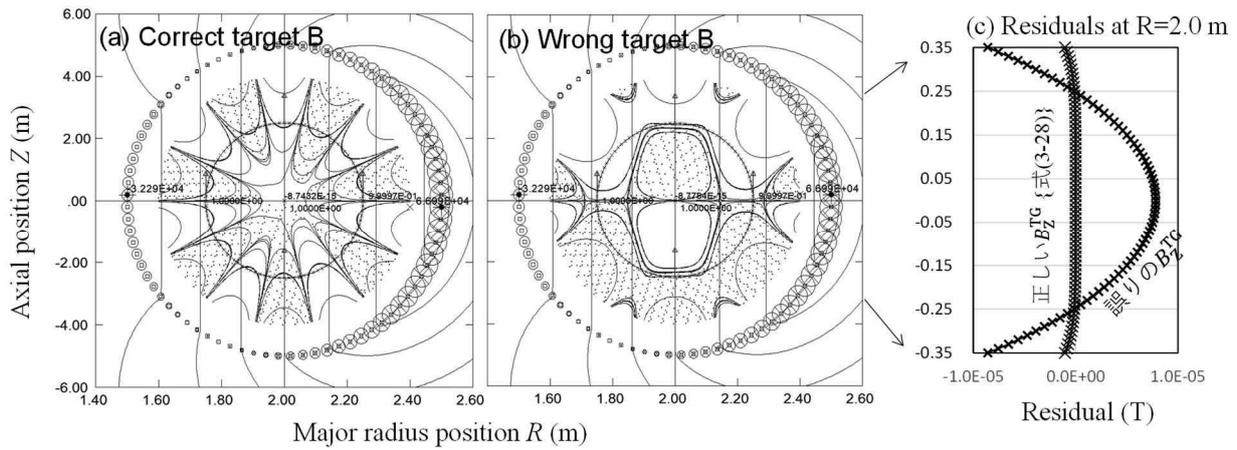


Fig. 3-13. 勾配磁場に対する再構成磁場と残差磁場。(a) 正しく式(3-28)を目標磁場とした場合。(b) 式(3-28)の $Z^2$ に比例する項を加えず間違った目標磁場とした場合。磁場評価面でのみ目標磁場に近い再構成磁場となった。(c)  $B_z$ 成分残差磁場( $B_z^{\text{RE}} = B_z^{\text{TG}} - B_z^{\text{REC}}$ )。

$$B_z(R) \propto R^{n\text{-index}}, \quad (3-26)$$

のように半径の  $n$ -index 乗で表現される場合、

$$n\text{-index} = -\frac{R_0}{B_{z0}} \frac{\partial B_z}{\partial R} \quad (3-27)$$

であり、目標磁場は( $R=2.0\text{m}$ ,  $Z=0.0\text{m}$ )の近傍で、

$$B_R^{\text{TG}} = -\frac{B_{z0}}{R_0} Z(n\text{-index}) \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} B_z^{\text{TG}} &= 1.0 + \frac{\partial B_z}{\partial R}(R-2.0) - \frac{\partial B_z}{R_0} \frac{Z^2}{2} \\ &= 1.0 + (n\text{-index}) \left\{ \left(-\frac{B_{z0}}{R_0}\right) (R-2.0) + \frac{B_{z0}}{R_0^2} \frac{Z^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3-29)$$

である。ここで、 $R_0$ と $B_{z0}$ は基準となる半径位置(ここでは $R_0=2.0\text{m}$ )とその位置での軸方向磁場 $B_z$ である。

Fig. 3-13に、磁場分布の再構成結果を示す。(a)が正しい目標磁場{式(3-29)}の場合で、(b)は式(3-22)のみを $Z=0$ 面以外でも使用して、式(3-29)の $Z^2$ に比例する項を無視した誤目標磁場の場合である。上下に走っている $A_\theta$ の等高線は両者で同じように見える。磁場の差異を細かく見る。等高線(放射状の等高線)は、残差絶対値が $1\text{nT} \sim 1\text{mT}$ で一桁毎の等高線で示しているが、その模様は異なっている。

基準半径の $R=2.0\text{m}$ 上で、上下方向 $Z=-0.35 \sim +0.35\text{m}$ で、式(3-29)の磁場と再構成磁場の差異( $B_z^{\text{TG}} - B_z^{\text{REC}}$ )を(c)にプロットしている。磁場評価

点(MFEP)は $Z=\pm 0.25\text{m}$ の位置に存在する。間違った目標磁場ではMFEP位置以外では残差が大きくなっていることが解る。つまり、Maxwell方程式に矛盾する磁場を目標磁場とした場合、たとえば、磁場評価(MFEP)点で精度良い磁場を再現していても、利用する磁場空間全体では一致していない可能性もある。範囲を広げて磁場分布を確認することを勧める。

### 3.5. 3章のまとめ

第2章で述べた打ち切り特異値分解法(TSVD)と最小二乗法を使って目標磁場を正確に再現する起磁力配置を求める手法(TSVD 正則化)を、性質の良い問題(well-posed、良設定問題)に適用した。

準備として、線輪円電流の作る磁場を正確に求める近似計算法を確認した。この近似計算では、換算楕円積分値にChebyshev近似計算を使う。この使用で、磁場分布の最適化計算を実用的な計算時間で行うことが出来る。

トーラス(円環)面上に周回方向線輪電流を多数配置し、トーラス内部で目標磁場を与え、その磁場を再現する例題をTSVD正則化で解き、磁場再現精度を確認した。磁場分布を与える場合と、その磁場を発生するベクトルポテンシャルを与える場合の2種類を試したが、同等の精度で磁場分布を再現できた。しかし、磁場分布を与

える場合では、電流の2乗加算値は最小となっていると確認した。一方、ベクトルポテンシャルを与える場合、定数加算の自由度があり、最も小さい電流の2乗加算値の場合が磁場を目標値とした場合と一致した。

さらに、目標磁場と Maxwell 方程式の整合性について議論した。間違った磁場分布(Maxwell 方程式と矛盾する場合)を、与えると磁場の再構成は磁場評価点で精度が悪くなる場合と、磁場評価点では精度が良い計算結果でも、磁場評価点以外では、実際に得たい磁場とは異なった磁場分布を出力する場合があることも解った。

### 3.5.1. 補足/コメント

本文中(3.1.1 項)にでも述べたが、文献[32]の多項式の係数値について：他の文献[34]と異なる値が示されている場合がある。少なくとも[32]の10次の係数では良好な磁場計算精度は得られなかった。一方、[32]の数値でも9次の係数では良い磁場計算精度が得られた。そのため、文献[32]の係数の使用は要注意であることをコメントしておく。筆者は[34]に記述されている10次の係数を使っている。

#### 4. MRI 用磁石の一樣磁場設計

磁気共鳴撮像装置 MRI では下記の 3 種類の電磁場を利用する。

- 1) 強い静磁場で一樣な磁場分布{たとえば、40cm 球体内で $\pm 1.5\text{ppm}$  以内の磁場強度振幅}。
- 2) 空間的に強度勾配を持つ磁場分布でパルス磁場(たとえば強度勾配は撮像空間内で  $X, Y, Z$  の 3 方向に  $40\text{mT/m}$ )
- 3) 高周波(1.5T では約  $63.866\text{MHz}$  で磁場強度に比例)、

である。1)で特に 0.7T 以上の強磁場 MRI 装置では超伝導磁石を使っている。ここでは 1)の磁気設計に TSVD 利用例を記述する。2)は傾斜磁場コイルと呼ばれ、このコイルの設計用に開発した手法[14, 15]は本資料最後(5.3.3 項)の能動磁気シールドステアリング磁石(ASSM)の設計に応用している(本資料最後)。

MRI では強磁場で一樣強度の静磁場分布を必要とする。診断用の全身 MRI 装置(1.5, 3.0T の超電導磁石利用)では、直径 40cm 球体内(40cm-DSV: Diameter Spherical Volume)で磁場変動が 3ppm(peak-to-peak)以下程度である[1,2]。このように均一な磁場分布を得るには、磁石設置現場での磁場調整(シミング)[12, 13]も必要であるが、磁石設計時に均一な磁場分布を持つ能力を磁石に与えておく必要がある。一方、均一な磁場を発生する起磁力配置を求める設計計算は不良設定問題(ill-posed problem)であり、正確な起磁力配

置解は存在しない。これは、MRI 磁石では被検者のための空間が必要であり、起磁力を配置出来ない空間が存在するためである。つまり、必要な磁場強度・均一度を得ることが出来、可能な限り狭い範囲で起磁力配置を行う事が求められる。通常の円筒型 MRI 磁石では、広いボアで短い軸長の磁石が、望まれる。

この状況について、筆者が開発した TSVD 正則化で解く方法を、この手法の応用による設計例を示しながら説明する。一般的なシリンダ形状の水平磁場型 MRI 磁石を対象にし、試設計の様子は、参考文献[10]に沿って Table 4-1 とする。

この起磁力(ここではコイルブロック CB: Coil Block)配置の設計手順を Fig. 4-1[10]に模式的に示す。三つの段階(Step)に分けて設計する。起磁力配置は、撮像に必要な空間(ここでは直径 40cm 空間、40cm-DSV: Diameter Spherical Volume)で一樣な磁場分布(均一磁場)を高磁場(ここでは、3.0T)で発生する事が仕様である。

三段階のなかで、Step-1 では、同軸線輪電流の集合で、求める均一度が十分可能な幾何学的な配置(磁石の長さやボア径など)を決める[9]。Step2 では軸方向に山谷を持って分布していた電流を、均一度を保ちながら数個の CB にまとめる。この段階では、CB 内の電流値は連続値である。Step-3 では、均一度が保てるように、実際の導体配置(軸方向と半径方向の巻き数)を考慮し、素線電流を決める。

MRI 用磁石には、強磁場を発生する主コイルブロック(MC-CB: Main coil CB)と磁石周囲への漏

Table 4-1 MRI 磁石の試設計仕様 (文献[10], Table 1 より引用)

Parameter		Value
Number of MC-CBs	$(N_{MC})$	6 (5 to 7)
Magnetic field at center	$(B^0)$	3.00 T
Inner radius of coil blocks	$(R_{IN})$	0.500 m
Electrical length of MC	$(L_e)$	1.520 m
Homogeneity in 40 cm DSV	$(h_{40})$	< 1.00 ppm
Volume of interest	(VOI)	0.400 m DSV
Radius of shield coil	$(R_{SC})$	0.945 m
Current density in end-MC-CBs	$(D^{CI})$	150 A/mm <sup>2</sup>
Current density in other CBs	$(D^{CI})$	180 A/mm <sup>2</sup>
Max. magnetic field conductor	$(B_{ex})$	< 6.20 T
Current drive mode		Persistent

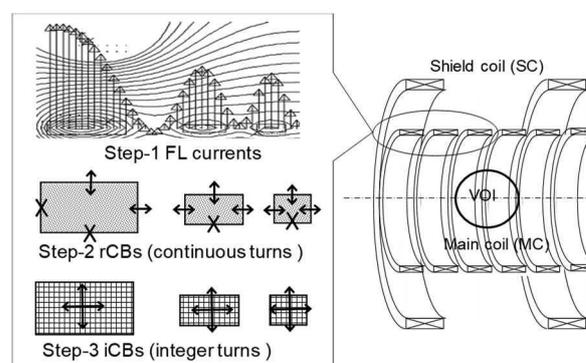


Fig. 4-1 静磁場磁石の起磁力配置設計手順。文献[10], Fig.1 より引用

れ磁場を遮蔽するシールドコイル(SC-CB : Shield coil CB)がある。MC-CB 配置は上記 3 段階の計算で、均一な強磁場を発生するように決める。SC-CB の半径位置と電流は MC-CB が持つ MM をほぼ打ち消すように、全て Step で調整する。変更された SC-CB の磁場を考慮して MC-CB 配置を決め、新たな MC-CB 配置による MM を打ち消す SC-CB 配置を再度決める。このように、SC-CB と MC-CB 配置は繰り返し計算で決める。以下では、均一磁場を発生する MC-CB 配置設計手法を説明する。

#### 4.1. MRI 磁石磁場設計の磁場成分

設計手法の本論に入る前に設計で扱う磁場成分を説明しておく。すでに 2.3 節の目標磁場でも述べたが、MRI 磁場(均一磁場)では、式(2-1)の  $\mathbf{B}$  は MFEP の磁場分布を軸方向成分( $B_z$ )で構成する。MRI では磁場絶対値  $B$  で均一な磁場が必要であるが、起磁力配置は  $B_z$  で検討する。

必要な均一磁場が得られた段階では、磁場強度の変動分は通常、主磁場が 3.0T であっても、1 ガウス(3.0T に対して 33.3ppm peak to peak)以下であり、半径方向成分  $B_r$  も同程度以下である。この場合、 $B_z$  と  $B$  の差異は小さく(1nT 以下)、MRI で必要な均一度の数 ppm(従って  $1\mu\text{T} \sim 10\mu\text{T}$  の磁場振幅)に対して十分小さい。そこで、均一磁場を発生する磁石の磁場設計では  $B_z$  を評価する。

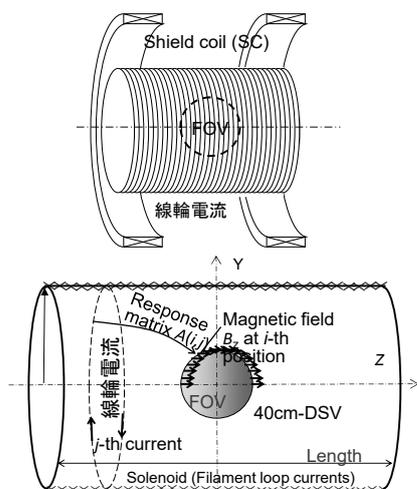


Fig. 4-2 MRI 磁石磁場設計 Step-1 計算モデル  
文献[9], Fig.1 & Fig.2 より引用

このため、 $\mathbf{B}$  の要素は  $i$  番目磁場評価点に対して  $B_{zi}$  である。この考えは、4.6 節で議論するシミング計算(計測磁場から磁場を補正して均一磁場分布に調整するための磁気モーメント配置  $\mathbf{M}$  を求める計算)でも同じであり、軸方向成分  $B_z$  でシミング計算も定式化する。さらに、5 章のミュオン g-2/EDM 詳細計測用の磁石(MSM)の設計やシミングでも同様である。

実際に  $B_z$  成分以外が無視できる状態なのか? については、注意して確認していく必要があることをコメントしておく。

#### 4.2. 概念検討(Step-1)

Step-1 では、目標の磁場強度と均一度を持つようにソレノイド状に連続的に同軸配置した線輪電流(太さ無限小の円電流)の電流分布を、Fig. 4-2 の計算体系で算出する。線輪電流は、MRI 磁石で主に磁場を作る主コイル位置に円筒状に配置し、一方、大半径位置には、外部への漏れ磁場を零に近づけるため、全体として MM を打ち消すシールドコイルを置く。線輪電流は計算結果に基づいて主コイルを構成する CB に、以後の Step で置き換える。この Step-1 では、線輪電流配置を表すベクトル  $\mathbf{I}$  に対して、磁場評価点(MFEP)の磁場分布  $\mathbf{B}$  は、式(2-1)のように、 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{I}$  と表される。MFEP は、FOV(撮像領域: Field Of View、直径 40~50cm 程度の球体)表面に配置される。応答行列  $\mathbf{A}$  の要素  $A_{ij}$  は  $j$  番目線輪電流(単位電流)が  $i$  番目 MFEP に作る磁場である。

参考文献[9,10]では、ソレノイド状に配置した円線輪電流から均一磁場を予定する領域の磁場への応答行列  $\mathbf{A}$  の SVD 固有モードを重ね合わせて MRI で必要とする電流分布{式(2-7)}を算出し、その電流分布から詳細な磁場分布を算出し、必要とする均一度を得る条件を検討した。この段階では Fig. 4-1 の Step-1 に示したように連続的に分布する電流である。この段階で、必要な磁石軸長さや主コイルの CB 数を検討する。不良設定問題(ill-posed problem)であるため、ここで、単純な計算モデルを使い、良い見通し(使用

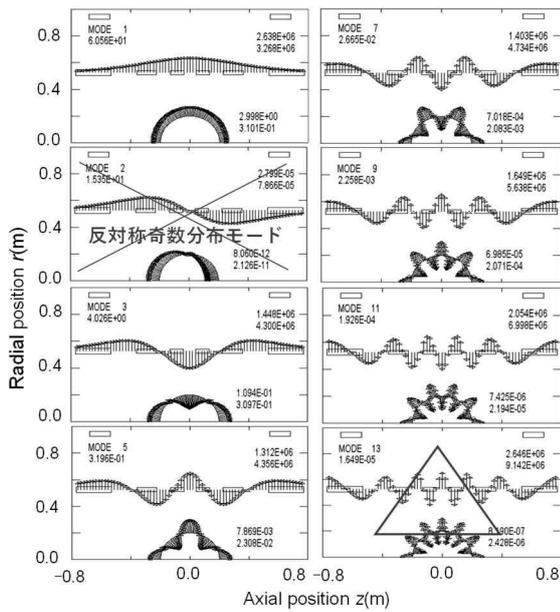


Fig. 4-3 Step-1 の固有モード。各枠上部に電流分布、下中央に磁場分布を矢印で示す。磁場の方向は軸(紙面横)方向であるが、ここでは中心から放射状に示した。対称性のために奇数番号のみ使用。文献[10]、Fig.3 引用

可能なスペースで必要な磁場強度・均一度を確保)をつけることは重要である。

Fig. 4-3 は半径 0.525m, 1.50m 長の円筒面に多数の線輪電流を配置し、MFEPs を配置する磁場評価面に 40cm 球面 (40cm-DSS, DSS: Diameter Spherical Surface) をとり、MFEPs への応答行列に特異値分解して得られた SVD 固有モードを、各フレーム上部の半径 0.525m 相当位置に電流分布を矢印で、中央下部の 40cm-DSS に磁場分布を矢印{実際には軸方向(左右方向)を向いた磁場であるが、ここでは中心から半径外・内(正・負)方向で示す}で示した。偶数番の固有モードは、軸方向に反対称であり、利用できない。参考に 2 番目のみ示した。

Table 4-2 固有モード強度と電流寄与(3.0T)

No.	特異値(T/A)	強度(T)	電流 (MA)
1	6.056E-5	2.998	2.638
3	4.026E-6	0.1094	1.448
5	3.199E-7	7.869E-3	1.312
7	2.665E-8	7.018E-4	1.403
9	2.258E-9	6.985E-5	1.649
11	1.926E-10	7.425E-6	2.054
13	1.549E-11	8.190E-7	2.646

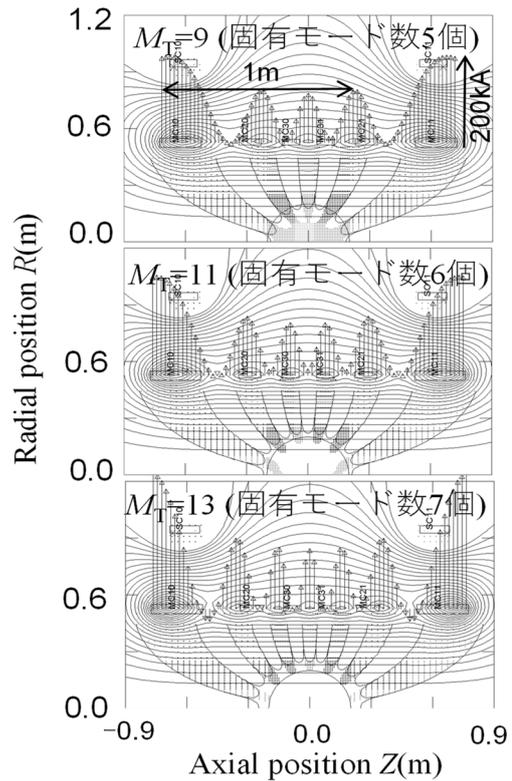


Fig. 4-4 Step-1 の計算結果例。加算固有モード数は上から、5, 6, 7 個。左右に走る等高線は等磁束線で、中心から放射状の線は 3.0T ±3.0ppm の磁場強度線。固有モード数の増加で、3T±4.5μT (1.5ppm) の等高線が囲む領域が広がる。打点領域では設計磁場より高磁場。

高次モードでは、磁場、電流分布共にピーク数が多くなるのが解る。Table 4-2 には特異値、固有モード強度、それに電流(ノルム)を示した。有限長ソレノイドでは厳密に均一な磁場は得られないので、その意味で ill-posed である。電流値が高次成分では上昇することも、その状況を示している。しかし、3.0T 一様磁場を生成するために必要な 13 次成分は、1μT 以下であり、小さい。そのため、11 番目までの奇数番号の固有モード 6 個の組み合わせで、振幅が 1ppm 程度以内の均一な磁場を発生できると解る。

固有モード数は、MC-CB 数と密接に関連することは次節(4.3)で述べるが、Step-1 での様子を Fig. 4-4 に示した。打ち切り固有モード番号  $M_T$  を、上から 9, 11, 13 とした場合で、左右対称な固有モードをそれぞれ、5, 6, 7 個を加算{式(2-11)}し

て、均一磁場を発生する起磁力配置を円筒状に算出している。使用する固有モード数と同じ数のピークが電流分布に確認できる(Step-2 では個の位置にCBを配置する)。また、固有モード数が増加すると、 $3.0\text{T} \pm 4.5\mu\text{T}(1.5\text{ppm})$ の等高線が囲む中心領域が広がっており、より良好な均一磁場を発生できていることが解る。また、打点領域では、磁場が設計目標磁場(ここでは $3.0\text{T}$ )より高くなっている。

Fig. 4-5 では円筒状に配置する起磁力配置の全長の2種類を比較している。磁石利用者はコンパクトな磁石を望むと考えられるが、上側図のように、負電流を流す部分が発生し、合計起磁力は増加する。また、磁場強度の等高線位置が狭まってきている事から、均一度も悪化することが解る。

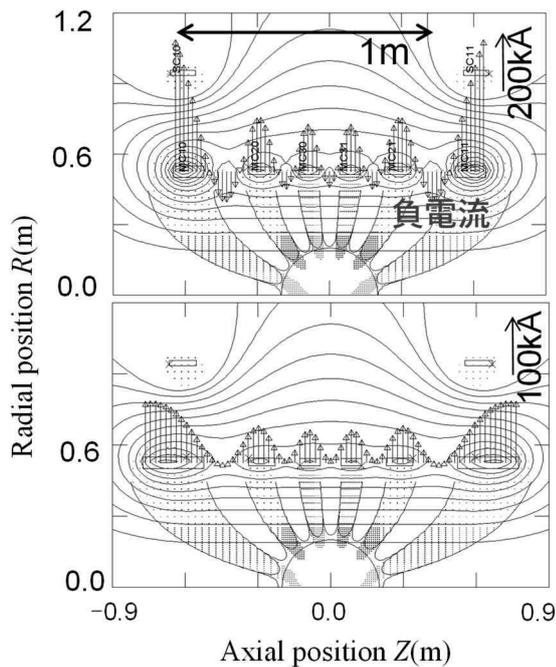


Fig. 4-5 異なった全長に対する Step-1 結果、固有モード6個使用、上：1.30m、下：1.55m

以上の議論では式(2-11)の固有モードの加算で、電流値を決めているが、各固有モードの寄与は、 $P_k^{\text{TG}}$ で決めた。この加算法は、利用固有モード数が、整数で離散的である。しかし、実際には、加算割合を  $P_k^{\text{TG}}$  ではなく、任意の割合で加算することは可能である。そこで、打ち切り

固有モード番号  $M_T$  を実数と考え、小数点以下を切り捨てた整数を  $M_{\text{TII}}$  とするとき、 $M_{\text{TII}}$  までは加算割合を  $P_k^{\text{TG}}$  とし、 $M_{\text{TII}}+1$  ( $M_I$  と記述する) 番目の固有モードは、加算割合を  $(M_T - M_{\text{TII}})P_{M_{\text{TII}}+1}^{\text{TG}}$  とする加算を行うことで、考慮する最高次の固有モードを連続的に調整して、起磁力配置を決めることを可能とする。つまり、

$$I = \sum_1^{M_{\text{TII}}} \sqrt{n_p} v_k P_k^{\text{TG}} / \lambda_k + (M_T - M_{\text{TII}}) \sqrt{n_p} v_{M_{\text{TII}}+1} P_{M_{\text{TII}}+1}^{\text{TG}} / \lambda_{M_{\text{TII}}+1}, \quad (4-1)$$

の加算である。この加算法の実例を Fig. 4-6 に示す。上側図には、 $M_T=10.7$  と  $12.3$  の場合で、電流分布と  $3.0\text{T} \pm 4.5\mu\text{T}(1.5\text{ppm})$  の等高線を示している。電流のピーク数は同じであるが、その分布形は異なっており、均一度も異なっている。左では、10番目まで固有モードを強度  $P_k^{\text{TG}}$  で、11番目を  $0.7 P_{11}^{\text{TG}}$  の強度で加算している。一方、右側は、12番目までの固有モードを強度  $P_k^{\text{TG}}$  で、13番目を  $0.3 P_{13}^{\text{TG}}$  の強度で加算している。ピーク数は同じでありながら、均一度が向上した。しかし、電流ピークは高く、実磁石では導体の経験磁場が強くなり、素線電流が制限される可能性もあるため、注意を要する。

Fig. 4-6 下部は、均一度と絶対値の合計電流値を実数化した  $M_T$  の関数で示した。合計電流値と

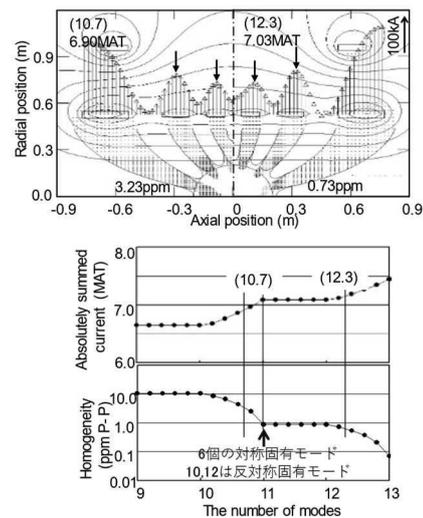


Fig. 4-6 打ち切り固有モード番号を実数として、起磁力配置を求めた場合の磁場分布、均一度、および、絶対値合計電流値。

均一度は  $M_T$  の関数で連続的に変化しており、磁石設計では求める均一度が得られ、設計可能な起磁力配置である条件( $M_T$ )を決める。

#### 4.2.1. CB 断面の積分について

本項は本論から外れるが、次節で起磁力配置の離散化(Step-2)の説明に移る前に、CB 断面の積分について説明し、磁場計算精度について確認する。CB 断面は長方形であるが、この断面内に多数の線輪電流を配置して、断面積分を行い、正確な磁場を求める。数値積分法には、矩形、二次式近似のシンプソン法、それにガウス積分の高次近似の積分法等があるが、ガウス積分が高精度であり、計算時間は短時間である。筆者は、ガウス求積法を使っており、ここで、ガウス求積法を紹介しておく。

断面の積分は、

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x,y) dx dy \approx \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{M_y} w_i w_j f(x_i, y_j) \quad (4-2)$$

のように、ガウス分点位置に重みを付けて積分を、加算に置き換えて、実行する。 $x_i, y_i$  はガウス分点で、 $w_i, w_j$  は重みである。これらは、Gauss-Legendre 則で決められるが、web 上で容易に入手できる。

半径  $R_c$  で高さ  $Z_c$  位置にある線輪電流が計算点  $R_m, Z_m$  に作る磁場  $b_z$  は式(3-2)を使って計算できるが、この値を

$$b_z = I b_z(R_c, R_m, Z_{mc}) \quad (4-3)$$

と考え、Fig. 4-7 の CB が作る磁場は、断面  $a, b$  について、下記のガウス求積法で計算することで、精度良く磁場を算出できると期待できる。

$$\begin{aligned} & \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{I}{ab}\right) b_z(1.0, R_c + x, R_m, Z_{mc} - y) dx dy \\ & \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\frac{I}{ab}\right) w_i w_j b_z(1.0, R_c + 2ax_i, R_m, Z_{mc} - 2by_j) \end{aligned} \quad (4-4)$$

ここで、 $Z_{mc}$  は  $Z_m - Z_c$  で、計測点と線輪電流の  $Z$  位置の差異である。このガウス積分で、計算点(ガ

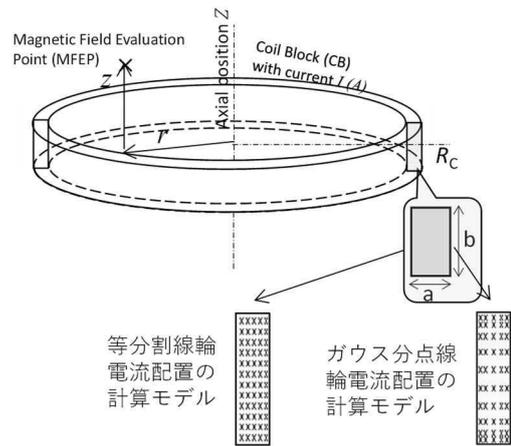


Fig. 4-7 CB 断面内の積分モデル

ウス分点)を下側に示したコイル断面の図に示した。参考に、等分割の場合の積分点(実際より少ない分点数であるが)も示した。

CB 中心半径  $R_c$  を  $R_c=0.82m$ 、半径方向幅  $a=4.0cm$ 、軸方向断面長さ  $b=20.0cm$  とし、磁場計算点の半径値  $R_m=0.333m$  として、 $Z_{cm}$  点について磁場計算値を、Table 4-3 で比較した。ガウス分点は半径方向と軸方向で  $4 \times 7$  個であるが、等分割法では  $1000 \times 5000$  点の分割点を取っている。

Table 4-3 磁場積分値の比較

磁場計算点		ガウス求積(4x7)	等分割(1000x5000)
$R_m$ (m)	$Z_{mc}$ (m)	$B_z$ $B_R$	$B_z$ $B_R$
0.333	0.0	0.694431840217	0.694431840305
		0.0	0.0
0.333	0.50	0.366090422210	0.366090422208
		0.110401434761	0.110401434778
0.333	0.10	0.670767518211	0.670767518289
		0.0574310032839	0.0574310033036
0.333	0.05	0.688363919301	0.688363919386
		0.0298539491299	0.0298539491404

両者は 9 桁で数値が一致しており、正しく計算できていると考える。計算量は等分割では、ガウス積分法に比べ、約 180 倍多くなり、起磁力配置の設計で利用することは難しいと解る。10 桁目から差異があるが、市販の計算コードと比較すると、表のガウス積分法と一致しており、10 桁目以降ではガウス積分法がより正しい計算値であると考えている。ガウス積分法で、CB が作る磁場の算出に利用することを推奨する。

### 4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2)

前節の Step-1 では連続的な電流分布で均一磁場を発生できる起磁力分布を求めたが、本節の Step-2 ではピークとなった位置に主コイルのコイルブロック(MC-CB)を配置することで、起磁力配置を離散化する。その結果、電流ピーク数と実際に配置する MC-CB 数が同数であり、固有モード数と密接な関係にある事が理解できる。つまり、本節の目指すところは、Fig. 4-8 である。この図では、上側に Step-1 で求めた電流分布(主コイル部は連続分布)が示され、下側は Step-2 で離散化した CB 配置である。3.0T±1.5ppm の磁場強度等高線が示すように、磁場分布の一様性に大きな変化はない。また、合計起磁力(電流の絶対値和)にも大きな変化はなく、Step-1 で求めた磁場が、Step-2 でも再現されることを目標に起磁力配置の離散化を進める。

全ての CB は同軸・離散配置である。Step-2 では各 CB の巻き線数は実数とし、CB 全体の電流(AT: Ampere-Turn)と断面形状は連続的(実数として)に変化させて、CB 配置を最適化する。Step-3 では電流値が実数であり、Step-3(巻き線数が離散化で、CB の AT 値も離散化)の CB と区別する

ために rCB と呼ぶこともある。CB の配置や位置形状は CB 配置で計算できる磁場分布  $\mathbf{B}^{CB}$  と Step-1 で求めた磁場の基底で、固有モード強度  $P^{CB}_i$  が、目標磁場の固有モード強度に等しくなるように調整する。つまり、

$$P^{CB}_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{B}^{CB} / n_p^{1/2} \rightarrow P^{TG}_i \quad (4-5)$$

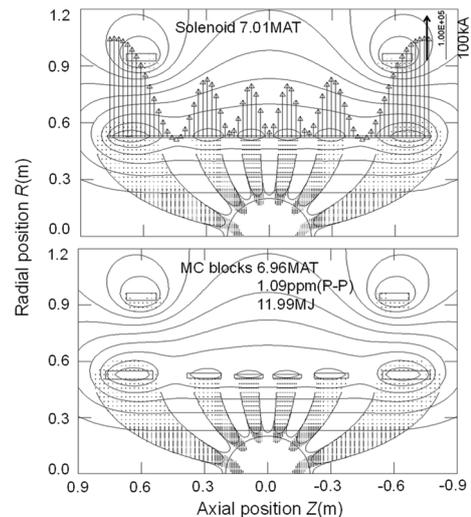


Fig. 4-8 Step-2 が目指す連続電流配置から離散コイルブロック配置への変換例

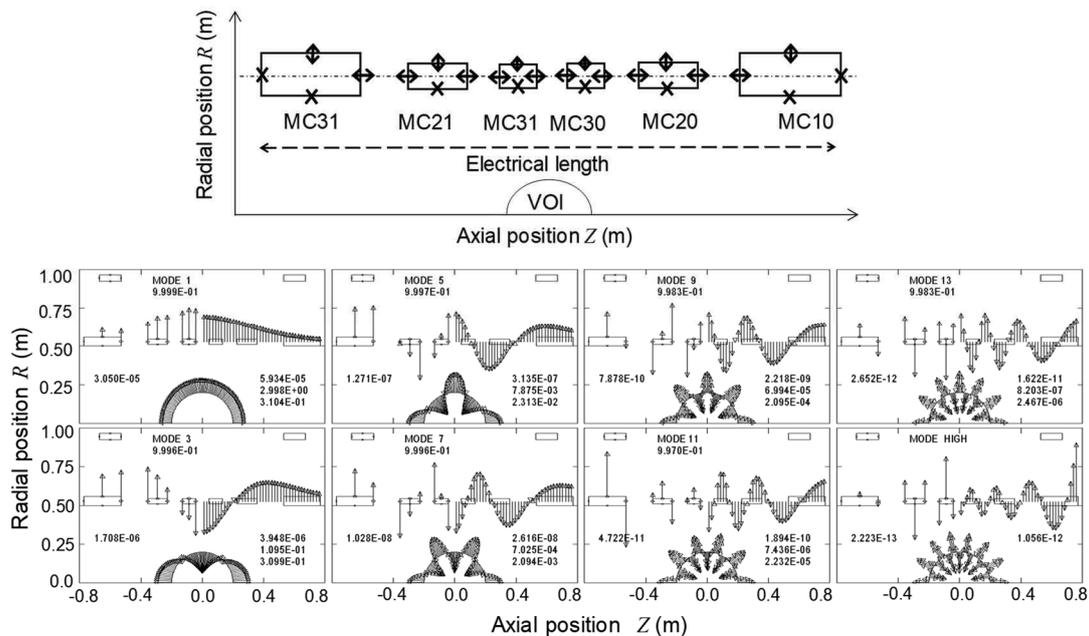


Fig. 4-9 ソレノイド状の連続電流分布モデルによる均一磁場分布の計画。上：コイル断面の調整部分(矢印)、下：コイル配置の調整に用いる固有モード。文献[10], Fig. 4, Fig. 5 引用

である。この調整は、Fig. 4-9 上図で、両矢印で書かれた断面片位置を調整する。×印の CB 内径と全長は通常求める磁石の仕様で決まるため、設計者もしくは磁石使用者の設定値である。CB 断面長方形の辺で矢印の部分移動させてこの辺上に発生する電流から MFEP 上の磁場への応答行列を作り、その特異値分解で得られる電流と磁場の固有モードを利用する。例えば、CB の電流密度を  $C_D(\text{A}/\text{m}^2)$  とし、軸方向幅を  $\Delta R_{OT}$  変化させるとすると、半径大側の断面辺上に電流

$$i_{OT} = C_D(Z_{TP} - Z_{BT})\Delta R_{OT} \quad (4-6)$$

が現れる。軸方向位置の移動についても同様に軸方向の両端辺に同じ電流密度  $C_D$  で電流が現れると考える。図の両矢印数と同じで、6 個の CB の場合、16 個の固有モードがあり、そのうち 8 個が軸方向に対称なものである。ここでは、MFEP を球体の FOV 表面上に配置し、その間の応答行列を作成する。その後は、2 章の TSVD 正規化による最小二乗法を用いる。

得られた SVD 固有モード 8 個を Fig. 4-9 下に示す。各枠で、横軸は軸方向位置  $Z$  で、縦軸は半径方向位置  $R$  として、FOV と CB および FL 電流の位置を示している。各枠の右側には Step-1 の SVD 固有モードを示し、左側に Step-2 の SVD 固有モードを示している。各枠の上部には電流分布の基底を示す。また、下部の半円形部には磁場分布の基底を示す。各枠の上部には固有モー

ド番号(MODE 番号)と、2 つの磁場分布の基底の内積( $\mathbf{u}^{CB_i}, \mathbf{u}^{FL_i}$ )を示している。すべての枠で 0.99 を超えており、2 つの磁場分布基底はほぼ同じ分布を示している。従って、Step-1 で得た磁場分布は、離散配置の CB 群でも同じ磁場分布を得ることが可能である。つまり、Step-1 で実現可能と判断された磁場分布・均一度は、離散化した CB でも実現できると結論できる。この性質を利用して、固有モード強度  $P^{CB_i}$ {式(2-12)}を、

$$P^{CB_i} \rightarrow P^{TG_i} = P^{FL_i} \quad (4-7)$$

と断面辺位置(Fig. 4-9 上)を調整する。

各枠の右側には、3 個の数値が書かれているが、それぞれ上から、特異値(ここでは T/A)、2 乗平均磁場強度(T)および磁場振幅(T)を、3.0T 一様磁場を 40cm 直径球の FOV 表面で実現するために必要な値を書いている。番号が大きくなる(高次で小特異値)ほど、磁場強度が小さくなる。MODE13 では 1ppm(3 $\mu$ T)以下の寄与となっている。従って、これ以上高次の固有モードを考慮する必要は無い。また MODE13 では、例え、大きな強度誤差(30%)があっても、0.3ppm 以下の磁場誤差でしかなく、無視できる。従って、MODE11 までは正確に調整するが、MODE13 は磁石の製作性を考慮して調整・設計する[10]。

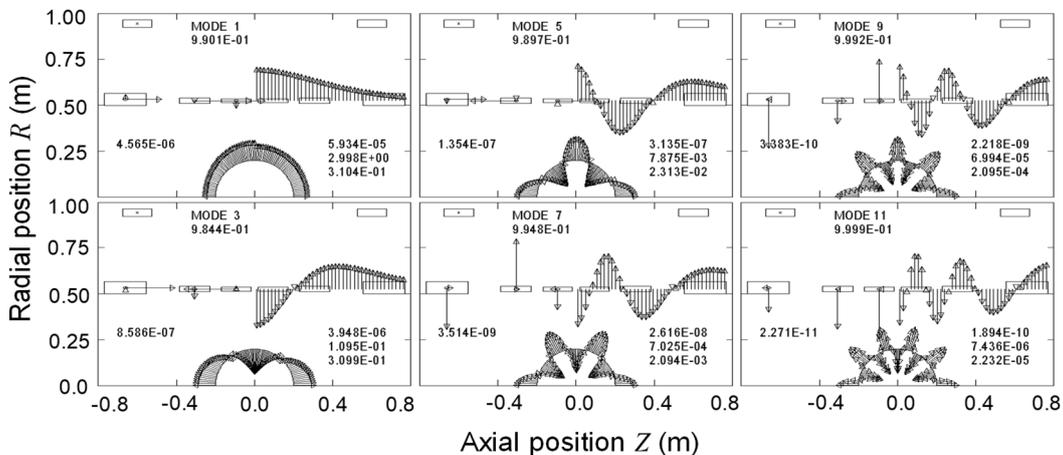


図 4-10 MC-CB 設置位置移動に関連した SVD 固有モード。文献 10, Fig. .8 より引用

#### 4.4. 巻き線数の離散化(Step-3)

Step-3 では導体の巻き数を CB 毎に整数化する。導体の経験磁場や電源、永久電流スイッチ、それにクエンチ時の電圧や導体の温度上昇などの設計項目を考慮した上で、導体径と素線電流を決め、巻き線配置、巻き線数(従ってCB断面形状)を設計する。この段階では、各CBの巻き数は整数化されているので、iCB と呼ぶことにする。Step-3 では、iCB の断面形状は決まっているので、位置(半径位置  $R$ 、と軸方向位置  $Z$ )のみの変更により磁場分布を最適設計する。

Fig. 4-10 には Step-3 での固有モードを示す。6個のCB、12個の自由度で、6個の軸対称SVD固有モードを持つ。これらの磁場分布基底も、Step-1の基底とほぼ同じ分布を持つので、強度をStep-1の固有モード強度に合わせる。さらに高次の固有モードは調整されないが、小さな磁場であるため、均一度への影響は極めて小さい。

Table 4-4は、Step-2からStep-3への導体考慮で巻き線方法と断面形状を決めた過程を示す。左側にrCB(Step-2の結果)の断面寸法と、導体断面寸法と巻き線構造を決め、Step-3のiCB断面寸法と起磁力を示した。この表の例は、導体素線電流を1000.5Aと大きくしている。通常のMRI磁石では500A前後である。これは、離散化の影響を大きくし、iCB起磁力を離散化しても正確な磁場設計(均一磁場が得られる)が可能なことを示すためである。この例では、iCBの断面がrCBと同程度のサイズになるように導体と巻き線構造を決めているが、iCBとrCBで最大10kAの差異がある。このため、iCBをrCBと同じ位置に配置した場合では均一度は悪い。この例では909ppmであ

った。巻き線方法から考えて、層数(半径方向)は偶数としているため、半径方向の巻き数選択がiCB起磁力に与える影響は特に大きい。このため、rCBからiCBで精度良く起磁力と断面形状を調整することは難しい。

この理由で、iCBをrCBと同じ位置に置くと、均一度は劣化する。Fig. 4-10の固有モードについて、その強度を調整する。CB移動を移動させて式(4-7)のようにStep-1の固有モード強度に合わせる。その結果、Table 4-5のようにStep-3まで固有モード強度を再現する。こうして、iCB位置を調整すると、良好な均一度を再現できる。MC-CB数の6個としているので、奇数番号で6番目となる11番目の固有モード強度までは正確に調整出来る。13番目固有モード強度は正確な調整は出来ないが、Table 4-2のように寄与は小さいので、大きな悪化に寄与しない程度の値に収めて

Table 4-5 各 Step での固有モード強度 (文献[10], Table VI を参考)

No.	Homog. 3.0 T ( $P_i^{3T}$ )	FLs+SC-CBs ( $P_i^{FL}$ , Step-1)	rCBs, ( $P_i^{rCB}$ , Step-2)	$P_i^{iCB}$ , iCBs, ( $P_i^{iCB}$ , Step-3)
1	2.9980E+00	2.9980E+00	2.9980E+00	2.9980E+00
3	1.0948E-01	1.0948E-01	1.0948E-01	1.0948E-01
5	7.8752E-03	7.8752E-03	7.8752E-03	7.8752E-03
7	7.0249E-04	7.0249E-04	7.0249E-04	7.0687E-04
9	6.9938E-05	6.9938E-05	6.9938E-05	6.9938E-05
11	7.4356E-06	7.4359E-06	7.4357E-06	7.4357E-06
13	8.205E-07	-1.163E-07	-1.148E-07	-7.641E-08
$F_{13}$	1.0	-0.14	-0.14	No tuning
均一度	0.0 ppm	0.928 ppm	0.937 ppm	0.906 ppm

注：数値は左から、完全一様磁場に必要固有モード強度、それにStep-1, -2, -3で実現した固有モード強度である。F13は13番目の強度調整のパラメータ、均一度は40cm球面上の値。

Table 4-4 Step-2(rCB)から Step-3(iCB)への電流離散化の例(参考文献[10], Table IV を引用)

Models CBs	rCB placements( $F_{13}=-0.13$ )		Conductor sizes			iCB ( $I_{PS}=1000.5$ A)						
	rCB Sizes (mm)		Amp-turns (kAT)	Radial (mm)	Axial (mm)	Winding turns			iCB sizes (mm)		CB-Total turns	Amp-turns (kAT)
	Radial	Axial				Radial	Axial	Lack	Radial	Axial		
MC10/11	64.2	220.0	2117.9	2.05	3.25	32	66	-2	65.6	214.5	2110	2111.1
MC20/21	29.5	154.3	820.3	1.85	3.00	16	52	-2	29.6	156.0	830	830.4
MC30/31	22.1	150.0	594.6	1.85	3.00	12	50	-2	22.2	156.0	598	598.3
SC10/11	42.0	144.8	-1094.8	1.85	3.00	22	50	-2	40.7	150.0	1098	-1098.6

いる。負の値になっている原因は、SC による磁場の影響である。

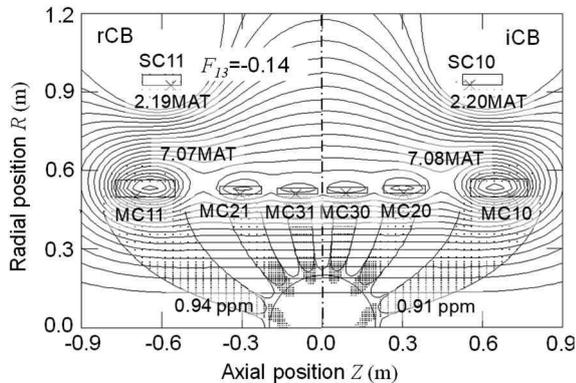


Fig. 4-11 本手法で求めた起磁力配置。左は Step-2 の結果、右は巻き数を整数化した Step-3 の結果。文献[10], Fig.10(a)より引用

求めた起磁力配置例を Fig. 4-11 に示す。左側は Step-2 の結果、右側は Step-3 の結果である。ともに  $3.0\text{T} \pm 1.5\text{ppm}$  の磁場強度等高線が均一磁場を必要とする領域を規則的に取り囲んでおり、仕様の均一磁場分布が得られている。

以上の起磁力配置設計手法で使用する SVD 固有モードは 5~7 個の軸対称モードである。 $2n-1$  の奇数番号であるが、 $n$  が 1 大きくなると、特異値(ここでは T/m の単位)は約 1 桁小さくなり、同じ大きさの電流でも、発生する磁場は 1 桁小さくなっていく。このため、 $n=7$ (MODE13)では、 $n=1$  の約  $1/10^6$  の特異値であり、発生できる磁場強度は 1ppm 以下である。また、主コイル数と  $n$  の間には密接な関係があることもわかった。

一方、[35]などの他手法では、均一度と起磁力(AT)を組み合わせた値を最小化する方法をとるが、最急降下法やアニーリングで行う。この場合、Step-1 で立てた計画から離れて解を求め、必ずしも計画通りの解にならないことや、起磁力配置(CB 数など)と求める磁場の関係が把握し難い点に問題があると考えている。また、従来の多くの磁石設計やシミング計算では、[36, 37]のように、撮像領域の磁場分布を球面調和関数に展開し、最低次(均一磁場)以外の項を零に近づけるように線形計画法やアニーリング法で起磁力配置を調整する。しかし、各球面調和関数

に対応した起磁力配置は正確には決められないので、高次成分が不正確になる[36]。一方、SVD を使う筆者の提案手法では磁場分布と起磁力配置が対応しており、高次成分による誤差磁場もその大きさを把握できる。また、TSVD では、式(2-7)のように低次成分から加算するので、求める解は「電流当たりの磁場強度が強い」の条件を含む。そのため、小さい起磁力で、必要な起磁力配置を決めることが出来ると考えている。さらに、鉄など磁性材料を含む体系でも応用可能なことは参考文献[38]で示している。

以上の議論は、より一般的に使われている水平磁場機の磁場設計として議論したが、同じ TSVD 応用の考えで垂直磁場機{開放型 MRI}の磁場設計[39]を行い、製品化している。この開放型機は 1.2T の磁場であり、製品出荷開始後 10 年を超えるが、これ以上の磁場強度を持つ開放型機は未だ存在しない。TSVD の考えで磁場設計したため、他の方法に比べて小さめの起磁力で設計できたことが奏功したと考えている。また、以上の議論は円形コイルを用いた磁石についての議論であったが、コイル形状が円形で無く、レーストラック型であっても TSVD 利用で、均一磁場をもつ磁石の磁場設計が可能であることも示している[40]。

#### 4.5. 鉄芯型 MRI 磁石の場合

MRI 磁石では鉄芯を利用した磁石もある。垂直磁場型にあり、永久磁石もしくは超伝導コイルを起磁力源としている。撮像空間で磁場分布を一様とするために、鉄芯の撮像領域に対向した面には、凹凸を持ち、一様な磁場をつくる。これまでに説明した TSVD 正則化を基礎に、鉄芯の凹凸を設計できる[38]ので、簡単に説明する。

計算体系は Fig. 4-12 で、今回も半径方向( $R$ )—軸方向( $Z$ )の 2 次元である。ただし、軸方向は紙面縦方向で、 $Z$  軸および磁場の方向は紙面上方向を向いている。この鉄芯で、直径 0.38m の撮像領域(FOV: Field Of View)を挟む上下の  $Z = \pm 0.375\text{m} \sim 0.450\text{m}$  で鉄芯に凹凸をもうけて、FOV の磁場を一様に近づける。

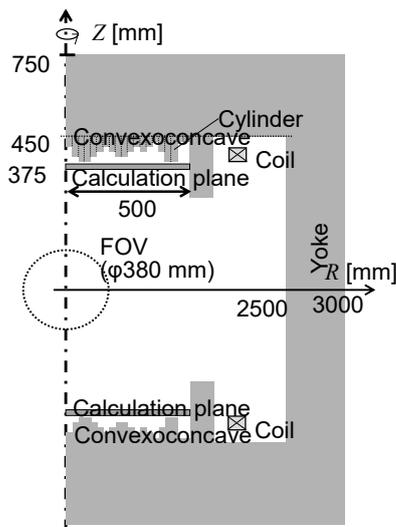


Fig. 4-12 鉄芯の撮像領域対向面に本手法で求めた MC-CB 位置。左は Step-2 の結果、起磁力(A)は実数で連続値、右は巻き数を整数化し

鉄芯の変形量を算出するには、DUCAS[41]を利用する。DUCAS はステラレータ型核融合装置のコイル形状を設計するために開発された計算手法で、目標磁場を再現するように曲面上の電流経路(従って、コイル形状)を算出する。計算モデルの基本モデルを Fig. 4-13 に示す。電流面を三角要素の集合で表現し、節点の電流ポテンシャル  $T_i$  により面電流を表現し、電流ポテンシャルの値を目標の磁場を再現するように、TSVD 正則化と最小二乗法で、決める。DUCAS の詳細は参考文献[41]に譲る。

電流ポテンシャルは節点の周りに周回している電流値とも理解でき、節点の磁気モーメント

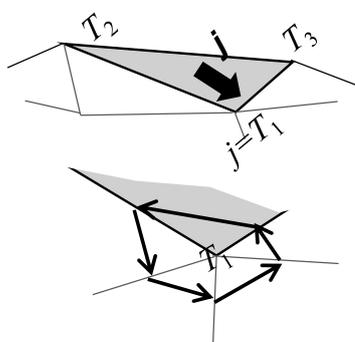


Fig. 4-13 DUCAS の面電流計算モデル

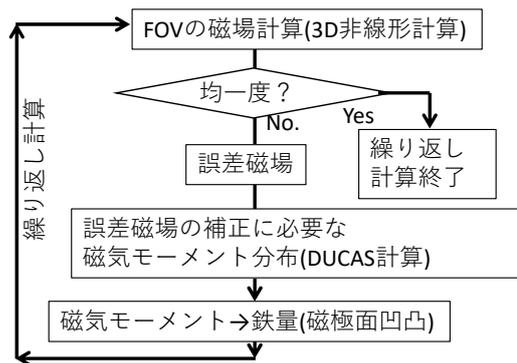


Fig. 4-14 FOV で磁場分布を一様とする鉄芯形状を求める繰り返し計算手順

(MM)を示すと理解することも出来る。そのため、FOV の磁場が一様となるように DUCAS で求めた MM 分布を、鉄芯形状に換算すると目標の磁場に近づいていくことになる。この繰り返し計算手順を Fig. 4-14 に示した。目標とする均一度が得られると計算は終了である。

計算結果例を Fig. 4-15 に示した。この場合、50 回の繰り返し計算で磁場分布を一様化する鉄芯の凹凸形状が得られている。また、前節までの水平磁場に関する検討と同様の、磁場分布の強弱の模様が発生しているが、TSVD 計算に依存した模様である。前節では Fig. 4-4 最下部、固有モード 7 個利用に相当した磁場分布となっている。

以上のように、TSVD 利用で鉄心形状を目標磁場に合わせて変形させることも可能であることが解った。この考え方も g-2/EDM 磁石の設計に使って行く。

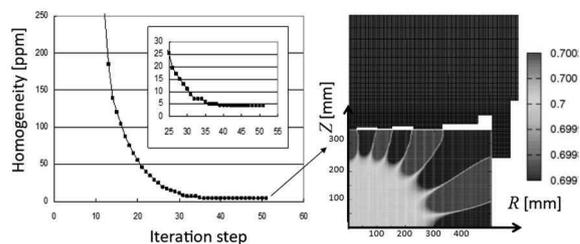


Fig. 4-15 繰り返し計算(左)で得られた鉄面の凹凸と磁場分布(右 : 38cm-DSS で 4.6ppm)

#### 4.6. 磁場シミング

磁場設計が良好に行われていても、設置後に得られる磁場には誤差磁場が混入し、一様磁場はすぐには得られない。MRI 磁石を例にとると、設置直後では数百～1000ppmに達する。目標の均一度とは懸け離れて大きな誤差磁場である。そこで、磁石設置後、使用開始前に磁場シミング(誤差磁場の補正)を行う。その例を本節では紹介する。以下で、均一度は式(1-1)の定義である。

誤差磁場の原因は、設計時の丸め誤差、磁石の組み立て誤差、また建屋鉄材の磁化などによる設置現場の環境磁場(含地磁気)が原因である。従って、磁石設置時には精度良くこの誤差磁場を補正(以後、シミングと言う)する必要がある。また、使用開始後でも、均一度が劣化した場合には、保守時などにシミングを行う。均一磁場を必要とする撮像空間の周囲に磁気モーメント(MM)を分布配置させ、その MM が作る磁場で、誤差磁場を補正する。MM の発生源は、磁場中で磁化した鉄片を使うことが多い。また、鉄片以外に、小コイル群を用いるシムコイル、永久磁石、などがある。磁化鉄片の MM を使うシミングを受動的シミング(Passive shimming)と呼ぶ。参考文献[12, 13]の方法も受動的シミングである。この方法は多数の位置で MM(鉄片)を配置出来るので、空間的に細かく磁場調整を行うことが出来る。MRI磁石では一般的に使われ、g-2/EDMでもこの方法を主に使う。

本節で使用する磁場データは、J-PARC 内で、MuSEUM 実験用に用意している再利用 MRI 磁石である。計測面は 40cm-DSS である。

##### 4.6.1. シミング機構

Fig. 4-16 は MRI 磁石のシミング体系である [13]。通常 24 本のシムトレイを持つが、図はそのうちの 12 本を円筒状に配置した図である。それぞれには 24 個のポケットがある。合計 576 個のポケットが存在する。

ポケットに鉄片(薄板)を配置する。シムトレイ 24 本のうち、12 本を粗(coarse)シミングに利

用し、残りの 12 本はわずかな鉄片のみ配置する詳細(fine)シミングに利用する。後者では磁石の消磁・励磁作業が不要として、作業量削減と共に、より磁場精度を向上できる。ポケット中の鉄量は板枚数の変更で、必要量に近似し、磁気モーメントの大きさを調整できる。MRI 用磁石で通常使う鉄シム片の最小単位は 0.06cc である。しかし、0.2ppm を目指す場合にはより細かく磁場を調整するために、鉄 0.01cc 相当(0.017Am<sup>2</sup>)程度のシム片を最小単位として使う必要がある[8]。

図中の中央は磁場計測面(MFMS: Magnetic Field Measurement Surface)である。面は三角要素と節点で構成される図になっているが、節点は磁場計測点(MFMP: Magnetic Field Measurement Point)に相当する。参考文献の[12]と[13]では、それぞれ、768 と 576 点の位置で磁場を計測している。MRI の撮像空間(FOV)は 40～50cm-DSV 程度の領域であるが、多数の計測点と MM 配置位置を準備し、空間的に細かく調整出来る構造としている。以下での計測磁場は 40cm-DSS 面上での計測値である。

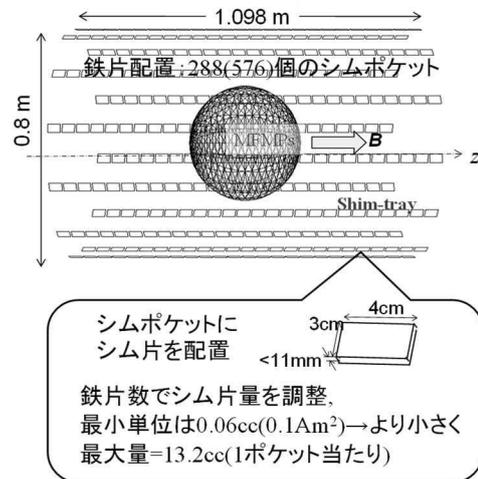


Fig. 4-16 シムトレイと磁場計測面の配置例。

##### 4.6.2. 繰り返しのシミング作業

Fig. 4-17 にはシミング作業の手順を示した。磁場を計測し、その磁場分布について、均一度を調べ、均一度は不十分な場合にはシミング計算(Shimming Calculation)を行い、その結果に基づいてシム片を配置する。

実際のシミング作業では、計測、計算、それにシム片容量に誤差はあるため、一回のシミング作業では、目標の磁場均一度には到達できない。この誤差を補うように繰り返し作業となる。例[13]では 3 回の繰り返し作業であるが、J-PARC で計画している均一度は、MRI より約一桁小さい値であるので、繰り返し作業回数は増えると考えている。

この繰り返し作業の中で、シミング計算は重要な項目である。計測磁場が入力で、シム片配置が出力である。この内容を次に紹介する。

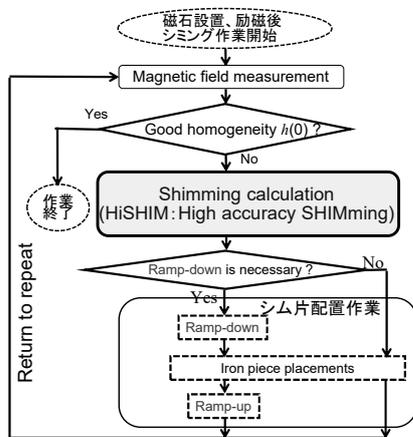


Fig. 4-17 シミング作業の手順。磁場分布が目標の均一度を得るまで繰り返し作業を行う。文献 13, Fig.1 より引用

#### 4.6.3. シミング計算

シミングで目標とする磁場分布は、磁石軸方向を向き、一様な磁場強度分布に近い磁場であり、磁場の軸方向 Z 成分を、シミング計算でも扱う。MRI 装置のような一様な磁場では、これは良い近似である[13]。その結果、シミング計算で  $B$  は、磁場評価点の Z 方向磁場成分で構成され、

$$B^{**} = (-----, B_{Zj}^{**}, -----) \quad (4-8)$$

である。上添え字「\*\*」は磁場の種類を表現し、目標磁場 TG, 計測磁場 MS, 誤差磁場 ER, シム片の磁気モーメント MM による磁場 M, である。

シミング計算では、誤差磁場  $B^{ER}$

$$B^{ER} = B^0 - B^{MS} \quad (4-9)$$

を補正するシム片配置を計算する。ここで、 $B^0$  と  $B^{MS}$  は、それぞれ、目標磁場と計測磁場である。本項のシミング計算の説明で取り扱う磁場で、シミング前の磁場分布は、40cm-DSS 面で、Fig. 4-18 のものである。下側で磁場が低くなっており、最大最小の差は 693ppm と大きな誤差磁場がある。実際のシミングについて、シミング計算法を中心に説明する。

シミング計算の体系は Fig. 4-19 である。計測面は 40cm-DSS で、ここでの磁場計測値からシミング計算の結果に従って、シムトレイの MM 大きさを調整する。ここで、座標系は軸方向を Z 軸とし、水平、垂直方向をそれぞれ、X, Y 方向として

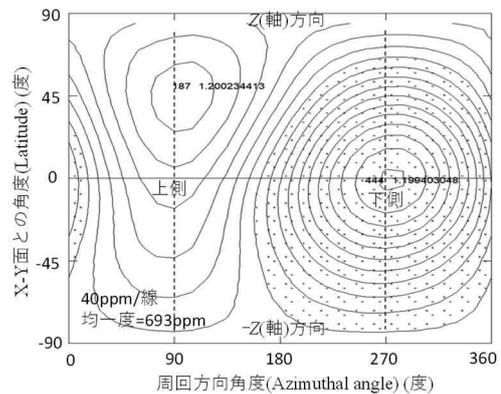


Fig. 4-18 シミング前の誤差磁場分布。メルカトル図法で表示。打点領域は低磁場部分。40cm-DSS 面での計測磁場である。

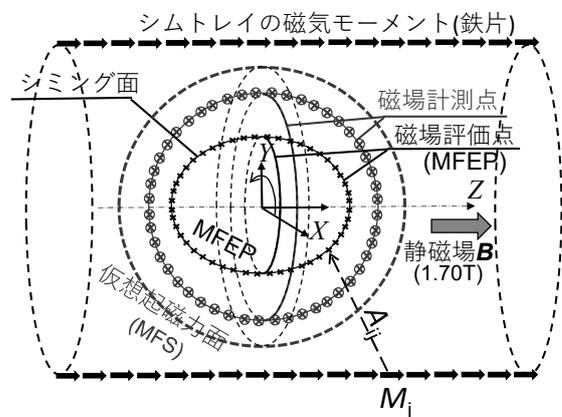


Fig. 4-19 シミング計算体系。軸方向が Z 方向で、X, Y は、水平、垂直方向。

いる。実際のシミングでは、計測磁場から、計測面の内側の磁場分布への内挿計算[42, 43]を利用した。ここでは、40cm-DSS で磁場計測し、MuSEUM 実験領域の 20cm 直径-30cm 長の楕円体表面へ内挿計算した。計測磁場を再現するように、仮想起磁力配置面(ここでは 60cm-DSS)に仮想的に磁気モーメント MM 分布を算出し、その MM 分布で磁場分布を算出している。

シム片が作る磁場は MM の作る磁場で、 $j$  番目  $m_j$  が  $i$  番目位置に作る磁場  $b^M_i$  として、

$$b^M_i = (10^{-7}) \{3(m_j \cdot r_{ij})r_{ij}/r_{ij}^2 - m_j\}/r_{ij}^3, \quad (4-10)$$

で計算できる。ここで、 $r_{ij}$  は  $j$  番目シム片から、 $i$  番目計測点への位置ベクトルである。このうちの軸方向成分  $b_{zi}$  を利用してシミングを行う。一方、ポケットに配置された鉄片は磁場と同じ軸方向( $Z$ 方向)に向き、飽和磁化(鉄  $1cc = 1.71Am^2$ )を持つ。つまり、

$$m_j = (0.0, 0.0, M_j) \quad (4-11)$$

である。応答行列  $\mathbf{A}$  の要素を、式(4-10)の単位 MM あたりの磁場と考えると、

$$A_{ij} = (10^{-7}) \{3Z_{ij}^2/r_{ij}^2 - 1.0\}/r_{ij}^3, \quad (4-12)$$

であり、 $j$  番目位置の単位磁気モーメント ( $1.0Am^2$ )の軸方向成分が  $i$  番目 MFEP に作る磁場の軸方向成分強度である。ここで、 $Z_{ij}$  は  $r_{ij}$  の軸方向  $Z$ 成分である。まとめると、シム片が作る磁場  $\mathbf{B}^M$  は、

$$\mathbf{B}^M = \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (4-13)$$

と書ける。この式は最初に最小二乗法の説明の冒頭の式(2-1)と同じ形であり、 $\mathbf{B}^{ER}$  を補正する、 $\mathbf{M}$  配置を求めるために筆者提案のシミング計算では、最小二乗法を TSVD 正則化で解く。第2章で説明した計算法を利用する。

$$2 \text{ 乗誤差} = (\mathbf{B}^{ER} - \mathbf{A}\mathbf{M})^2 \rightarrow \text{最小} \quad (4-14)$$

とする  $\mathbf{M}$  は、

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{B}^{ER} \quad (4-15)$$

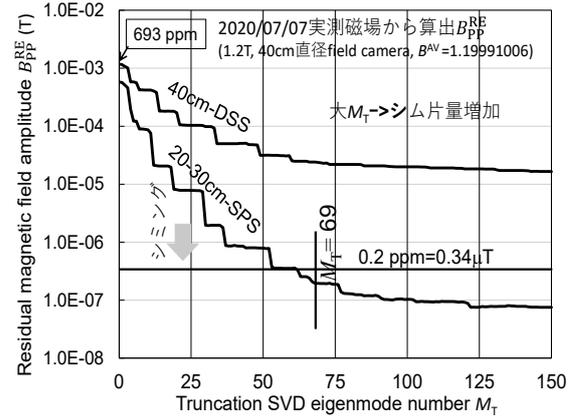


Fig. 4-20 打ち切り固有モード番号  $M_T$  と残差磁場  $B_{pp}^{RE}$  の関係。シミング計算で求めた推定値。0.2ppm 以下にシミングするには  $M_T=69$  が妥当。

であるが、TSVD を用いて

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{M_T} v_k u_k^t B^{ER} / \lambda_k \quad (4-16)$$

である。加算は固有モードについて特異値  $\lambda_k [T/Am^2]$  降順に、打ち切り固有モード番号  $k=M_T$  まで行う。 $v_k$  と  $u_k$  はそれぞれ、 $\mathbf{M}$  と  $\mathbf{B}$  の  $k$  番目固有分布。シミング後の予想残差磁場  $\mathbf{B}^{RE}$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{RE} &= \mathbf{B}^{ER} - \sum_{k=1}^{M_T} u_k (u_k^t \mathbf{B}^{ER}) \\ &= \mathbf{B}^{ER} - \mathbf{A}\mathbf{M}(M_T) \end{aligned} \quad (4-17)$$

である。このシミング計算法では、目標磁場強度  $B^0$  と打ち切り固有モード番号  $M_T$  を、目標磁場分布 ( $\pm 0.1ppm$  以内の磁場変動で、均一度 0.2ppm) が得られるように決める必要がある。この方法を参考文献[8, 44]の 0.2ppm を実現したシミング時の磁場を使って、次に説明する。

前ページの Fig. 4-18 は、シミング前の計測面 (40cm-DSS) 上の磁場分布をメルカートル図法で表示した。この磁場分布は、20-30cm 楕円体表面に内挿計算すると、341ppm である。この磁場分布にシミング計算を実行し、式(4-17)で求めた  $M_T$  と残差の関係が Fig. 4-20 で、残差磁場分布  $\mathbf{B}^{RE}$  から、次式で求めた peak-to-peak 値を表示した。

$$B_{pp}^{RE}(M_T) = \text{Max}[B_i^{RE}(M_T)] - \text{Min}[B_i^{RE}(M_T)] \quad (4-18)$$

40cm-DSS は計測面であるが、内挿計算で 20-30cm の楕円体表面についても表示した。

一般に、 $M_T$  を大きくすると均一度は良好になるが、使用する鉄片量は増加する。そのため、目標均一度を満たす範囲で小さな  $M_T$  を選択する。ここでは  $M_T=69$  を選択する。

次に、この  $M_T=69$  で目標磁場強度を決める図が、Fig. 4-21 である。 $M_T$  とシミング計算で算出した均一度の予想値をプロットしている。シム片の最小単位の 3 種類で示した。通常の MRI 磁石で用いていた鉄片  $0.06\text{cc}(0.103\text{Am}^2)$ 、MuSEUM 実験用に用意した Ni 片  $0.036\text{cc}(0.017\text{Am}^2)$ 、それに無限小の場合である。参考に、鉄の飽和磁化は  $2.15\text{T}$  で、Ni は  $0.60\text{T}$  とした。

シム鉄は磁場を主に低下させるので、目標磁場は高めの方が、シム片量が少なくなる。一方で、高すぎるとシム片配置の解が無くなる(つまり磁化方向を磁場の逆方向とする解を出力する)。また、必要以上に良好な均一度を求めると、過大量のシム片を必要とすることになる。そのため、できるだけ少ない鉄量で、必要な均一度を実現するように、 $B^0$ ,  $M_T$  を決める。その意味で、 $B^0 \geq 1.199685\text{T}$  は妥当ではない。

一方、鉄片  $0.06\text{cc}$  が最小単位の場合、一片の配置で変化する磁場が大きいので、 $0.2\text{ppm}$  には到達できない。しかし、Ni  $0.036\text{cc}$  は  $0.2\text{ppm}$  以下の解がある。例えば、 $B^0=1.199680\text{T}$  のように選択すると良い結果を与える。実際のシミングは Fig.

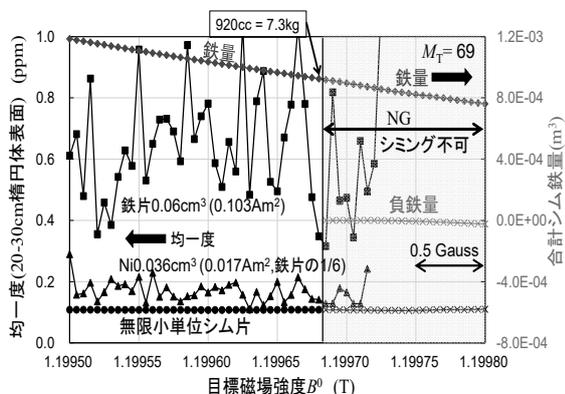


Fig. 4-21 均一度と目標磁場の関係を、異なる鉄量最小単位で示す。0.2ppm 以下にシミングするには  $0.017\text{Am}^2$  (Ni  $0.036\text{cc}$  相当) 程度以下の最小単位のシム片とする必要がある。

4-17のように繰り返し作業となる。繰り返し作業毎に上記の検討を行うことになる。

参考に参考文献[13]より、周回方向に一樣な基本固有モードについて、シミングに必要な鉄量を示した(Table 4-6)。基本固有モードは4.1節のMRI磁石の磁場設計で議論した固有モードとほぼ同じである。シムトレイに配置出来る鉄量は2000cc以下であり、表中で7番目以降の固有モードはシミングできないと言える。使用磁石の主コイル数は6個であり、7番目以降の固有モードは磁石設計では考慮されてないと考える。 $B^0$ にも依存するので、正確な議論には出来ないが、7番目以上の次数の高い固有モードは実際上シミングできないことが解る。

Table 4-6 周回方向一樣な固有モードのシミングに必要なシム鉄片量の例([13]より引用)

2D basic eigenmode No.	$i$	Eigenmode No. $M_{2D}^i$	Error eigenmode strength $P_{ER}^i$ (T)	Estimated iron volume Vol(i) ( $\text{cm}^3$ )
1	1	1	$5.963\text{E}-5$	$5.114\text{E}+1$
2	7	7	$3.588\text{E}-5$	$6.819\text{E}+1$
3	21	21	$4.916\text{E}-5$	$2.986\text{E}+2$
4	49	49	$2.057\text{E}-5$	$4.728\text{E}+2$
5	73	73	$5.440\text{E}-6$	$5.154\text{E}+2$
6	97	97	$2.142\text{E}-6$	$8.886\text{E}+2$
7	121	121	$1.889\text{E}-6$	$3.621\text{E}+3$
8	145	145	$1.750\text{E}-6$	$1.714\text{E}+4$
9	175	175	$8.021\text{E}-7$	$5.073\text{E}+4$

#### 4.6.4. シミング作業の実行

以上の考えによるシミング計算とシミングの実行で、J-PARCで目指す  $0.2\text{ppm}$  の均一度が実現でき、用意した磁場シミングの技術が、J-PARC実験に対応できることを確認したことを紹介しておく。

以上の手法によるシミング計算で、MuSEUM実験仕様の20-30cm楕円体で  $0.2\text{ppm}$  を目指すシミングを行い、目標の均一度に到達している。Fig. 4-22は繰り返し作業による均一度の低下を示している。シミング前では、20-30cm楕円体表面で  $391\text{ppm}$  の均一度であったが、シミング後には  $0.16\text{ppm}$  に出来た。

5 回目までは最小シム片単位を鉄 0.06cc であり、この段階では 0.5ppm 程度で停滞した。6, 7 回目は Ni 0.036cc を最小単位として、0.16ppm を達成している。シミング計算による予測と矛盾しない。

シミング計算やシム片容量には、合計すると最大 7.5% のシム片量の計算・配置誤差があると推定している。このために、1, 3 回目と 6 回目の均一度の変化が大きい時には、予想と実際とがやや乖離してくる。しかし、繰り返し作業と共にこの乖離が解消されることが解る。

Fig. 4-23 には、実際にシミング作業を行った結果、得られた磁場分布を示す。軸方向-垂直方向の磁場強度分布を 0.1ppm 毎の等高線で示してい

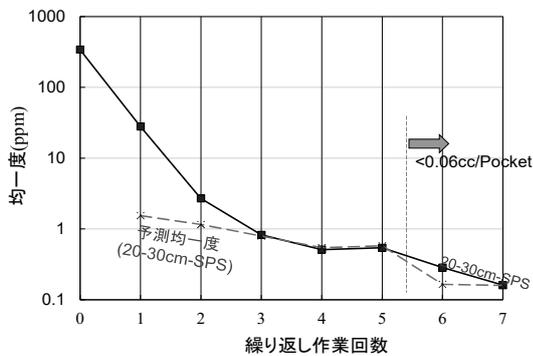


Fig. 4-22 シミング繰り返し作業中の均一度

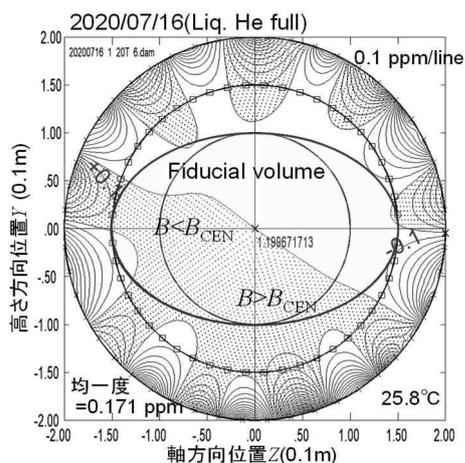


Fig. 4-23 シミング後の残差磁場分布を中心磁場から 0.1ppm 毎の等高線で表示。楕円は MuSEUM 実験領域表面。前等高線が楕円の外にあり、均一度は 0.2ppm 以下である。

が、全て楕円体の外にあり、期待した良好な均一度が得られたと解る。そして、0.2ppm の磁場均一度を実現するためのシミング技術は、これまでに述べた手法で対応可能と結論できる。

#### 4.6.5. 受動シミングの難しい磁場

既に 2.3 節と 4.1 節で述べたように、MRI 磁石のように、均一磁場を発生する磁石の磁場設計では、軸に平行な磁場成分( $B_z$ )を扱う。しかし、計測磁場  $B^{MS}$  は MFEP で計測され、 $|B_{\perp}|$  ( $\ll |B_z|$ ) も含まれ、下記の関係が  $B^{MS}$ ,  $B_z$ ,  $B_{\perp}$  の間に、

$$B^{MS} = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_z^2} \approx B_z \left\{ 1 + 0.5 \left( \frac{B_{\perp}^2}{B_z^2} \right) \right\}, \quad (4-19)$$

の関係がある。この  $B^{MS}$  は、シミング計算に入力され、 $B_z$  として扱われる。たとえば  $B_{\perp}$  が 7 ガウス存在したとしても、 $0.5(B_{\perp}^2/B_z^2)$  は 0.1ppm より小さく、この差異は検知されないまま、シミング計算される。また、受動的に磁化した MM では  $B_{\perp}$  成分を補正することも難しい。そのため、 $B_{\perp}$  はとは無関係にシミング作業が進められる。つまり、シミングの終了後 ( $B^{MS}$  が十分一様にシミングされた後) でも、 $B_{\perp}$  成分は残ることになる。

Maxwell 方程式から考察すると下記のようになる。電流の存在しない領域なので、

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = - \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right), \quad (4-20)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z} \text{ and } \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad (4-21)$$

である。十分シミングされた磁場では、 $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial B_z}{\partial y}$  と  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  はほぼ零である ( $< 0.1 \mu\text{T}/0.1\text{m}$ )。そして、 $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  と  $\left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)$  も零である。しかし、この式に入っていない  $B_x$ ,  $B_y$  成分で、 $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y}$  を満足する  $B_{\perp}$  成分は、シミング後でも残ることになる。この磁場は、ベクトルポテンシャル  $\{0, 0, \phi(X, Y)\}$  で表される  $B_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}$  および  $B_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$  であり、

$$\phi(X, Y) = \sum_n R^n (C_c \cos n\theta + C_s \sin n\theta), \quad (4-22)$$

である。 $\phi(X, Y)$  は位置  $(X, Y)$  でのベクトルポテンシャルの  $Z$  成分 (但し、 $Z$  方向に一様) である。 $(X,$

$Y$ ) は  $(R, \theta)$  座標との関係は  $X=R\cos\theta, Y=R\sin\theta$  であり、 $R$  は  $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ ,  $\theta$  は  $(X, Y)$  の方位と  $X$  軸との角度である。 $n$  は整数である。 $n=0$  では  $\emptyset(X, Y)$

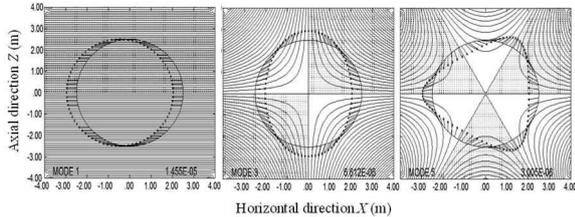


Fig. 4-24  $B_x, B_y$  成分{式(4-21)}磁場の磁力線を左から  $n=1, 2, 3$  で示す。矢印は磁場方向。

は定数となり、磁場( $B_x, B_y$ )は零である。

式(4-22)について、低次( $n=1, 2, 3$ )で  $C_c=0$  の分布を Fig. 4-24 に示した。 $\emptyset$  の等高線で示しており、磁力線でもある。磁場の方向も示している。このベクトルポテンシャルによる磁場は、

$$|B_{\perp}| \propto R^{n-1} \quad (4-23)$$

であり、 $n=1$ (ダイポール成分)以外では、半径に依存し、均一度に影響する可能性がある。これを避けるには、先記のように 7 ガウス以下の  $|B_{\perp}|$  であることを確認する必要がある。

このような磁場の発生源を考察する。 $n=1$  の磁場は、計測軸と磁石軸が平行でない場合、容易に発生する。7 ガウスは MuSEUM 実験の 1.7T の磁場では、0.024 度の軸方向の差で発生する。しかし、均一度には影響しないため、問題とはならない。 $n=2$  の四極磁場成分は、CB の鞍型変形で発生する可能性があるが、 $\pm 0.25\text{mm}$  の変形でも 4 ガウス程度(50cm-DSS 上)と計算できる。これは、1.7T の計測磁場では、0.03ppm の影響でしかない。また、実際の CB 製造でこのような変形は起こり難い。

以上のように、 $B_{\perp}$  成分の影響は、事実上、問題とはならないと期待できる。しかし、以下でその検出法と補正法を提案する。

実機磁場で、均一度に  $|B_{\perp}|$  からの影響が小さいことを確認するために、シミング終了後に、中心部の磁場強度を計測し、磁場計測面での磁場強度と比較することが良いと考える。シミング

終了後では、計測面上では  $\pm 0.1\text{ppm}$  以内の振幅で一様な磁場となる。しかし、式(4-23)で  $n \geq 2$  成分の影響があれば、 $Z=0$  付近ではシミング面より弱い  $|B|$  となる。式(4-23)磁場のために磁場が弱くなる  $Z$  軸付近でも、計測面に近いところでは、シミングによりは一様化される。その結果、磁石中心( $R=0.0, Z=0.0$ )付近では、計測面より弱い磁場となる。例えば、10 ガウスの  $|B_{\perp}|$  ( $n \geq 2$ ) が存在すると、シミング後では磁石中心と計測面の磁場に、0.17ppm の差異  $\{0.5(B_1^2/B_2^2)\}$  が存在することが予想され、この差異は検出できる。

もう一つの検出・補正法を提案する。この方法は、 $B_{\perp}$  の検出法にもなる。 $B_{\perp}$  は Fig. 4-24 の磁場の加算である。一般的に低次( $n=1, 2$ )成分の強さが大きいと考える。そこで、6 本以上の  $Z$  方向電流が FOV を取り囲むように等間隔で配置し、電流配分を

$$I_i = I \cos(n\theta + \alpha) \quad (4-24)$$

として、 $I$  と  $\alpha$  を、試行錯誤になるが、 $n=1, 2$  について、変化させる。軸( $Z$ )方向電流は、 $B_{\perp}$  成分を発生するので、試行錯誤すると計測面の磁場を弱く出来る場合、つまり、式(4-19)の括弧内第 2 項を小さくする場合もある。これが  $B_{\perp}$  成分を補正出来た場合である。MRI 用磁石では、 $B_{\perp}$  成分の影響は小さいと考えるが、g-2/EDM 磁石では無視できない可能性もあるので、Fig. 4-24 の様な磁場を打ち消すシムコイルアレイを用意する計画でいる。次章で再度話す。

#### 4.7. MRI 磁石静磁場設計のまとめ

本章では、一様磁場を発生できる起磁力配置を、TSVD 正則化で求める MRI 用磁石の磁場設計技術について説明した。3 つの Step で起磁力配置を設計する。SVD は電流分布から撮像領域に相当する領域(FOV)表面に作る磁場への応答行列に対して実行している。

Step-1 では、円筒状に多数配置した線輪電流の電流分布を、FOV に相当する領域で、均一磁場を発生するように、算出する。特異値(T/A)の大きな固有モードから一様磁場に必要の強度で加

算する。固有モード数を増加させると、磁場の  
一様な領域が広まる。また、電流ピーク数は加  
算固有モード数に一致する。

Step-2 では、前 Step で求めた電流分布でピーク  
となった位置にコイルブロック(CB)を配置する。  
CB の断面形状は、Step-1 で求めた固有モード強  
度を再現するように、調整する。この Step-2 では、  
各 CB の電流は連続値としている。

Step-3 では、CB 断面に導体の巻き線構造を考  
慮する。導体を選択し、Step-2 の CB 断面に近い  
断面形状を再現するように巻き線構造を想定  
し、半径と軸方向位置を微調整して、Step-1 の固  
有モード強度を再現するようにする。求めた起  
磁力配置が、幾何学的な設計仕様、経験磁場な  
どの導体仕様と矛盾するならば、必要に応じた  
Step から再検討を行う。

鉄 yoke を含む体系でも、本章の考え方が適用  
可能であることも説明した。

以上の手法で一様磁場を発生できる起磁力配  
置を設計できる。しかし、実際の磁石では、組  
み立て誤差や設置箇所の周囲の鉄材などの影響  
などによる誤差磁場が含まれ、磁石設置直後  
には設計磁場のような一様磁場は実現できて  
ない。そのため、使用開始前に磁場シミングを  
行い、設計磁場に近い一様磁場にする。

筆者が提案しているシミング手法は、やは  
り、TSVD 正則化利用のシミング計算を中心と  
する手法である。数百点のシムトレイポケット  
に配置するシム片(多くは鉄片)の磁気モー  
メント MM から数百点の FOV 表面磁場への  
応答行列に SVD を実行する。誤差磁場の成分  
を固有モードの成分強度で把握し、均一度仕  
様を満たす(残差磁場の推定値が小さくなる)  
打ち切り固有モード番号( $M_T$ )以下の低次成分  
の固有モードの強度を打ち消すように MM を  
配置する。この手法を MuSEUM 実験に利用  
予定の MRI 磁石磁場に適用し、J-PARC 実  
験で必要とする 0.2ppm の磁場均一度を  
実現したシミング試行を説明した。但し、  
MRI 使用時に比べシミングで利用する最小  
単位のシム片を、1/6 以下とする必要があ  
ることも解った。

限られた時間と紙面のため、詳しい説明は  
出来なかったが、設計計算の概略を感じて頂  
けたと期待します。さらに、興味ある人は  
参考文献を読んで頂けることを期待します。

以上の技術は現在準備中の g-2/EDM の磁  
石設計や磁場調整に利用していく計画で、  
進めています。

## 5. g-2/EDM 磁石の磁場設計

高エネルギー加速器研究機構(KEK)ではミュオン(Muon)の異常磁気能率/電気能率( $g-2/EDM$ )を精度良く計測する計画があり、実験準備を進めている。Muon の  $g-2/EDM$  を、従来に比べて精度を向上させて計測する[5, 6, 45, 46]ために、実験空間では MRI に比べ約 1 桁良い(均一度が小さい)一様磁場を求める。これまで説明してきた TSVD を使った最小二乗法では、利用する固有モードを増加させることで、極めて良好な均一度を持つ一様磁場を発生可能な起磁力配置を設計できる。また、磁場シミングも実行できると考え、設計を進めている。その設計に必要な線輪電流や円形 CB の磁場についても、前章までに、十分な精度を持つことを説明した。

このような考えとこれまで説明してきた磁場設計手法を使って、 $g-2/EDM$  実験で使用する超電導磁石の起磁力配置・磁場設計を進めている。

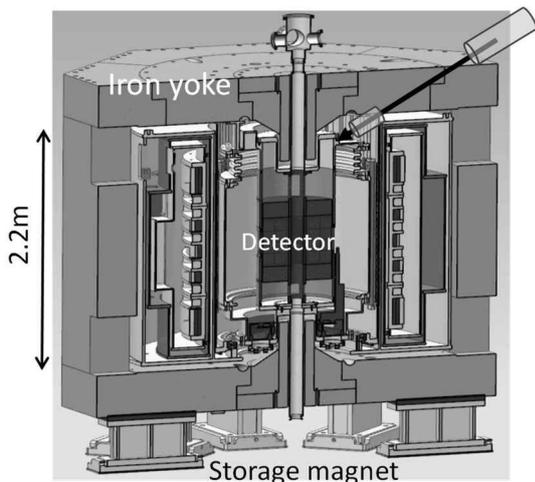


Fig. 5-1 ミュオン蓄積磁石の計画断面図。

Table 5-1 Muon 蓄積磁石(MSM)の仕様

Parameters	Values
Magnetic field strength	3.0 T
Homogeneity ( $B_z$ )	< 1.0 ppm (0.2 ppm 2D)
Area with Homogeneous magnetic field	R: 0.318 m to 0.348m Z: -0.05 m to +0.05 m
$n$ -index of weak focus field	0.0 to 3.0E-4
Radial magnetic field component $B_R$	$B_R > -1.0E-4$ T
Current drive	Persistent mode

ここでは、ミュオンの螺旋入射[6]と両立する磁場分布で、ミュオン蓄積領域の均一磁場を確保できる磁場設計および磁場の調整装置、Muon 入射関連の磁場を紹介する。

### 5.1. 主磁場

Fig. 5-1 はこの実験で使用する超電導磁石の計画概要を断面図で示し、Table 5-1 には、仕様を書いた。この磁石の上側から、鉄ヨークを貫通した入射用の穴からミュオンビームを入射する。この磁石は、超伝導コイルにより磁石中心面付近では 3.0T の一様磁場を発生する。その一様磁場中に Muon を周回させ蓄積する。

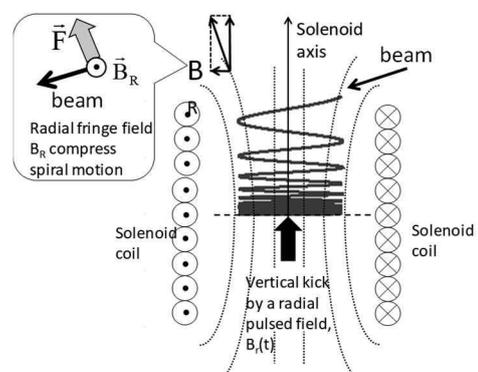


Fig. 5-2 ミュオンビームらせん入射の軌道概念。文献[6], Fig.1 より引用。

入射軌道の概念を Fig. 5-2 に示した。上部から入射した Muon は、磁場中で周回しながら軸方向に移動するが、磁石の中央水平面以外では磁場の  $B_R$  成分が存在し、この磁場から受ける軸方向力で徐々に Z 方向速度を減速する。そして、中心面の Muon 蓄積領域に到達したタイミングで、 $B_R$  パルス磁場により Muon 軸方向移動を止めて、蓄積する。Muon を一様磁場中に蓄積することが主たる役目であるということから、この磁石を MSM(Muon Storage Magnet)と以下では呼ぶ。

この MSM には、均一磁場が重要である MRI 磁石と共通な特徴が有るので、MRI 磁石の磁場設計で説明した三つの Step を使って設計する[7, 10]。

### 5.1.1. Step-1

最初に、どこに起磁力(電流、磁性体)を配置すべきか?を把握するために、線輪電流を多数配置して検討する(Fig. 4-1, Step-1 と同様)。Step-1 開始時で決まっていることは下記の3項目である。

- (i) 従来以上の計測精度を得るため、良好な磁場均一度が必要で、中心半径 33.3cm で幅 3.0cm, 軸方向高さ 10.0cm の円筒領域(ミュオン蓄積領域)で軸方向磁場  $B_z=3.0T\pm 0.1ppm$  (均一度 0.2ppm)の範囲である。
- (ii) 入射領域では軸方向移動速度を弱めるように、 $B_R>0$ が必要である。
- (iii) 超伝導磁石であり、MRI 磁石技術を応用する。永久電流モードで運転し、NbTi 超伝導線を用い、導体の最高磁場を 5.5T 以下で、 $125A/mm^2$ 程度とする。

上記の条件を満たす起磁力配置概念を探索するために、MRI 磁石設計と同様のステップ (Fig. 4-1 参照) を経て、磁石の起磁力配置概念を決める。MRI では均一磁場の仕様が重要であったが、ここでは、さらに(ii)の  $B_R$  仕様を検討する必要がある。(iii)は、MRI 磁石様の超伝導磁石の導体仕様として考えた項目である。

Step-1 では試行錯誤で検討せざるを得ない。種々の起磁力配置位置の候補をいくつも試すことになる。実験装置本体(ビーム軌道ダクト、蓄積容器、検出器、等)を考慮すると、Muon 軌道・蓄積領域からは、離れて配置する必要がある。一方、あまりに離れると、磁場分布の調整が難しく、本項の最初に書いた3項目の条件を満たせなくなると共に、必要以上の磁石製作コストの増大になる。この背景で、多数の起磁力配置案を検討したが、MRI 磁石の磁場設計に関連して開発した手法の Step-1 は有力な手法であったことは強調する。

試行錯誤した中で、代表的な2つの案を紹介する。Fig. 5-3(a)と Fig. 5-3(b)である。MSM の Step-1 の概念検討を行った線輪電流(FL: Filament Loop)を示す。Fig. 5-3(a)では、円筒状に線輪電流を配置している。一方、Fig. 5-3(b)では、均一磁場領域を取り囲むように線輪電流を配置している。

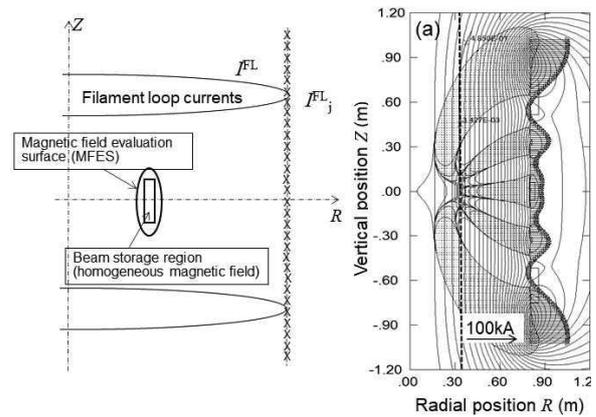


図 5-3(a) Muon 蓄積磁石の概念検討 1  
文献[7], Fig.2 と Fig.4 より引用

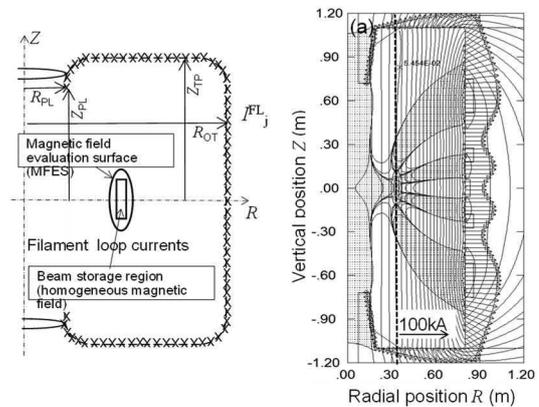
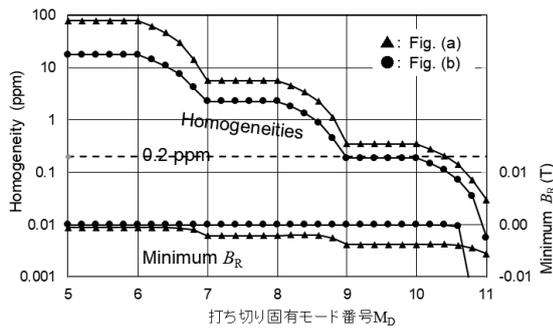


Fig. 5-3(b) Muon 蓄積磁石の概念検討 2。  
文献[7], Fig.2 と Fig.4 より引用

長方形が Muon 蓄積領域であるが、それを取り囲むやや大きな楕円の表面に MFEPs を置いている。高次成分を把握し易くするためである。

Fig. 5-3(c)には、打ち切り固有モード番号  $M_T$  を決めるための、式(2-13~15)を利用し、均一度と  $M_T$ (実数である)の関係を示した。Fig. 5-3(c)からは、(a)、(b)のどちらでも均一度は実現できると推定できる。(a)では  $M_T=10.4$ (10 番目までの全てと、11 番目の 40%を利用)で、(b)では  $M_T=10.1$ (10 番目までの全てと、11 番目の 10%を利用)で、均一度は 0.2ppm を下回る。この図で、5→6, 7→8, 9→10 の部分で、均一度が改善してない理由は、偶数番目の固有モードでは、 $Z=0$  面に対して、反対称な電流・磁場分布であり、利用できないためである。



**Fig. 5-3(c) 打ち切り固有モード番号の検討。**  
**対象条件から奇数番目固有モードのみ使用。**  
**文献[7],Fig.5(a)より引用**

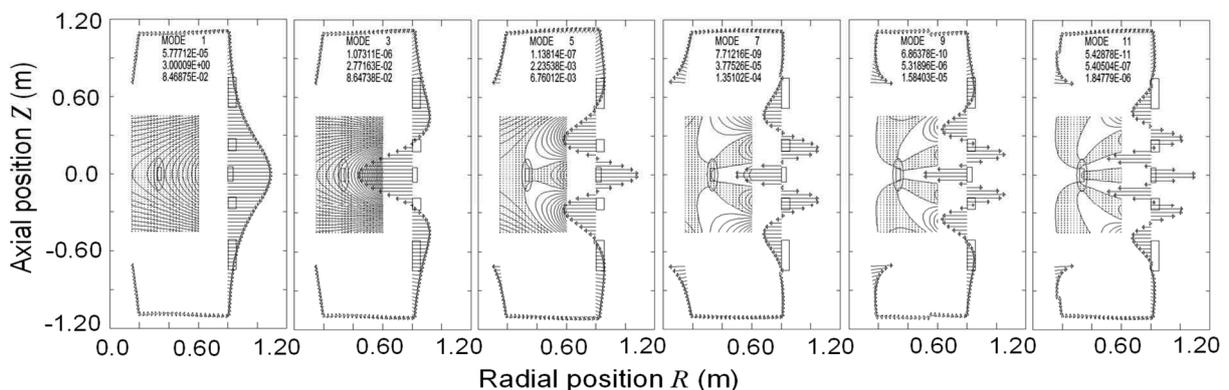
Fig. 5-3(c)の検討から式(2-11)で電流分布(ただし、 $M_T$ は実数として10.4および10.1として)を求め、磁場分布を計算した結果は、各図の右側に示す。上下に走っている線は等磁束線(磁力線でもある)であり、直積領域から放射状の様になっている線は磁場強度等高線である。3.0T に対して一桁毎( $\pm 0.1, 1.0, 10.0$ )にプロットしている。前章の MRI 磁石磁場設計と同様に打点で示した磁場が高い領域( $B > 3.0$  T)であり、起磁力源(CBs)から均一磁場領域に伸びる。

参考に、Fig. 5-3(d)に、Fig. 5-3(b)の配置による、11 番目までの奇数番( $Z=0$  面に対して対称)固有モードを示す。周囲を囲む矢印が電流分布(半径大方向が正)を示し。蓄積領域周囲には磁力線(等磁束線)を示した。MRI 磁石の場合と同様に、高次成分ほど特異値は小さくなるが、固有

モードの必要強度も弱くなっており、比較的良設定な問題となっている{Fig. 5-3(b)の場合}。磁場分布に影響が大きな位置は、直積領域の半径大側の位置と、半径最小の位置の上下部と解る。また、MODE11 は 10%のみ、反映されるので、多くは一様磁場に対して残差磁場として残る。このため、MODE11 の磁場強度分布が、求める磁石の残差磁場として残る。これらの固有モードでは、求める磁場の構成に必要な符号は考慮されてない。このため、実際の残差磁場は、MODE11 の打点領域(磁場が高い領域)と非打点領域が逆となってくる。

この 2 つの候補では、設計条件の項目(ii)で、Muon 入射軌道上の  $B_R > 0$  が重要となる。Fig. 5-3(c)には、軌道上の  $B_R$  の最小値も示した。Fig. 5-3(a)の場合には、 $B_R < 0$  が軌道上に存在する事を示しており、使用できない起磁力配置であると理解できる。その理由について説明する。

電流の無い領域では、 $\text{rot}\mathbf{B}=0$  より、 $dB_Z/dR = dB_R/dZ$  である。 $dB_Z/dR > 0$  であれば、 $dB_R/dZ > 0$  も得られ、上下対称であるため、赤道面で  $B_R=0$  であるため、項目(ii)が求める  $B_R > 0$  の磁場が得られる。2 つの図{Fig. 5-3(a), Fig.5-3(b)}で、 $R=0.333\text{m}$  を Muon の入射軌道に近いと考えると、この線の位置より半径が大きくなるところに磁場の高い領域が必要である。この意味で、打点領域が、 $R=0.333\text{m}$  より大きな位置に必要である。



**Fig. 5-3(d) MSM の概念設計に用いた SVD 固有モード。** 各フレームで、中心部の等高線は等磁束線(磁力線)、周辺の矢印は線輪電流の電流分布(半径大側が正電流)、最上部に MODE 番号、3 個の実数は上から、特異値、3.0T 実現のためのモード強度、分布の peak-to-peak 値。偶数番固有モードは反対称であり不使用。文献[7]Fig.5(b)より引用

この条件で考えると、Fig. 5-3(a)では、 $Z < 0.60\text{m}$ で半径の小さいところに磁場の高い領域があり、 $dB_Z/dR = dB_R/dZ < 0$ であり、項目(ii)が満たされない。一方、Fig. 5-3(b)では、磁場の高い領域が全領域( $Z = 0.0 \sim 1.1\text{m}$ )で、 $R = 0.333\text{m}$ より半径の大きな位置にあり、 $dB_Z/dR = dB_R/dZ > 0$ となる。 $B_R > 0$ を可能としている。

以上をまとめると、円筒状の線輪電流配置{Fig. 5-3(a)}では、Muon入射軌道の全領域で $B_R > 0$ とする条件(ii)を実現できない。しかし、Fig. 5-3(b)のように線輪電流が蓄積領域を取り囲むように配置しておくことで条件(ii)を実現できる。半径小側から蓄積領域に向かって、水平面付近で磁場の高い領域を発生する。これにより、 $B_R < 0$ を作っていた磁場の高い部分が、 $R = 0.333\text{m}$ の近傍からは無くなるためである。

Step-1では、このような検討してFig. 5-3(b)の磁場分布と起磁力(線輪電流)配置を概念設計結果とした。蓄積領域付近の磁場強度分布をFig. 5-4に示した。磁場強度等高線は0.1, 1.0, 10.0 ppmであるが、蓄積領域には入って無く、均一度が0.2ppm以下である。線輪電流の一部は、鉄 yoke の配置を想定している。Step-2以降でこの磁場を再現する起磁力配置(鉄 yoke と CBs)を求める。

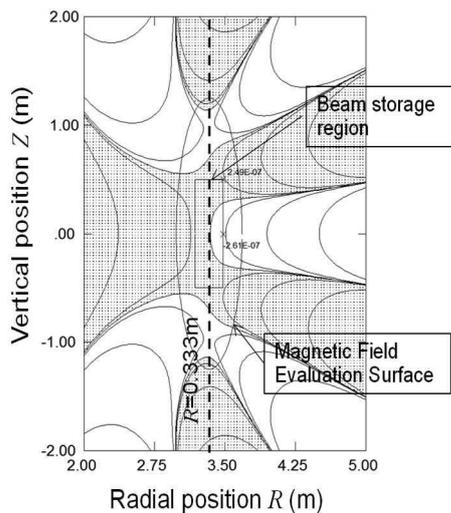


Fig. 5-4 蓄積領域付近の磁場強度分布を  $3.0\text{T} \pm 0.1, 1.0, 10.0\text{ppm}$  の等高線で示す。打点領域は磁場の高い部分。文献[7], Fig. 6を引用。

### 5.1.2. Step-2 および Step-3

SVD 固有モード分布強度は、鉄 yoke や CB を用いて設計する磁石においても、線輪電流で求めた Step-1 の固有モードでその強度{式(2-12) :  $P_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}^{\text{IG}} / n_p$ }を求め、Step-2, Step-3 でも固有モード強度が再現されるように起磁力(CB 及び鉄 yoke)を配置する。これは MRI 用磁石と同じ考え方であるが、ここでは、CB 位置形状だけでなく、鉄 yoke の形状も調整する。しかし、この2つの Step では、検討は直線的で、試行錯誤は無い。つまり、分布電流の Step-1 結果を、離散配置の CB と鉄 yoke に置き換え、配置の微調整で、SVD 固有モード強度を調整するのみである。

Fig. 5-5 は Step-2 の最初に計画した 2D(半径  $R$ , 軸方向位置  $Z$ )起磁力配置である。矢印は、残差の電流分布であり、この残差電流は固有モード強度の調整を終了した段階では零に近づく。この段階の考え方は MRI 磁石の Step-2, Step-3 と同じである。Fig. 5-6 には繰り返し計算中の収束状況を示した。2つのステップを合わせて7回の計算で収束した。

得られた起磁力配置と磁場分布が Fig.5-7 である。均一度は peak-to-peak 値で  $0.13\text{ppm}$ (右下図)である。入射領域に  $B_R < 0$  は無い(右上)。これら

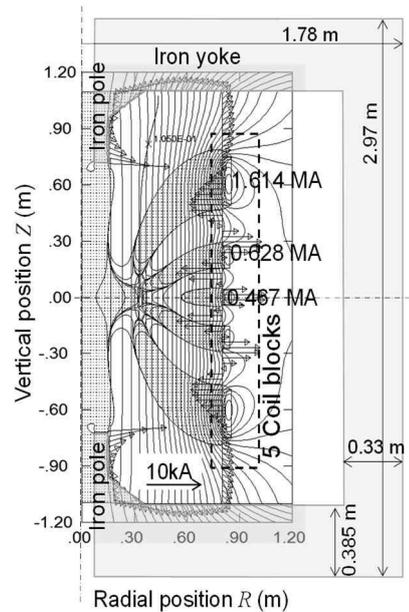


図 5-5 Step-2 の初期配置。文献[7], Fig.7 より引用。

### 5.1.3. 鉄 yoke 磁場(3D)の扱い

実際の鉄 yoke には、Muon 通過用、シムトレイ 取り出し用、それに、冷凍機との間に液体 He 輸 送パイプ用、などに多くの穴が開く。これらの 穴は対称性を考え、全て、磁石軸周りで 4 回対称 の配置としている。しかし、磁場分布は周回方向 にも波打つ 3D 磁場分布であるが、3D 磁場では、CB 配置を調整出来ない。このため、次の手順で鉄 yoke を含めた 3D 磁場を 2D 化して、起磁 力配置の最適化を行っている。

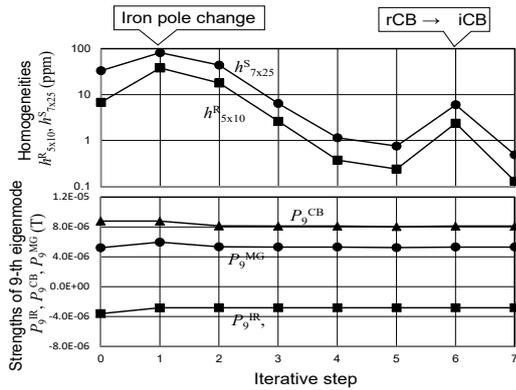


Fig. 5-6 繰り返し計算(Step-2 & -3)の収束状況.  
文献[7], Fig.10 より引用

は、仕様条件を満たし、導体経験磁場(5.0T)と電 流密度を NbTi 線材で実現可能な超伝導磁石である ことを確認できた。鉄 yoke には中心部に上下 対称な pole(鉄)を配置し、5 個の CBs とともに、 均一磁場領域とその周辺部が Step-1(Fig. 5-4)で計 画した磁場分布と同様になっていることがわかる。 これは、式(2-12)の固有モード強度を同一に しているためである。

以上の様に g-2/EDM 詳細計測用磁石の実現性 が確認できた。これを受けて、詳細設計が進め られている。実機で均一磁場を得るために重要な シミングには、MRI 磁石用に TSVD 開発した TSVD 応用のシミング計算手法(4.6 節に記述)を利用 する予定である。

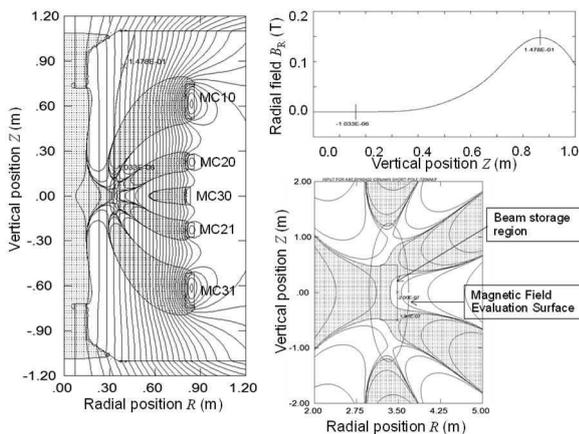


図 5-7 g-2/EDM 磁石の起磁力配置案.  
文献[7], Fig.11 より引用.

- (1) 鉄 yoke 形状と CB 配置を仮定。
- (2) 非線形 3D 磁場計算コードで磁場計算。
- (3) 磁場分布を周回方向に平均化して 2D 磁場。
- (4) 2D 磁場の均一度を確認、良好なら終了。
- (5) CB 磁場  $B^{CB}$  を計算(2D 磁場)。
- (6) 鉄 yoke 磁場(2D) $B^{IR}$  を(5)と(4)の差異で算出。
- (7)  $B^{CB}+B^{IR}$  が 2D 一様磁場となる CB 配置に調整
- (8) 調整 CB 配置で 3D 非線形場計算
- (9) CB 配置可能性を確認→(3)or(1)へ戻。

ここで、(9)では、導体の経験磁場や全体の大き さをチェックする。妥当で無ければ、再度(1) に戻り、配置を再考する。また、CB 配置上に問 題が無ければ、(3)に戻り、(4)で均一度を調べ、 目標に到達して無ければ、繰り返し計算を続ける。 (7)では、式(4-7)の様に固有モード強度を Step-1 で決めた値に、数回の繰り返し計算{(7)は 鉄 yoke の無い MRI 磁石の Step-2, Step-3 と同一計 算法}で、調整する。すでに Step-1 で磁場の概念 設計は終了しているので、(3)-(9)の繰り返し計算 を続けると、目標の均一度(Step-1 の均一度)に必 ず達する。

### 5.1.4. 磁場設計の Update

Fig. 5-8 は現状で考えている鉄 yoke の形状を 180 度分で示した。Muon 入射用、液体 He 輸送管 用、それにシムトレイの出し入れ用に貫通孔が 配置されている。全て、4 回対称となるように、 必要でない貫通孔(但し、ケーブル通過などに使 う使うことになるかと予想)も設けている。

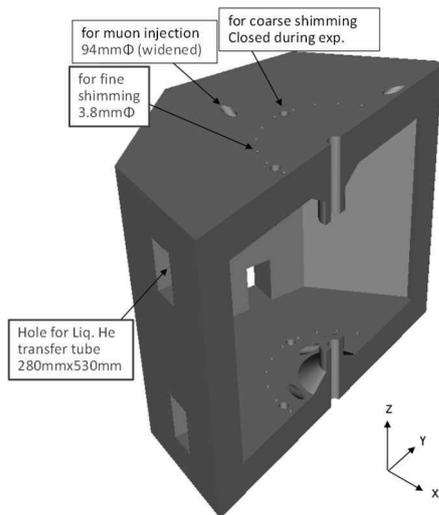


Fig. 5-8 Update した鉄 yoke 形状. 文献[47], Fig. 2 より引用

この鉄 yoke に対して、これまで説明した方法で求めた起磁力配置と 2D 再構成磁場(鉄 yoke による磁場)を Fig. 5-9 に示す。鉄 yoke の内面(蓄積領域側)に線輪電流を多数配置し、鉄 yoke の 2D 平均化磁場を再現している。電流を決めるために、左図の実線で囲まれた領域の計算磁場を、周回方向平均化した磁場として、用いた。

$R=0.45\text{m}$  付近の電流値の局所的な変動は、この付近の貫通孔(シムトレイと Muon 入射用)による鉄 yoke の磁場への寄与の低下を反映している。また、中心上下のポール部では磁気飽和を反映

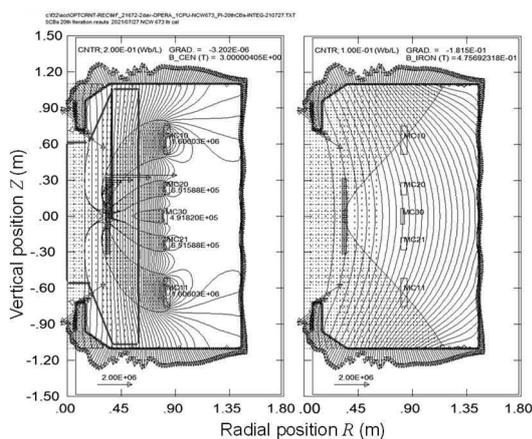


Fig. 5-9 Update 鉄 yoke 形状を反映した起磁力配置と磁場分布。左：磁力線と磁場強度分布(打点領域は磁場の高い部分)、右：鉄 yoke の作る磁場の磁力線。矢印は鉄 yoke 磁場を再現する線輪電流. 文献[47], Fig. 3 より引用

Table 5-2 Electromagnetic parameters

Parameters	M20210727 (July 2021)	M20160422 文献[7]
Number of CBs	5	5
Max. AT of a CB	1.6060 MAT	1.594 MAT
Total Ampere-turn	5.0071 MAT	4.988 MAT
Max. $B$ on conductor	5.39 T	4.99 T
0.3 mT $B^{\text{cr}}$ Z-position	10.5 cm	12 cm
Homogeneity	0.079 ppm	0.13 ppm
Pole face Z position	0.720 m	0.720 m
Pole radius	0.070 m (in), 0.148 m (out)	
SC conductor size (Cu ratio 2.5)	1.40x2.10mm	1.53x2.21mm
Conductor current	417.15 A	417.88 A
$B$ due to Iron yoke	0.47569 T	0.47871 T

して電流密度(1.7MA/m)となっている。これらのことは、鉄 yoke 磁場を 2D で再現する線輪電流が妥当に求められていることを示している。

こうして求めた CB 群の電磁パラメータ(M20210727)を Table 5-2、Table 5-3 に示す。参考に Fig. 5-7[7](M20160422)のパラメータも示している。両者の差異は、Fig. 5-8 では鉄 yoke に開けている貫通孔は Muon 入射口(8本)のみであるが、Update した Fig. 5-9 では、Fig. 5-8 の貫通孔が増加した鉄 yoke 形状が反映されている。この影響で、Update した起磁力配置(M20220727)では、起磁力がわずかに増加した。しかし、大きな変更はない。Table 5-2 の最下行に鉄 yoke が作る磁場を書いているが、3.0T のうち、約 15.86%の磁場を鉄 yoke が作っている。鉄 yoke は中心上下部に円筒突起形状(ポールと呼ぶ)を持ち、鉄 yoke による磁場を半径小側で磁場が強いている。この結果、Step-1 で計画した蓄積領域の半径小側で磁

Table 5-3 CB parameters (M20210727)

Coil Blocks	Current (kAT)	Position Radius $R$ (m) Axial $Z$ (m)	Width (m) $R$ -Width $Z$ -Width	Turns $R \times Z$ -Lack
MC10,11 (2CBs)	1606.027	0.8274361 $\pm 0.6330839$	0.05487120 0.23561400	36x10 7-2
MC20,21 (2CBs)	651.588	0.8261195 $\pm 0.2294832$	0.05182280 0.10129200	34x46 -2
MC30 (1CB)	491.820	0.8154354 0.0	0.03048400 0.12991800	20x59 -1

場を強くし、 $B_R > 0$  を Muon 入射軌道上で実現できている。

### 5.1.5. 2D 再構成磁場と周回方向磁場変動

Fig. 5-9 の左図は、2D 磁場であり、線輪電流の集合で磁場分布を表現している。非線形計算を行わないので、2D であるが、磁場分布を高速に算出できる。この理由で、Muon 入射条件、キッカー磁石の配置位置の最適化などの入射条件の探索に利用している。そのため、2D 磁場の再構成精度を確認している。

Fig. 5-10 は、2D 再構成磁場(Fig. 5-9 左)と 3D 非線形磁場を比較している。図で○は 3D 計算値を周回方向に平均した値である。この磁場を再現するように 2D 再構成磁場のための線輪電流分布を決めている。その結果、○と 2D 再構成磁場(実線)は、 $B_R, B_Z$  共に、よく一致している。しかし、 $Z > 0.95\text{m}$  では Muon 入射用の貫通孔などの影響で、周回方向にリップルが大きい。この付近では、Muon 入射軌道の計算には、3D 非線形磁場計算による磁場データが必要である。

Fig. 5-11 は蓄積領域付近の磁場を示した。周回方向平均の 2D 磁場は、 $\pm 0.1\text{ppm}$  に入っている

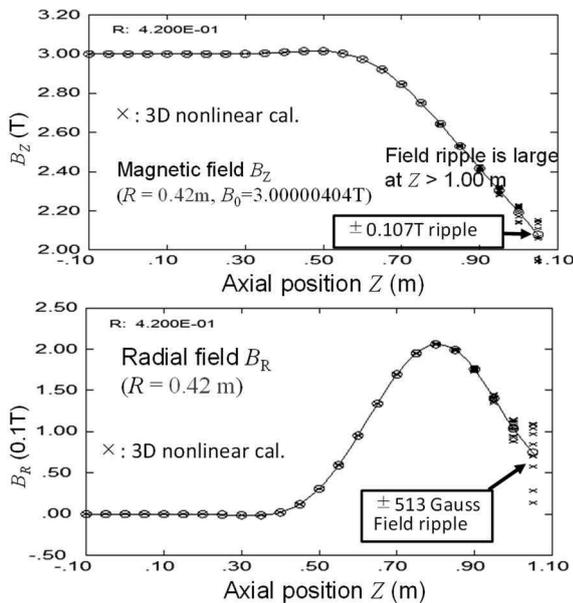


図 5-10 2D 再構成磁場と 3D 非線形計算結果の比較。  $Z < 0.95\text{m}$  では両者はよく一致。鉄 yoke 磁場が良く再現されている。

が、周回方向の個々の位置での磁場を見ると×のように、 $\pm 8\mu\text{T}$  で、周回方向に磁場に分布が有る。この分布は、 $\pm 0.1\text{ppm}$  より大きいが、設置後に磁場シミングすることで、目標の均一度に調整出来ることは確認している。

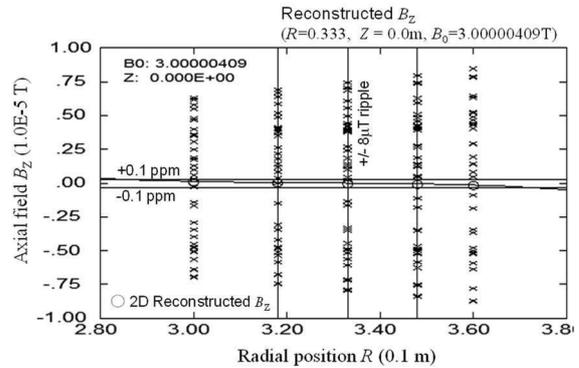


図 5-11 蓄積領域の磁場分布リップル。×は周回方向 10 毎との磁場強度。2D 平均磁場○と再構成磁場(実線)は良く一致する。

## 5.2. 調整装置

g-2/EDM 詳細計測を行う非常に均一な磁場を実現するために、 $0.2\text{ppm}$  より良好な均一度を実現できる起磁力配置としている[7, 47]。起磁力配置を、MRI 用磁石の設計で開発した特異値分解応用の磁場設計を応用して設計している。また、この磁場に対して、Muon の入射条件を検討している[6, 49, 50]。

しかし、MRI 磁石に関連して説明した様に、設置磁石には種々の誤差磁場が混入する。そのため、MRI 磁石同様にこの誤差磁場を補正する機構は必須[2, 51]である。このため、受動的シミング手法[8, 13](強磁性体の磁場シム片を利用)、能動的シミング法[51, 52]、それに、軌道微調整用のステアリング磁石[53, 54]を検討している。

### 5.2.1. 受動磁場シミング

磁場補正の基本的手順は、Fig. 4-17 と同じである。シミングに使う機器について、Table 5-4 に説明し、配置概念を Fig. 5-12(a), (b)に示す。本項で、受動シミングについて説明する。

受動シミングでは、補正磁場発生源は強磁場(3.0 T)中で磁化した強磁性体片(鉄片など)である。磁化による磁気モーメントが作る磁場で、誤差磁場を補正するのが受動的シミングである(4.5節参照)。

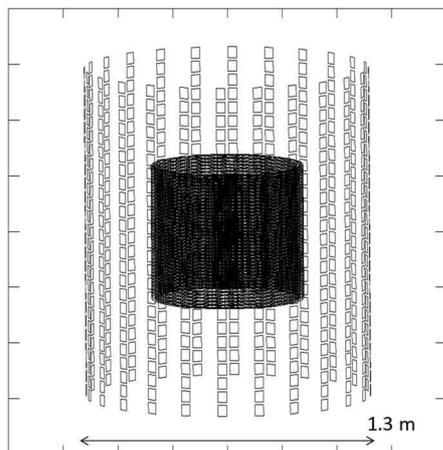


Fig. 5-12(a) 磁場計測面(内部円筒)とシムトレイ(角形)の配置. 文献[51], Fig. 2(a)より引用。

受動的シミングの作業手順は、MRI 磁石の場合(Fig. 4-17)と同様で、シム片の配置を算出する、シミング計算も MRI 磁石の場合と同様に、4.6.3 項のシミング計算手法[13]を用いる計画でいる。これらの手法は、既に、均一度 0.2ppm に対応できる実績があることは強調しておく。

シムトレイには、Table 5-4 上部のように Coarse と fine の 2 種類を用意している。共に幾何学的配置は Fig. 5-12(a)と同様である。Fine 用では配置出来る鉄量は少ない(5cm<sup>3</sup>/1 ポケット)。Coarse は鉄量を多く使い(85cm<sup>3</sup>/1 ポケット)、磁場補正の能力は大きい。一方、シムトレイ取り出し用の穴

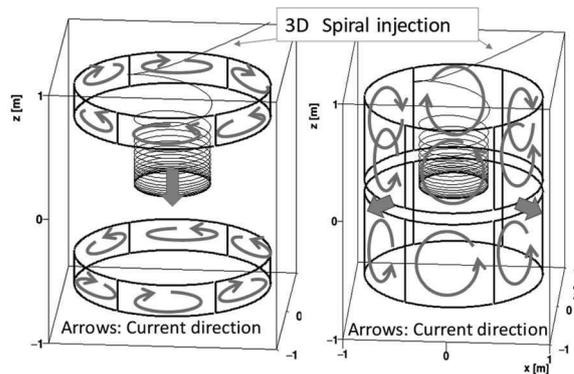


Fig. 5-12(b) シムトレイ配置図. 左:  $B_z$  type シムコイルアレイ, 右:  $B_R$  type シムコイルアレイ. 文献[51], Fig. 2(b)より引用。

は、それぞれ、38mm φ、90mm φである。後者(Coarse 用)は励磁時には閉止するが、fine 用は、鉄 yoke による磁場を変化させず高精度なシミングを実行できるように、開口状態を保つ。

シムトレイ用穴の端では、穴の半径程度の距離で、2.0→0T に磁場勾配が存在し、それぞれ、100T/m と 45T/m 程度と見積もる。磁場勾配により鉄シム片の  $MM(M [Am^2])$ に加わる磁力  $F$ は、

$$F = \nabla B \cdot M \cong M_{SAT} \nabla B, \quad (5-1)$$

で、磁場勾配とシム片量に比例する。ここで、 $M_{SAT}$  は飽和磁化した強磁性体の磁気モーメントで、鉄片の体積が  $V \text{ cm}^3$  の場合、 $1.71V [Am^2]$  である。Coarse で  $20 \text{ cm}^3$ /ポケットであれば、157kg であり、fine で  $1 \text{ cm}^3$ /ポケットの場合は、17.5kg である。MRI 磁石では、シムトレイの取り出し部分で、2T/m 程度の勾配磁場であるが、Muon 蓄積用磁石での  $\nabla B$  は非常に大きい。

Table 5-4 Tools of Precise Magnetic Field Shimming for  $g$ -2/EDM Magnet. 文献[51], Table 1 より引用。

Shimming Tools		Capacities (actual)	Roles and usage
Passive tools (magnetized iron pieces)	Coarse shimming shim-trays	$>3.50 \times 10^4 \text{ cc}$ ( $<6000 \text{ cc}$ )	Rough shimming (shimming for high ordered eigenmodes) using large volumes of iron pieces with magnet current ramp-down, and with iron-yoke ceiling removed and reassemble.
	Fine shimming shim-trays	$<2000 \text{ cc}$ ( $<100 \text{ cc}$ )	Fine shimming (shimming for low ordered eigenmodes) with magnetic field on and without iron-yoke ceiling removed. Fe volume in a shim-pocket should be less than 1 cc.
Active tools (Shim-coils arrays)	$B_z$ type shim-coils 6 coils in longitudinal array	3 Gauss $B_z$ (1.0 kA)	In rotational direction, uniform, $\cos\Theta$ and $\cos 2\Theta$ like distributions can be corrected.
	$B_R$ type shim-coils 6 coils in longitudinal array	6 Gauss $B_R$ (1.0 kA)	In rotational direction, uniform, $\cos\Theta$ and $\cos 2\Theta$ like distributions can be corrected.

一方で、Muon 磁石での $\nabla B$ は、シムトレイ用穴の端部に集中しているため、個々のポケットのシム片量とその磁力を考慮する。現状では実際のシム片量は不明であるが、多いポケットでは、少なくとも  $20\text{cm}^3$  程度以上の量はあり得ると考えると、励磁時の取り出しは難しい。一方、fine では、1 ポケットあたり  $1\text{cm}^3$  以下に出来れば、励磁時でも取り出しは可能と考えている。

以上の考えから、Coarse シミングでは、シムトレイを取り出す時の磁力を避けるために、消磁を行う。その上で、鉄 yoke の天井の一部を剥がして(検討中)、作業を実行する。そのため、鉄 yoke 配置や電流値の再現性に難点が残る。これを避けて、最終的に良好な一様磁場を得るために、fine 用に小さい穴(直径 38 mm)を常時開けておき(Fig. 5-8 参照)、fine シミング中の鉄 yoke 操作を無くしてシミングする。

Coarse から fine シミングへの移行は、シムトレイの取り出しに必要な力が目安になるが、シミング計算により各シムポケットの鉄量が  $1\text{cc}$  以下で Coarse-->Fine に移行と考えている。

シム鉄の配置には、2 つのシミング過程共に、既に MRI 磁石で均一度  $0.2\text{ppm}$  に対応できることを確認したシミング計算手法 [8, 13, 44] を利用する予定である。

### 5.2.2. 能動的磁場シミング

能動的シミングには、シムコイルアレイ {Fig. 5-12(b)} を用いる。6 個のコイルが蓄積領域を取り囲み、円筒状に配置される。各コイルは電源に接続され、電流調整により能動的に磁場調整を行う。

シムコイルは磁場分布調整の自由度は少ない。鉄片配置 Pocket が coarse, fine 共に 400 個存在するのに対して、シムコイルは  $B_R$  タイプ(軸に直交成分磁場用)、 $B_Z$  タイプ(軸方向成分用)共に 6 個である。それぞれ、周回方向の  $B_R$  および  $B_Z$  磁場分布を 6 個のシムコイルで調整する。各コイル最大  $1.0\text{kAT}$  である。

実験開始後に発生した誤差磁場の補正や磁場強度の微調整に用いる。また、能動的なため、

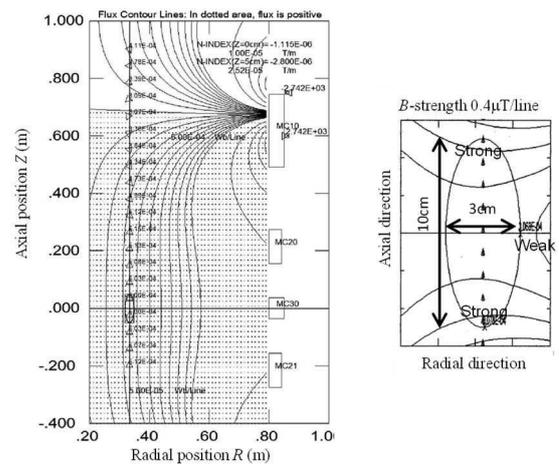


Fig. 5-13  $B_Z$  タイプシムコイルによる磁場。6 個の全コイルに  $1.0\text{kA}$  を通電した場合の、磁力線(左)と磁場強度等高線(右)。

$B_R(B_{\perp})$ 成分( $B_R$  タイプ使用)の調整も可能である。一方、受動シミングのような細かい磁場分布の調整は出来ない。

$B_Z$  タイプのシムコイルは、 $Z=0.7\text{m}$  付近に電流を配置して、Fig. 5-13 の磁力線を持つ磁場を発生する。右の磁場強度は 6 個のコイル全てに  $1.0\text{kA}$  を通電した場合である。中心で  $3.03$  ガウス(蓄積領域:  $3.028\sim 3.038$  ガウス)である。上下離して配置することで、蓄積領域では一様に近い  $B_Z$  分布になる(左図の磁力線参照)。周回方向の  $B_Z$  磁場の分布を調整する。この条件( $3$  ガウス発生)で、 $1\mu\text{T}$  の磁場振幅があり、均一磁場を乱してしまう。そのため、均一磁場との両立を考えると、使用範囲は限られる( $1$  ガウス程度以下)が、 $B_Z$  強度を微調整できる機能を持つ。また、実際の装置運転では、受動シミングの fine シミング機能、弱集束磁場と併せて中心磁場強度を調整するためにも使用できる、と考えている。

$B_R$  タイプのシムコイルが作る磁場は、Fig. 5-14 である。磁場の方向を、磁石軸に垂直な平面( $X$ - $Y$  面で  $Z=0$  の赤道面)上に、矢印で示している。各枠上には、特異値を示す、 $2.13\text{E}-5\sim 3.79\text{E}-6[\text{T/A}]$  である。各コイルで最大電流が  $1.0\text{kA}$  で限られるので、各磁場の最大強さは、特異値の比例にはならないが、No. 1 & 2 では  $7$  ガウス程度、No. 6 では  $1$  ガウス程度である。この中で、No. 1 と 2 の

固有モードは、蓄積領域を磁力線が磁石軸に垂直に通過する磁場である。均一度には影響しない。検出器と磁石の軸が相互に傾いて配置されると、検出器から見て、 $B_X$  もしくは  $B_Y$  の磁場が存在するように見える。Muon ビーム位置を調べ、その方向きから、 $B_X$ ,  $B_Y$  を検出できれば、Fig.5-14 の磁場を使って補正できると考えている。また、6 番目の周回方向一様な成分は、カプス磁場である。 $B_R$  成分を周回方向一様に発生するので、最大で  $B_R=1$  ガウス程度と小さいが、Muon 蓄積軌道の軸方向位置の調整に利用する事も考えている。

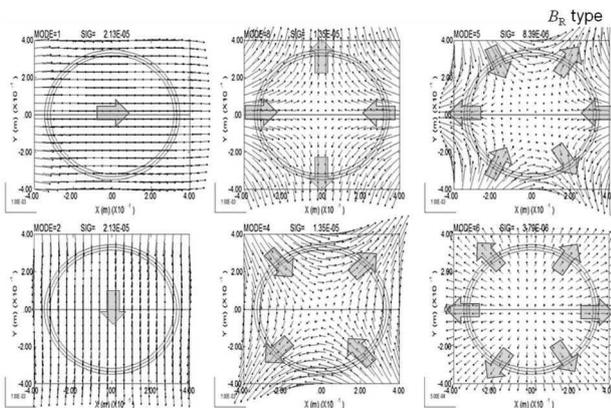


Fig. 5-14  $B_R$  タイプシムコイルによる磁場。6 個のコイル 通電変更による 6 種類の磁場分布。磁場方向を  $Z=0$  面での矢印で示す。文献[51], Fig. 6 引用。

### 5.2.3. 受動シミングの難しい磁場との関連

すでに、4.6.5 項で議論したように、磁石軸に垂直な磁場成分  $B_{\perp}$  は、通常のシミングでは調整出来ない。そのような磁場を Fig. 4-24 に示したが、 $B_R$  タイプのシムコイルが作る磁場と似ている。4.6.5 項で  $B_{\perp}$  磁場成分の検出・補正法を提案した。MRI 磁石では実際上問題となることは無いと説明したが、次節で説明するように、 $g-2/EDM$  計測用の MSM では、 $B_{\perp}$  成分の発生が無視できない場合もある。その補正には、 $B_R$  タイプのシムコイルが利用できると考えている。

### 5.2.4. 受動的磁場シミングと残差磁場

シミング作業後でも、下記の磁場は残る。

(1) 磁場設計で許容した磁場分布、  
 (2) 磁石軸に直交した磁場成分  $B_{\perp}$ 、  
 である。シミングは磁場強度  $|B|$  を調整するが、設計時に計画した磁場以上に良好な磁場分布を得ることは出来ない[13]。従って、シミング後でも Table 5-1 の均一度を満たす範囲で磁場強度の分布は残り、これが残差磁場  $B^{RE}$  である。しかし、目標の 0.2 ppm 以下と磁場設計されているので、この残差磁場は問題ではない。

一方、(2)の  $B_{\perp}$  成分は、4.1 節の磁石設計や 4.6.3 項のシミング計算と 4.6.5 の残差磁場で説明したように、計測が困難であり、設計計算・シミング計算に含まれず、さらに、受動シミングでは  $B_{\perp}$  成分のシミングは難しい。そのためにシミング後に残る磁場である。ここでは、MSM に関連した、設置誤差を想定した誤差磁場の計算とシミングシミュレーション(以下では仮想シミング)を通して説明する。

Fig. 5-15 に 3 種類の鉄 yoke 設置誤差を示す。左から、(a)設計状態、(b)鉄 yoke 上方変位 1mm, (c)横変位 1mm, (d)回転 0.05 度、である。いずれの場合も、3000cm<sup>3</sup> 以下のシム鉄片で  $B_Z$  磁場の均一度 0.2ppm (蓄積領域の 3cm 幅 x10cm 高さの領域)でシミングできる事は確認した。最大は(b)で 2348.3cm<sup>3</sup> であった。また、(b)と(d)では Fig. 4-24 でも議論した  $B_{\perp}$  成分磁場が、存在する。

ケース(b)ではシミング後でも、周回方向全体で軸方向( $R$  方向)の残留磁場  $B_R^{RE}$  が -0.11 ~ -0.16 ガウス存在した。 $g-2/EDM$  詳細計測実験は、

$$n\text{-index} = 1.5E-4 \left\{ \frac{\partial B_R}{\partial Z} = -1.35E-3 \text{ T/m} \right\} \quad (5-2)$$

で行われる予定であり、-8.1mm ~ -11.9mm の Muon 周回軌道の軸方向位置の変位を起こす。こ

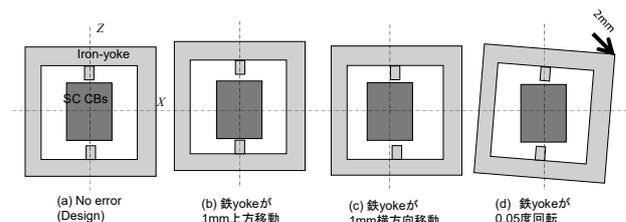


Fig. 5-15 3 種類の鉄 yoke 設置誤差

の補正に  $B_R$  タイプシムコイルの磁場で Fig. 5-14 の 6 番目の磁場が使えたと考えている。

(c)は 1947.5cm<sup>3</sup> の鉄シム片を使った受動シミングにより、蓄積領域では、 $B_Z$  均一度が 31.1ppm → 0.11ppm,  $B_R$  の最大値も  $|B_R| < 28.3\mu\text{T} \rightarrow |B_R^{\text{RE}}| < 0.36\mu\text{T}$  と出来た。十分小さい残差磁場と言える。

(d)では、磁気軸の傾きを表す磁場  $B_R^{\text{RE}}$  を仮想シミングの結果を得た。Fig. 5-16 では、鉄 yoke に (d)の 0.05 度(0.87mrad)の傾きが存在する場合について、シミング前(誤差磁場  $B^{\text{ER}}$ )と後(残差磁場  $B^{\text{RE}}$ )を半径 0.333m の円筒面上で示す。 $B_Z$  成分と  $B_{\perp}$  ( $B_X, B_Y$  or  $B_R$ )成分があるが、 $B_Z$  分布(3.0 T に対し 0.1 ppm, 1.0 ppm と 10 ppm に等高線)と円筒面に垂直で半径方向を向いた磁場成分  $B_R$  分布(0.5 ガウス毎の等高線)を示している。打点領域では、 $B_Z^{\text{ER}} > 0$ (上向き)、 $B_R > 0$ (外向き)である。

上側の  $B^{\text{ER}}$  に対して仮想シミングで求めた残差磁場  $B^{\text{RE}}$  を Fig. 5-16 下部に示した。鉄量を 1623.7 cc の鉄片を使うが、ビーム蓄積領域では 0.07 ppm の均一度が得られる結果である。しかし、 $B_{\perp}$  成分は残存し、蓄積領域付近では Z 方向位置に依存しない成分となる。4.6.5 項で説明したシミングの難しい  $B_{\perp}$  成分が残った結果である。この例では残差  $B_R^{\text{RE}}$  は  $\pm 1.13$  ガウスで、磁力

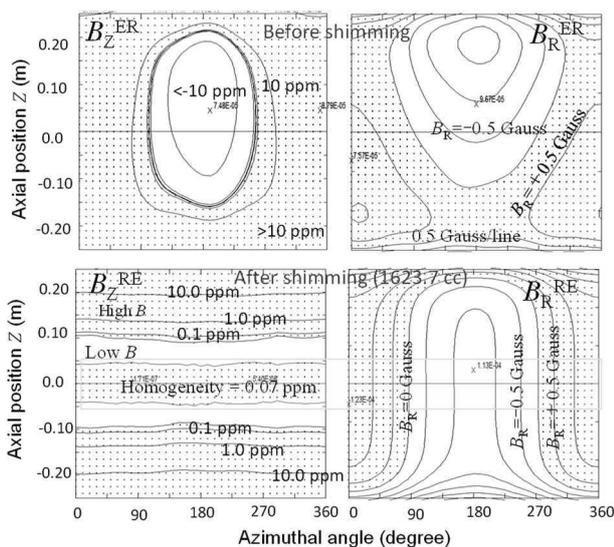


Fig. 5-16 鉄心変位のケース(d)による誤差磁場と受動シミング結果、上：誤差磁場、下；残差磁場、半径 0.333m 円筒上の  $B_R$  分布を展開して示す。文献[51], Fig. 4, Fig.5(a)より引用。

線の方向が、磁場検出器と 0.002 度(0.038 mrad)だけ傾いていることになる。この状況を模式的に誤差磁場の磁力線で表すと Fig. 5-17 である。シミング前では、誤差磁場は軸方向成分を持っているが、シミングを行うことで誤差磁場は主に  $B_{\perp}$  成分となる。

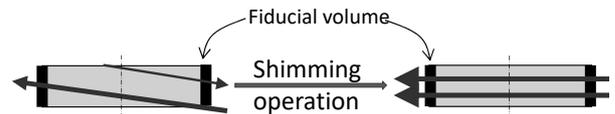


Fig. 5-17 シミング前後の誤差磁場成分

(b)と(d)では、受動シミング後に、誤差磁場のうち  $B_{\perp}$  成分が残ることを説明したが、このような磁場の補正に、 $B_R$ -type シムコイルを使うことが出来ると考えている。許容  $B_{\perp}$  成分についての基準は未定であるが、例えば  $B_{\perp} = 7$  ガウスだと、 $|B|$  に均一度の許容磁場振幅に対して有意な 0.03ppm の変化を与える。そのため、筆者は、 $B_{\perp} < 7$  ガウスを一つの目安と考えている。

一方、磁気センサーは  $|B|$  を計測し、 $B_{\perp}$  成分を分離して計測することは難しい。しかし、0.01ppm(nmr センサで 1Hz 相当、相対変化量である)程度の磁場変化を計測することは可能と考える。そこで、例えば Fig. 4-24 左や Fig. 5-16 右下、および、Fig. 5-17 右のような磁石軸に垂直に磁力線が通過する残差成分を、 $B_R$ -type のシムコイルで MODE1, MODE2 (Fig. 5-14 左端)を使って打ち消すことが出来ると考えている。6 個のシムコイルの電流配分  $I$  が磁場分布を決めるので、

$$I = C_1 I^1 + C_2 I^2 \quad (5-3)$$

とし、 $C_1, C_2$  を試行錯誤的に変化させて、計測磁場がわずかに弱くなる  $C_1, C_2$  を求めるとその条件でダイポール  $B_{\perp}$  成分が打ち消されたと判断できる。

一方、1 ガウスにも満たない  $B_{\perp}$  成分だと、式(5-3)で議論した方法では、難しい可能性が高い。しかし、Fig. 5-15 のような鉄 yoke からの誤差磁場をシミングした後で予測される  $B_R$  成分の残留

は、ビーム軸方向位置に影響を与える。式(5-2)の弱集束磁場の場合、

(b)の残差磁場 $B_R^{RE}$ は Muon 周回 Z 方向位置を-8.1mm~-11.9mm 変化させ、

(d)の $B_R^{RE}$ は、周回面を 0.004mrad(0.002 度)傾けると共に、Muon に周回周波数に同期した Z 方向振動を発生させる可能性、

が予想される。これらが検出できれば、 $B_R$ -type シムコイルで補正できる。前者(b)では、Fig. 5-14 の 6 番目の強さを調整して Muon 軌道の Z 方向を中心面(Z=0)に戻せる。また、(d)の場合でも、試行錯誤になるが、式(5-3)の  $C_1, C_2$  を調整して、影響の無くなる条件を探す。

ところで、シムコイルによる磁場は、特に強い電流で使用了した場合、均一磁場を乱す磁場となると予想される。そのため、シムコイルで補正した後に、再度、fine シミングで磁場を調整することになると考えている。

### 5.3. Muon 入射&蓄積関係の磁場発生機器

Muon 入射・蓄積に関連した磁場には、弱集束磁場、キッカー磁場、それに、ステアリング磁場がある。最後にこれらを説明する。

#### 5.3.1. 弱収束磁場

弱集束磁場は WFC(WFC : Weak Focus Coil、弱集束磁場コイル)で作られる。蓄積領域でミューオン軌道を、上下方向で安定化させるために加える磁場である。現在の設計では、

$$\frac{\partial B_Z}{\partial R} = \frac{\partial B_R}{\partial Z} = -1.35 \times 10^{-3} \quad [\text{T/m}] \quad (5-4)$$

の弱集束磁場での実験が予定されている。この勾配は、既に 3.4 節で議論したように、近似的に  $B \propto R^n$  とする指数  $n$  で表される。既に式(3-27)式で定義が示されているが、再度下記に示す。

$$n = -\frac{R}{B_Z} \frac{\partial B_Z}{\partial R} \quad (5-5)$$

g-2/EDM 計測実験では式(5-4)が定格であるが、WFC の通電電流調整で、指数  $n$  を  $0 \sim 3.0 \times 10^{-4}$  ( $\frac{\partial B_Z}{\partial R} = 0 \sim 2.7 \times 10^{-3} \text{T/m}$ ) の範囲で変更可能である、

として設計を進めている。 $B_Z$  分布は、位置( $R, Z$ ) と指数  $n$  に依存し、式(3-29)を参考にすると、

$$B_Z^{TG} = B_Z^0 - n \frac{B_Z^0}{R^0} (R - R^0) + n \frac{B_Z^0}{R^0} \frac{Z^2}{2R^0} \quad (5-6)$$

である。また、式(5-4)から、

$$B_R^{TG} = -n \frac{B_Z^0}{R^0} Z \quad (5-7)$$

でもある。ここで、 $R^0, B^0$  は g-2/EDM の MSM の中心パラメータでそれぞれ 0.333m, 3.0T である。

導体位置の配置場所には、配置精度を良くするために、5 個の MC-CB の巻き枠を利用する。そのために、MC-CB の内側で、MC-CB の支持構造物を利用して配置する。つまり、半径は 0.795m で  $Z = -0.750\text{m} \sim +0.750\text{m}$  の範囲に配置する計画である。電流値と配置位置を決めるためにも、Fig. 4-1 の方法を使う。

Step-1 として、 $R = 0.795\text{m}$  に線輪電流 50 本を配置して、磁場評価点を  $R = 0.333\text{m}$  中心で、高さ 10.0cm 幅 3.0cm の楕円断面上に磁場評価点を配置した。その結果、得られた SVD 固有分布を Fig. 5-18 に示す。 $R$ - $Z$  の円筒座標であり、矢印で線輪電流分布、等高線で磁場強度分布を示した。奇数番目の 4 個の SVD 固有モードを示した。再右側(Candidate WFC)は、Step-1 の検討で得られた電流分布と磁場分布である。この分布は、Table 5-5 の検討で得た。この表では、Fig. 5-18 の固有モードを加算する割合を検討している{Fig. 5-3(c)参照}。式(5-6)を再現するには加算割合は全て 1.0 が良いが、残差磁場の許容範囲で、電流を下げおきたい。これは、大きな電流で、導体の設置誤差があれば、誤差磁場が大きくなるためである。Table 5-5 から、No. 5 と 6 では、残差磁場は  $\pm 0.035\text{ppm}$  程度の範囲であり、小さいと判断して、電流がより小さい No.5 で設計を進めることにした。

Fig. 5-18 から解るように、電流分布のピークは正・負併せて 7 カ所にあり、この位置に導体を配置して、Fig.5-18 と同等の磁場を作るための SVD 固有分布が、Fig. 5-19 である。おおよそ、50 本の線輪電流の場合と似た磁場分布である。Table 5-5 には線輪電流 50 本と 7 本で、使用する固有モー

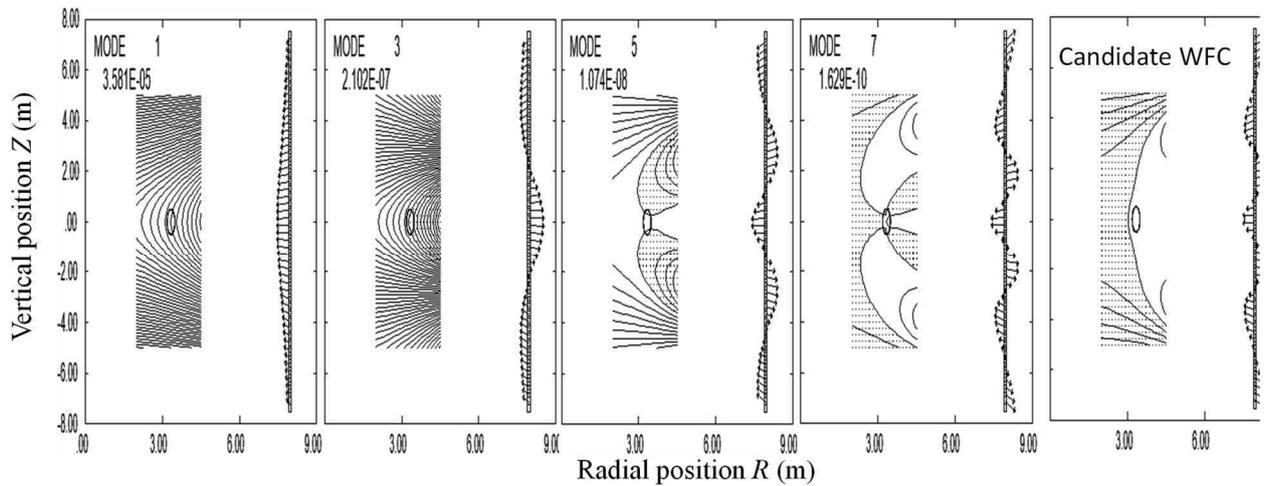


Fig. 5-18 弱収束磁場コイルの磁場設計に用いた SVD 固有モード, 線輪電流 50 本

ドを検討した結果も示した。固有モードはそれぞれ、Fig. 5-18 と Fig. 5-19 に示している。Table 5-5 の検討結果は、両者で近い結果であるが、7 本での検討結果で合計電流(絶対値の加算)はやや小さい。これは、50 本での検討で求めた電流ピーク位置が、同様の磁場を発生する時に最も効率的な位置であるためである。7 本では分布電流を十分には考慮されないの、実際には高次成分の磁場が発生しているが、特異値(T/A で左上)が急速に減少することから考えて、それらは極めて小さいと言える。

以上で得た WFC の磁場分布を、Fig. 5-20 に示す。左側には、磁束等高線(磁力線)を、 $5.0E-5\text{Wb}$  毎(Zの小さい領域)、および  $5.0E-4\text{Wb}$  毎(Zの大きな領域)の等高線で示している。打点領域では正

の磁束である。0.333m には、WFC が作る磁場を矢印で示した。磁場の大きさ数値で示した。また、主コイル(MC10~MC30)付近に書いた数字と矢印は WFC の電流(矢印は電流値に比例)であ

Table 5-5 WFC の使用固有モード検討

No.	加算割合				線輪電流 50 本		線輪電流 7 本	
	固有モード番号				$B_Z^{RE}$ (0.1 $\mu\text{T}$ )	合計 電流 (kA)	$B_Z^{RE}$ (0.1 $\mu\text{T}$ )	合計 電流 (kA)
	1	3	5	7				
1	1.0	1.0	0.0	0.0	44.3~+57.2	3.43	44.5~57.5	3.47
2	1.0	1.0	0.5	0.0	-22.0~30.2	8.12	-22.3~30.6	8.71
3	1.0	1.0	1.0	0.0	-4.11~3.90	15.49	-3.85~3.66	17.74
4	1.0	1.0	1.0	0.5	-2.18~2.38	42.50	-2.08~2.26	36.32
5	1.0	1.0	1.0	0.9	-1.04~1.16	74.96	-1.03~1.15	62.02
6	1.0	1.0	1.0	1.0	-0.82~0.86	83.08	-0.84~0.87	68.44

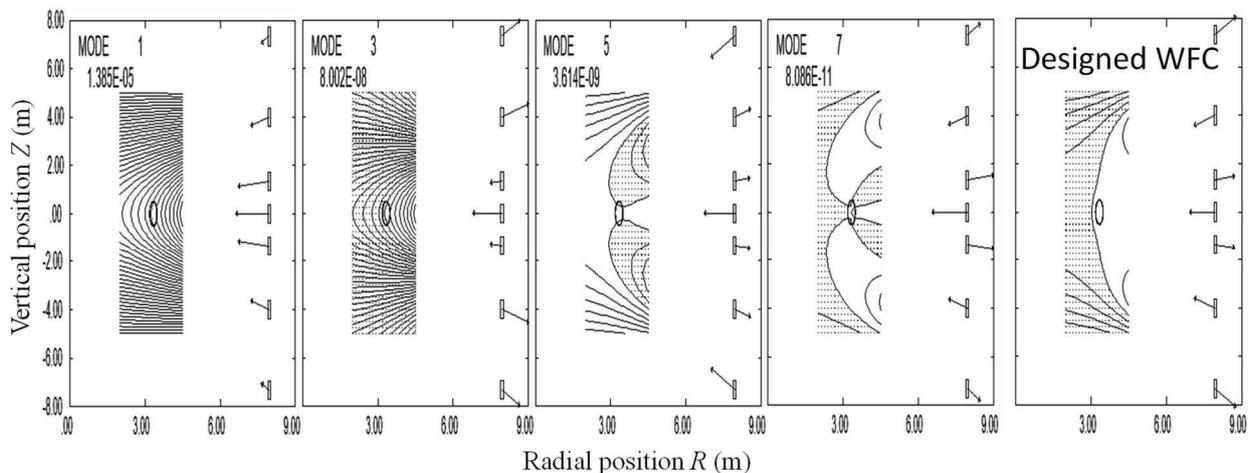


Fig. 5-19 弱収束磁場コイルの磁場設計に用いた SVD 固有モード, 線輪電流 7 本

る。矢印の根元には口を書いているが、WFC コイル位置である。主コイルのすぐ内側に配置する。右側上には磁場強度(主磁場+WF 磁場)の等高線を  $20\mu\text{T}$  毎の等高線で示した。打点領域では磁場が高い( $3.0\text{T}$  以上)。等磁場強度線は内側に凸の形であるが、式(5-6)の第3項の影響である。右下には、式(5-6)と左図の電流配分による磁場との差異(残差)を示した。既に Table 5-5 で話しているが、小さな残差磁場である。

ところで、 $R=0.333\text{m}$ ,  $Z=0.0\text{m}$  の Muon 蓄積領域中心で WFC 磁場は  $-0.405\text{E-}5\text{T}$  としている。これは、3D 非線形計算で鉄影響を調べると、わずかに正の磁場を発生するので、その影響を打ち消すようにしたためである。

WFC は MRI 磁石や主コイル群に比べ、断面が小さい。そのため、形状の影響は小さいので、Step-2 は検討しない。現在、Table 5-6 の様に、7 個の線輪電流を、使用導体を想定して、素線電流値、巻き線構造を決め、Step-2 の各コイル位置の微調整を行っているが、未完である。

あと一つ課題を話しておく。この WFC の電流で、 $Z=0$  面のコイル- $9.48\text{kA}$  が  $+0.2\text{mm}$  位置変位を起こしているとすると、約  $\pm 3.5\mu\text{T}$  の誤差磁場  $B_z^{ER}$  を発生する。この程度の設置誤差はあり得ると考えるが、この誤差磁場は補正する必要がある。この誤差磁場は補正するので、 $3.0\text{T}$  一様磁場にシミングした上で、弱収束磁場を加えた場合や強度変更した場合には、弱収束磁場の理想的な分布からの誤差を fine シム機能とシムコイルを使って調整することになると考えている。

Table 5-6 弱収束磁場用 CB 配置( $n=1.5\text{E-}4$ )

CB 番号	線輪電流計算			巻き線数整数化			
	CB 中心位置		電流 I(kA)	ターン数 RxZ -欠損	断面 RxZ (mm)	起磁力 kA	導体長 (m)
	R(m)	Z(m)					
1	0.795	0.733	+10.363	4x37, -1	4.4x40.7	+10.290	734.3
2	0.795	0.400	-8.654	4x31, -1	4.4x34.1	-8.610	614.4
3	0.795	0.135	+7.280	4x26, -1	4.4x28.6	+7.210	514.5
4	0.795	0.0	-9.481	4x34, -1	4.4x37.4	-9.450	674.3
5	0.795	-0.135	+7.280	4x26, -1	4.4x28.6	+7.210	514.5
6	0.795	-0.400	-8.654	4x31, -1	4.4x34.1	-8.610	614.4
7	0.795	-0.733	+10.363	4x37, -1	4.4x40.7	+10.290	734.3

導体:1.1mm  $\phi$  NiTi 超電導線を想定、定格 70A, 最大 140A

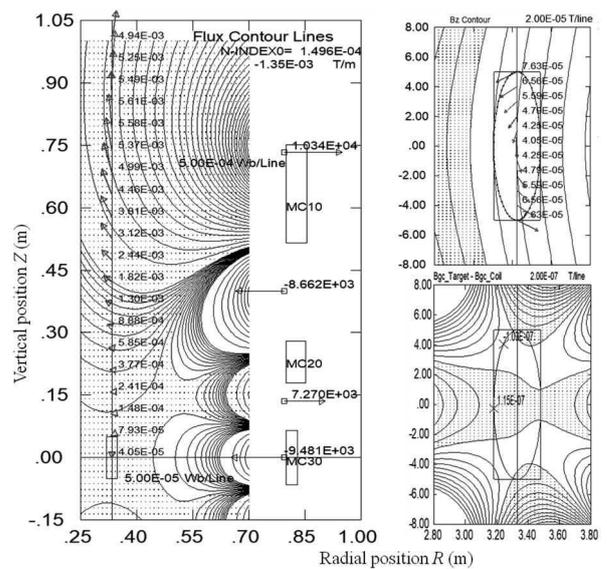


Fig. 5-20 線輪電流 7 本による弱収束設計磁場

### 5.3.2. キッカーコイル

Muon の軸方向移動を止めるための半径方向磁場  $B_R$  を短時間( $100\sim 500\text{ns}$  で検討中)発生する。このため、可能な限り小さなインダクタンスであることが望ましいので、ターン数は最小の  $\pm 1$  ターンである。コイルと言うより、銅の円筒状構造物であり、模式図を、Fig. 5-21 に示す。上側から支持する予定である。各導体には最大  $1\text{kA}$  程度の電流がパルス( $25\text{Hz}$ )で流れる。短時間なため、発熱量は小さく、輻射放熱で十分である。また、磁場勾配が小さい領域に配置されるので、電磁力も小さい。ただし、 $25\text{Hz}$  で通電されるので、この周波数と共振する構造は避ける必要がある。

導体には、 $3\text{mm}\sim 5\text{mm}$  程度の銅板を円筒状に加工して用いる計画である。この導体の内面(半径小側面)は、 $R=0.36\text{m}$  を予定し、高さ位置は、上側導体で  $+0.20\text{m}\sim +0.30\text{m}$ , 下側導体で  $-0.05\text{m}\sim -0.15\text{m}$  である。インダクタンスは  $2.02\mu\text{H}$  と計算している。表皮効果が、ややインダクタンスを減少させる効果を持っている。 $100\text{ns}$  で、 $0\rightarrow 1.0\text{kA}$  の電流上昇を考えると、高電圧  $20\sim 50\text{kV}$  が見込まれるが、キッカーコイルの通電条件は検討中である。

Fig. 5-22には Muon 蓄積領域の  $B_R$  磁場分布を示した。主磁場の  $B_R$  は蓄積領域ではほぼ零で、 $Z > 0.30\text{m}$  では大きくなる。これに対して、収束磁場を加えると、蓄積領域付近で負の勾配を持つ  $B_R$  分布が出来る。キッカー磁場は蓄積領域から  $Z=0.20\text{m}$  付近まで  $B_R > 0$  の磁場を短時間発生する。この領域では、他に  $B_R$  を強く ( $1\text{mT}$  程度) 発生するものは無いので、キッカー通電中は、ほぼ、キッカー磁場のみが  $B_R$  磁場を作っているこ

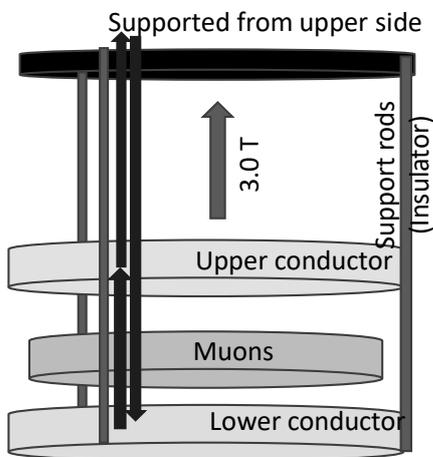


Fig. 5-21 キッカーコイルの2つの導体（円筒板）と Muon 蓄積領域との関係

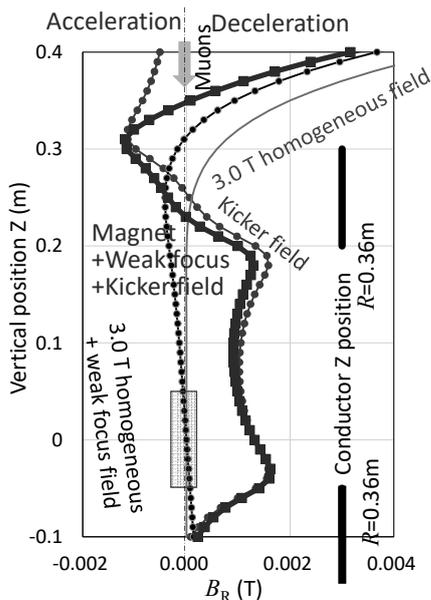


Fig. 5-22 Muon 蓄積領域付近の  $B_R$  磁場分布

とになる。この磁場で、Muon の軸方向移動を止める。

### 5.3.3. 能動磁気遮蔽型ステアリング磁石

Muon の入射・蓄積が順調に行われる磁場を持つ MSM を設計してきた。しかし、実際の MSM には種々の誤差磁場が混入する。蓄積領域の磁場に対しては磁場シミング用の機器（受動シミング機構など）を用意しているが、Muon 入射軌道の微調整用には、ステアリング磁石(SM: Steering Magnet)を、鉄 yoke に開けた Muon 入射用貫通孔の前後に配置する計画(Fig. 5-23)である。本項の内容は参考文献[53, 54]に詳しい、その抜粋で説明する。詳しい計算手法は、参考文献[14, 15, 28, 29, 41, 53, 54]を参考にすると良い。

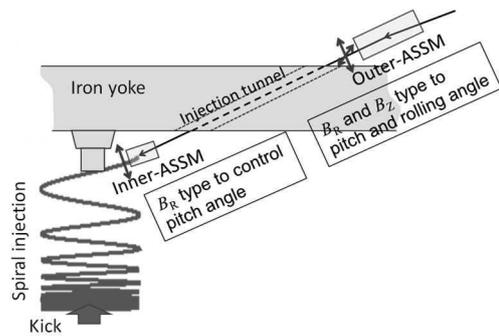


Fig. 5-23 二つの ASSM 配置を示す模式図. 文献 [54], Fig.1 より引用

この SM は周囲との磁氣的相互作用による誤差磁場を避けるため、高磁場(3.0T)中で精度良い磁気シールド機能が必要である。つまり、能動磁気遮蔽(AS: Active Shield)機能を持つ ASSM(能動磁気遮蔽型ステアリング磁石: Active Shield Steering Magnet)である。また、熱的な要因による

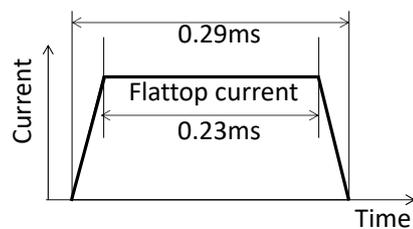


Fig. 5-24 inner-ASSM の通電波形(25 Pulses/1 秒). 文献[54], Fig.2 より引用.

**Table 5-7 Target specifications of ASSMs**

Parameter	Inner-ASSM	Outer-ASSM
BL product (Tm)	1.0E-3	4.0E-3
Magnetic field direction	Radial	Radial, axial
Control angle	Pitch	Pitch, rolling
Magnetic shield ( $\mu$ T)	< 1.0 at 0.2m	< 1.0 at 0.3m
Joule heat $Q$ (W)	<1.0	<10.0
Outer diameter (mm $\Phi$ )	42.7	89.1
Beam Wall thickness (mm)	1.5	2.1
duct Material	TBD (Temporary SUS)	
Eddy current decay time $t_e$	0.0575 ms	0.166 ms
Allowable size	Diameter (mm) <100 Length (mm) <200	Diameter (mm) <200 Length (mm) <400

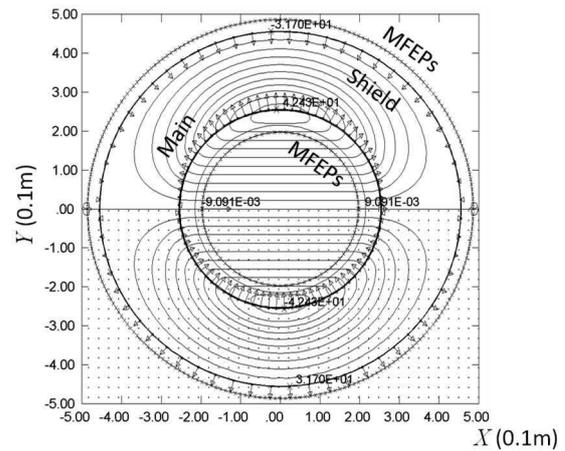
誤差磁場を避けるために、発熱量を抑制するように J-PARC 運転に合わせたパルス運転(25Hz)を行う(Fig. 5-24)。本項では、ASSM を磁気設計手法と共に紹介する。

Table 5-7 は設計の目標仕様である。目指す磁場 (Muon に必要な  $BL$  積) を、小さい磁石(磁気遮蔽性能、発熱量も含む)に発生することが重要である。十分な磁気遮蔽を得るには 3D でのシールドコイルの設計が必要であるので、ステラレータ型核融合装置のコイル形状設計技術(DUCAS)[41] と能動磁気遮蔽を持つ MRI 傾斜磁場コイルの設計手法[14,15]を応用・適用した。ここでは、inner-ASSM の設計について説明していく。

ASSM の磁場設計は 2 つの段階に分けて進めている。まず、2D(2 次元)で、導体の選択を踏め、概略を把握し、3D 設計で実配線を決める。いずれの場合も、主コイル(目的のステアリング磁場を作る)とシールドコイルを相互に矛盾なく設計するために下記の手順をとる。

- (i) 主コイルの電流配置、
- (ii) 主コイルの磁場を周辺で打ち消すシールドコイルの電流分布計算、
- (iii) シールドコイル磁場を考慮して主コイルの電流分布を再計算、
- (iv) 磁石周囲の磁場を確認し、十分弱ければ計算終了、大きい場合には(ii)に戻り繰り返し計算、

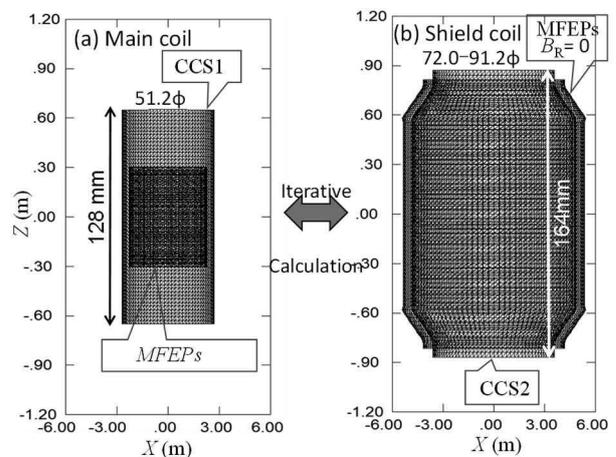
こうして、2D 設計で、直線電流分布を求めた磁場設計結果が Fig. 5-25 で、磁力線を示している。100 ガウスの磁場を、10cm の長さ(紙面垂直方向)で発生する。シールドコイル外側には磁力線が漏れて無く、良好な磁気遮蔽が得られてい



**Fig. 5-25 2D 検討による ASSM の電流・磁力線. 文献[54],Fig.3 より引用**

る。主コイルの電流密度は最大 21.1A/mm であり、この結果から導体を 1mm 幅(周回方向) x 2mm(半径方向)で、素線電流 25A を選択した。また、この結果から、必要な電源と発熱量も概算出来、特別な冷却や電源が必要でないことも把握できた。この結果を受け、3D 検討に進む。

3D 検討では、DUCAS[41]および MRI 用の能動磁気シールド傾斜磁場コイルの設計手法[14, 15, 28, 29]を応用する。Fig. 5-26 は 3D 検討用の計算モデルである。Fig. 4-13 で示した DUCAS 検討用の電流表現モデルを使う。各節点の電流ポテンシャル値  $T$  を、右図 MFEPs で  $B_R=0$  を満たすように、TSVD 正則化を利用して決める。主コイル



**Fig. 5-26 3D ASSM 磁場設計検討用計算モデル. 文献[54],Fig.4 より引用**

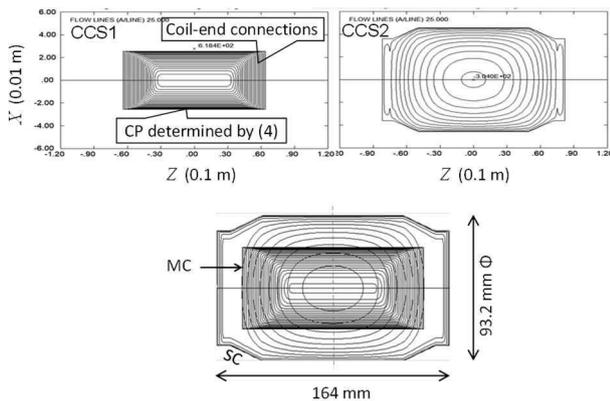


Fig. 5-27 3D 検討による ASSM の電流配置  
上：電流ポテンシャル分布、下：導体配置. 文献  
[54], Fig. 6&7 より引用.

(左)は、製作を簡単化するために、直線を基本とした巻き線構造とし、下記の分布とした。

$$T = T_0 \sum_{l=1}^4 C_l \sin\{(2l - 1)\theta\} \quad (A), \quad (5-8)$$

ここで、 $\theta$ は、 $(X, Y)$ 位置ベクトルと、 $X$ 軸との角度、 $T_0$ は 2D での最大電流ポテンシャル値(起磁力)で、繰り返し計算を  $C_1=1.0$  と  $C_l=0$  ( $l=2$  to  $4$ ) で開始し、目標の BL がビームダクト断面内で一様となるように、 $C_l$  ( $l=1$  to  $4$ ) を調整する。

その結果得られた電流ポテンシャル分布を Fig. 5-27 上部に示す。25A 毎の等高線で示している。Fig. 5-27 下図では、

$$T_m = 25.0 \times (m - 0.5) \quad (A), \quad (5-9)$$

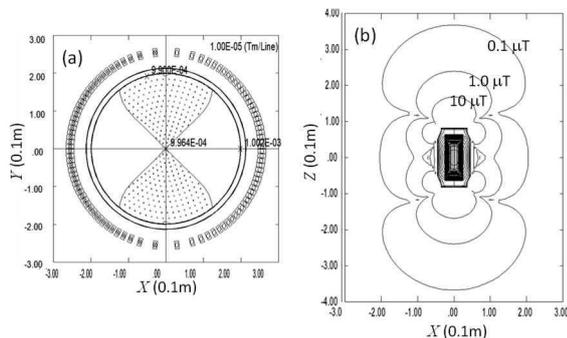


Fig. 5-28 磁場設計結果 左：ビームダクト内の BL 積分布( $BL=0.996E-3Tm$  で $\pm 1\mu Tm$  以内の振幅)、右：ASSM 周囲の漏れ磁場分布. 文献  
[54], Fig. 8 & 9 より引用

Table 5-8 inner-ASSM 磁場設計の検討結果 文献[54], Table 2 より引用

Parameter	2D design	3D design
P/S current (A)	25.0	25.0
Numb. of turns	$\pm 22/12$	$\pm 25/12$
Conductor (mm)	Cu 1.0x2.0	Cu 1.0x2.0
Max.current density (A/mm)	21.1	20.8
Rough size (mm)	100Φ-150L	100Φ-164L
BL products (T·m)	1.0E-3	0.996E-3
EM Magnetic energy (J)	0.0189	0.0322
Inductio Inductance (mH)	60.4	100.3
n Inductive voltage (V)	50.3	86.0
Resistance (W)	0.153	0.222
Joule Resistive voltage (V)	3.83	5.55
loss Heat generation (W)	0.60	0.87
with SS duct	25Hz	25Hz
Duct Joule loss (W)	1.0 (rough estimation)	
Power Total voltage (V)	64.1	91.6
supply Spec. plan	120V, 30A, >10kHz	

の等電流ポテンシャル線(等高線)に沿って配置した導体位置である。 $m$  は巻き線番号(整数)である。シールドコイルでは  $m < 0$  である。ここで、 $m$  は両端部では、導体配置を広げているが、これは、シールドコイル端部の開口部を考慮し、ASSM 全体で磁気モーメントが零となるようにシールドコイルの磁気モーメントを大きくした結果である。

このようにして求めた inner-ASSM の作る磁場を Fig. 5-28 に示す。左には ASSM が作る BL 値、

$$BL = \int_{-0.2}^{+0.2} B_y dl, \quad (5-10)$$

分布を断面の等高線( $1.0E-6 Tm$  毎)で示した。中心では  $0.0996Tm$  であり、目標値で一様な BL 積が断面で得られることが解る。右側には、ASSM 周囲の磁場強度を示した。ASSM 中心から  $0.2m$  離れると、 $1\mu T$  以下の磁場であり、十分な磁気シールドが出来ていると判断している。

現状の設計結果を Table 5-8 に示す。最終版ではないが、設計手法としては十分な能力であると考えている。outer-ASSM の設計は 2D のみが終わっているが、今回示した ASSM の 3D 設計手法は応用できると考えている。

#### 5.4. g-2/EDM 磁石磁場設計のまとめ

J-PARC・高エネルギー加速器研究機構(KEK)ではミュオン(Muon)の異常磁気能率/電気能率(g-2/EDM)を精度良く計測する実験を計画しており、その実験で使用される muon 蓄積磁石(MSM)の設計について説明した。本磁石は、muon 蓄積空間ではMRIに比べ約1桁良い(均一度が小さい)均一度 0.2ppm の一様磁場が必要で、muon の入射には螺旋入射を使う事が特徴である。2つの特徴を実現する磁場分布を発生できるMSM磁石の設計を進め、実現可能な起磁力配置を持ち、永久電流モードで通電する超電導磁石の磁場設計を行った。

MRI同様に3つのStepで磁石設計を行った。均一磁場とMuon入射可能な半径方向磁場を構成する必要がある。Step-1では、磁石全体を覆う起磁力源が必要で有ることが解った。Step-2, Step-3でも、MRI磁石設計と同様な検討であるが、MSMでは鉄yoke形状を含めて起磁力配置を最適化した。その結果、Muon蓄積領域(半径0.333m, 半径方向幅5cm, 軸方向高さ10cm)で、磁場強度3.0Tで均一度0.079ppmの磁場を5.0071MATの起磁力と、中心部に突起形状(ポール)を持つ鉄yokeで目標磁場を実現する磁石を設計した。

実際の実験で考えられる誤差磁場に対応するために必要と予想される調整装置も設計した。

Muon蓄積領域には、MRI用磁石と同じシミング計算法を利用する計画で、仮想的シミング(シミングのシミュレーション)を行った。軸方向磁場を均一化できる事が示された。しかし、鉄yokeの設置誤差が、鉄片によるシミングでは補正出来ない、軸に垂直な磁場成分を発生し、残差磁場となることが可能性として示された、この補正にはシムコイルアレイを用意する。

Muon入射関連の磁場として、弱集束磁場、キッカー磁場、それに、ステアリング磁場があるが、それぞれ、磁場設計を進めている。

弱集束磁場コイル(WFC)は、設置誤差を軽減できると考え、主コイルの直ぐ内側に、支持構造を共通にして配置する。7個の小CBを配置し

て、合計62kATで、 $n\text{-index}=1.5E-4$ の傾斜磁場をつくるようTSVD正則化で起磁力配置を決めた。コイル巻き線構造について設計進行中である。誤差磁場は設置誤差に敏感であり、実機では、傾斜磁場を加える場合には、再度のfineシミングが必要になると考えている。

キッカーコイルはインダクタンスを小さくすることが必要で、薄板・円筒状の導体を電流方向の互いに異なる2つ配置して300-1000A程度の電流を流す計画である。Muon入射・蓄積に対して最適な配置を求めており、進行中である。

ステアリング磁石は、磁石の入射方向とビーム位置を、MSM入射時に微調整する。鉄yokeには入射用貫通孔が用意されるが、その前後に配置される。鉄yoke等、MSM構造物が近傍に存在するので、能動磁気遮蔽の機能が必要である。そのため、能動磁気シールド型ステアリング磁石(ASSM: Active Shield Steering Magnet)である。鉄yokeの蓄積領域側に配置するinner-ASSMについて、3Dでシールドコイルまで含めて設計した。MRI装置で用いる能動磁気シールド型傾斜磁場コイル(ASGC: Active Shield Gradient field Coil)の設計技術を応用した。Inner-ASSMは1mTmのBL積を持ち、中心から0.2m離れた位置では1 $\mu$ T以下に磁場遮蔽できるASSMを設計出来ることを説明した。

以上の設計は進展中であり、詳細設計が進むと、磁場設計の微調整も行うことになると考えている。また、誤差磁場の補正は、実機で目標磁場を実現する上で重要であると考え、可能な補正機構を付加していく。

## 6. まとめ

J-PARC で準備している g-2/EDM 精密計測用磁石(MSM)の磁場設計には、最小二乗法を打ち切り特異値分解の利用して解く手法(TSVD 正則化)を使って、進めている。そのため、本資料では、第2章で手法の定式化を説明した。目標磁場分布、固有モード分布、固有モード強度、打ち切り固有モード番号、残差磁場、再構成電流、再構成磁場について、定義を述べた。

第3章では、例題を解くことで、手法の理解を進めた。まず、計算精度の確保のために、円電流(線輪電流)の作る磁場の計算法を確認して、12桁の精度で線輪電流による磁場が求まっていることを確認した。その上で例題を解いた。円環体系で、円環内部に目標磁場を与えた。複数の種類の目標磁場を与え、円環面を周回方向に流れる電流のポロイダル断面分布を求めた。Maxwell 方程式に矛盾しない目標磁場を与えると、打ち切り固有モード番号を大きくすることで精度良く磁場を再構成する電流分布を求めることを示した。目標磁場としてベクトルポテンシャルも可能であることも示した。但し、この場合、電流値を大きくする条件もあるので注意を要する。

第4章では、円筒型の全身MRI用磁石を想定した起磁力配置設計を例題とした。最初に、矩形断面の円形コイルが作る磁場を、ガウス求積法を使えば、短時間で精度良く磁場計算できることを示し、その方法を磁場設計に用いた。MRI用磁石の磁場設計は、3つの段階を通して行う。

Step-1 では、円筒状に配置した線輪電流群の電流分布を、撮像領域で磁場分布が一様になるように(40cm-球面で均一度 1ppm 程度)SVD 固有分布を重ね合わせて求める。加算した固有モード数に対応した電流のピークが現れた。

Step-2 では、この電流ピーク位置に、矩形断面のコイルブロック(CB)を配置し、その断面形状を、Step-1 で求めた磁場分布を再現するように、CB の位置・断面形状を調整した。磁場分布の目安として、固有モード強度を利用した。Step-2 では、CB 断面に一様に電流が分布して、巻き線構

造は考慮せず、CB 全体の起磁力は、電流密度(150-180A/mm<sup>2</sup>)を保ち連続的に変更(矩形の断面積を変更)できるとして、調整している。

Step-3 では、導体を選択し、CB 内の巻き線構造を決める。Step-2 での電流密度、断面形状を可能な限り再現するように決めるが、CB 起磁力は離散値であり、同じ値には出来ない。例題では、820.3kA→830.4kA の CB もあり、均一度は0.94→906ppm (40cm 球面)に悪化した。しかし、コイル位置を微調整(2mm 以下の移動)することで、Step-1, Step-2 の均一度を再現できることを説明した。これにより、MRI 磁石の磁場設計が完了する。

鉄 yoke を用いる MRI 用磁石もある。その鉄 yoke 形状を良好な均一度の磁場を発生できる鉄 yoke 形状を設計する。この設計に、TSVD による最小二乗解を利用する DUCAS(Design tool Using Current potential And Singular value decomposition)を解して、磁場設計できることを示した。

しかし、設置後の実機では種々の理由で誤差磁場が混入する。1ppm 程度で設計しても、設置・初励磁直後の磁石では数百 ppm に均一度が悪化している。シミング作業が、その誤差磁場の多い磁場分布から設計磁場を再現する。磁場中で磁化し、磁気モーメント(MM)を持つ強磁性体(鉄シム片)を配置して、その磁気モーメントが作る磁場を使って誤差磁場を補正する。この鉄シム片の配置分布を決める計算(シミング計算)にも、TSVD 正則化を利用した。打ち切り固有モード番号は、シミング計算で予想する均一度が十分となる番号とした。また、目標磁場強度は、使用鉄量が少ない条件とした。

実際の作業では、シミング開始時には多量のシム片を使うので、磁力を大きい。そのため、消磁・励磁を伴ってシミング作業を行うが、最後の微調整では磁場を保って作業(fine シミング)した。そのため、シムトレイを2種類に分類し、シム片量の少ないシムトレイを良いにして、シミング作業を行った。その結果、MuSEUM 実験に利用できる良好な均一度を実現できることを説明した。

第5章では、g-2/EDM 精密計測実験用の Muon 蓄積磁石(MSM: Muon Storage Magnet)の磁場設計を説明した。MRI 磁石設計で開発した設計手法とシミング手法を適用する。MRI 同様に3つの Step で磁石設計を行った。均一磁場と Muon 入射可能な半径方向磁場を構成する必要がある。Step-1 では、磁石全体を覆う起磁力源が必要で有ることが解った。Step-2, Step-3 でも、MRI 磁石設計と同様な検討であるが、MSM では鉄 yoke 形状を含めて起磁力配置を最適化した。その結果、Muon 蓄積領域(半径 0.333m, 半径方向幅 5cm, 軸方向高さ 10cm)で、磁場強度 3.0T で均一度 0.079ppm の磁場を 5.0071MAT の起磁力と、中心部に突起形状(ポール)を持つ鉄 yoke で目標磁場を実現する磁石を設計した。

MRI 用磁石と同じシミング計算法を利用する計画で、仮想的シミング(シミングのシミュレーション)を行った。その結果、鉄 yoke の設置誤差が、鉄片によるシミングでは補正出来ない、軸に垂直な磁場成分を発生し、残差磁場となることが可能性として示された、この補正にはシムコイルアレイを用意する。

Muon 入射関連の磁場として、弱集束磁場、キッカー磁場、それに、ステアリング磁場があるが、それぞれ、磁場設計を進めている。

弱集束磁場コイル(WFC)は、設置誤差を軽減できると考え、主コイルの直ぐ内側に、支持構造を共通にして配置する。7 個の小 CB を配置して、合計 62kAT で、 $n\text{-index}=1.5\text{E-}4$  の傾斜磁場をつくる。設置誤差に敏感であり、実機では、傾斜磁場を加える場合には、再度の fine シミングが必要になると考えている。

キッカーコイルはインダクタンスを小さくすることが必要で、薄板・円筒状の導体を電流方向の互いに異なる2つ配置して 300-1000A 程度の電流を流す計画である。Muon 入射・蓄積に対して最適な配置を求めており、進行中である。

ステアリング磁石は、磁石の入射方向とビーム位置を、MSM 入射時に微調整する。鉄 yoke には入射用貫通孔が用意されるが、その前後に配置される。鉄 yoke 等、MSM 構造物が近傍に存

在するので、能動磁気遮蔽の機能が必要である。そのため、能動磁気シールド型ステアリング磁石 (ASSM: Active Shield Steering Magnet) である。鉄 yoke の蓄積領域側に配置する inner-ASSM について、3D でシールドコイルまで含めて設計した。MRI 装置で用いる能動磁気シールド型傾斜磁場コイル (ASGC: Active Shield Gradient field Coil) の設計技術を応用した。Inner-ASSM は 1mTm の BL 積を持ち、中心から 0.2m 離れた位置では 1 $\mu$ T 以下に磁場遮蔽できる ASSM を設計出来ることを説明した。

磁石本体以外に、鉄 yoke で囲まれた空間には、電子対の検出器、その駆動用電源(DC-DC コンバータ)、電流ケーブル、nmr センサー等が多くが配置される。これらは、誤差磁場の要因となり得る。そのため、磁性体の不使用を、配置を周回方向一様性、温度変化の抑制、など、誤差磁場要因の低減に努めて設計を進展させている。

## 参考文献

- [1] G. Morrow, "Progress in MRI magnets," IEEE Trans. Appl. Supercond. Vol. 10, pp. 744-751, 2000.
- [2] T. C. Cosmus, M. Parizh, "Advances in whole-body MRI magnets," IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 2, no. 3, pp. 2104-2109, 2011. DOI: 10.1109/TASC.2010.2084981.
- [3] K. Shimomura, "Muonium in J-PARC; from fundamental to application", Hyperfine Interact (2015) 233:89–95, DOI 10.1007/s10751-015-1159-3.
- [4] P. Strasser et al., "New muonium HFS measurements at J-PARC/MUSE", Hyperfine Interact., vol. 237, pp. 124-1-124-9, 2016.
- [5] M. Abe et al., "A new approach for measuring the muon anomalous magnetic moment and electric dipole moment", Progress of Theoretical and Experimental Physics (PTEP), 2019(5) 2019年5月1日.
- [6] H. Iinuma, H. Nakayama, K. Oide, K. Sasaki, N. Saito, T. Mibe, M. Abe, "Three-dimensional spiral injection scheme for  $g-2$ /EDM experiment at J-PARC", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 832, pp. 51-62, 2016.
- [7] M. Abe, Y. Murata, H. Iinuma, T. Ogitsu, N. Saito, K. Sasaki, T. Mibe, H. Nakayama, "Design method and candidate of a magnet for muon  $g-2$ /EDM precise measurement in a cylindrical homogeneous volume", Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A: Volume 890, 11, pp. 51-63, May 2018.
- [8] K. Sasaki, M. Sugita, M. Abe, H. Iinuma, C. Oogane, T. Mibe, K. Shimomura, T. Ogitsu, "Development of precise shimming technique with materials having low saturation magnetization", IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 32, no. 6, Art. no. 9002109, 2022. DOI: 10.1109/TASC.2022.3190803.
- [9] M. Abe, K. Shibata, "Consideration on Current and Coil Block Placements with Good Homogeneity for MRI Magnets using Truncated SVD", IEEE Trans. Magn., vol. 49, no. 6, pp. 2873-2880, 2013.
- [10] M. Abe, K. Shibata, "Coil Block Designs with Good Homogeneity for MRI Magnets Based on SVD Eigenmode Strengths", IEEE Trans. Magn., vol. 51, no.10, Art. no. 7002713, 2015.
- [11] Y. Murata, M. Abe, R. Ando, T. Nakayama, "A Novel Design Method of Shapes of Ferromagnetic Materials for the Superconducting MRI Magnets", IEEE, Trans., Appl. Supercond., vol. 19, Issue 3, pp.2293-2296, 2009.
- [12] M. Abe, "MRI Magnet Shimming by Calculations of Iron Piece Placements with Truncated Singular Value Decomposition Regularization", Magnetic Resonance in Medical Sciences, Vol. 16, no.4, Oct. pp. 284-296, 2017 (Online advance Publication Released: March 02, 2017, mp.2016-0046).
- [13] M. Abe, K. Sakakibara, T. Fujikawa, H. Hanada, "Static Magnetic Field Shimming Calculation Using TSVD Regularization Considering Constraints of Iron Pieces Placements", IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 27, no. 7, Art. no. 4400812, 2017.
- [14] M. Abe, "A design tool for MRI GCs using DUCAS with weighted nodes and initial current potentials", IEEE Trans. Magn., vol. 49, no. 12, pp. 5645-5655, Dec. 2013.
- [15] M. Abe, "A Design Technique of MRI Active Shield Gradient Coil Using Node Current Potentials and Triangular Finite Elements", IEEE Trans. Magn., vol. 50, no. 10, Art. no. 5100911, 2014.
- [16] 柳井晴夫, 竹内啓, 「射影行列・一般逆行列・特異値分解(UP 応用数学選書 10)」, 東京大学出版会、1983.
- [17] 中川徹、小柳義夫、「最小二乗法による実験データ解析(UP 応用数学選書 7)」, 東京大学出版会、1982年.
- [18] 伊理正夫, 「一般線形代数」, 岩波書店, 2003
- [19] 伊理正夫、児玉真三、須田信英、「特異値分解とそのシステムへの応用」、計測と制御、Vol.21, No.8, 昭和 57年 8月.
- [20] M. Guamieri, A. Stella, and F. Trevisan, "A methodological analysis of different formulations for solving inverse electromagnetic problems," IEEE Trans. Magn., vol. 26, no. 2, pp. 622–625, Mar. 1990.
- [21] M. Abe, K. Takeuchi, H. Fukumoto and M. Otsuka, "Magnetic analysis including the field due to vacuum vessel eddy currents in the Hitachi tokamak (HT 2)", 核融合研究 61, p.38, 1989.
- [22] M. Abe, K. Takeuchi, "Reconstruction of tokamak equilibrium from measured data with error radial field", 核融合研究 67, p.257, 1992.
- [23] M. Abe, A. Doi, K. Takeuchi, M. Otsuka, S. Kinoshita, S. Nishio, M. Sugihara, R. Yoshino, "Plasma startup characteristics in the Hitachi tokamak HT-2 with modified low loop resistance", Fusion Technology 32, p. 545, 1997
- [24] D.W. Swain, G.H. Neilson, "An efficient technique for magnetic analysis of non-circular, high-beta tokamak equilibria", Nucl. Fusion, Vol. 22 no. 8, p.1409, 1982.
- [25] L. L. Lao, HS John, RD Stambaugh, W Pfeiffer, "Separation of  $\beta p$  and  $\ell i$  in tokamaks of non-circular cross-section", Nucl. Fusion, vol. 25, p. 1421, 1985.

- [26] L. L. Lao, HS John, R. D. Stambaugh, A. G. Kellman, W. Pfeiffer, "Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks", Nucl. Fusion vol. 25, p. 1611, 1985.
- [27] C. Eckart and G. Young, "A Principal Axis Transformation for Non-Hermitian Matrices", Bull. Amer. Math. Soc. 45, pp.118-121, 1939.
- [28] 阿部充志, 「特異値分解を用いた磁場再構成・制御法と核融合研究への応用に関する研究」、総合研究大学院大学、物理科学研究科、核融合科学専攻、博士論文、乙第 193 号 2009 年 9 月。
- [29] 阿部充志, 「プロジェクトレビュー, 特異値分解固有モードを利用した磁場設計(核融合装置技術から応用した磁場設計)」、J. Plasma Fusion Res. Vol.95, No.4(2019), pp155-172, (プラズマ・核融合学会誌 第 95 巻第 4 号、2019 年 4 月)。
- [30] C. Hastings, "Approximations for Digital Computers", Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 1955.
- [31] T. Fukushima, "Fast computation of complete elliptic integrals and Jacobian elliptic functions," Celestial Mech. Dyn. Astron., vol. 105, pp. 305–328, 2009.
- [32] W. J. Cody, "Chebyshev approximations for the complete elliptic integrals  $K$  and  $E$ ," Math. Comput., vol. 19, pp. 105–112, 1965.
- [33] L. Li, X. Ping, X. Yin, X. Wang, Q. Li, and M. Ju, "A discussion on the computation of magnetic flux density by circular coils in MRI," presented at the IEEE Int. Conf. Computational Electromagnetics, Shanghai, China, Mar. 20–22, pp. 1–3, 2019.
- [34] Xuwei Ping, Li Li, Xinghui Yin, Xin Wang, Qingbo Li, and Meiyang Ju, "A Discussion on Efficient Methods for Computing Magnetic Flux Density of Circular Coils", IEEE Journal of Multiscale and Multiphysics Computational Technique, Vol.4, pp227-233, 2019.
- [35] G. Shou, L. Xia, F. Liu, M. Zhu, Y. Li, S. Crozier, "MRI coil design using boundary element method with regularization technique: A numerical calculation study", IEEE Trans. Magn., vol. 46, no. 4, pp. 1052-1059, Apr. 2010.
- [36] N. Yu-Cheng, R. W. Brown, M. R. Thompson, T. P. Eagan, S. M. Shvartsman, "A comparison of two Design Methods for MRI Magnets", IEEE Trans. Appl. Supercond. Vol. 14, no. 3, p. 2008, Sep. 2004.
- [37] A. Belov, V. Bushuev, M. Emelianov, V. Ereghin, Yu. Severgin, S. Sytchevski, V. Vasiliev, "Passive shimming of superconducting magnet for MRI," IEEE Trans. Appl. Supercond. vol. 5, no. 2, pp. 679-681, June 1995.
- [38] Y. Murata, M. Abe, R. Ando, T. Nakayama, "A Novel Design Method of Shapes of Ferromagnetic Materials for the Superconducting MRI Magnets", IEEE, Trans., Appl. Supercond., vol. 19, Issue 3, pp.2293-2296, 2009.
- [39] 阿部充志, 他: 「電磁石装置および磁気共鳴撮像装置」, 特許第 4921935 号, 出願日 2006 年 11 月 22 日, 登録日 平成 24 年 2 月 10 日。
- [40] R. Ando, R. Aoki, M. Seki, T. Shibata, M. Abe, "Development of a Design Method for Superconducting Electromagnets Using Racetrack Coils", IEEE, Trans., Appl. Supercond., vol. 18, no. 2, 2008, pp.1525-1528.
- [41] M. Abe, T. Nakayama, S. Okamura, K. Matsuoka, "A new technique to optimize coil winding path for the arbitrarily distributed magnetic field and application to a helical confinement system", Phys. Plasmas. Vol.10, no.4, pp. 1022-1033, (2003).
- [42] T. J. Havens; X. Huang, R. S. Smith, S. H. Wong, M. Ogle, B. Hills, B. Xu, M. Xu, "Unified shimming for magnetic resonance superconducting magnet," United States Patent No. US 6,181,137 B1, Jan. 30, 2001, Japanese Patent No. 4740442, May 13, 2011.
- [43] 阿部充志、他、「磁場調整支援システムおよび磁場調整方法」、特許第 6368849 号、2018 年 7 月 13 日登録、国際出願番号 PCT/JP2016/054878, 優先日 2015 年 2 月 20 日。
- [44] 阿部充志、佐々木憲一、萩津透、齊藤直人、三部勉、下村浩一郎、飯沼裕美、多田紘規、小山駿、田中陶冶、MuSEUM Collaboration、「超良好均一度( $\pm 0.1$ ppm)を目指すシミング計算」、2022 年度春期、第 103 回低温工学・超伝導学会研究発表会、2022 年 6 月 20 日(月)~22 日(水)、タワーホール船堀(東京都江戸川区)発表 No. 3A-a09、講演概要集 P.104。
- [45] T. Mibe, the J-PARC  $g-2$ /EDM collaboration, "A novel precision measurement of muon  $g-2$  and EDM at J-PARC, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl., 218, pp. 242-246, 2011.
- [46] N. Saito, the J-PARC  $g-2$ /EDM collaboration, "Measurement of muon and EDM with an ultra-cold muon beam at J-PARC, AIP Conference Proceedings 1467, p. 45, 2012.
- [47] 阿部充志, 萩津透, 齊藤直人, 佐々木憲一, 三部勉, 中山久義, 飯沼裕美、「 $g-2$ /ED 精密計測用 ミューオン蓄積超電導磁石の磁気設計の最新化」、第 18 回日本加速器学会年会 web 開催 2021 年 8 月 9-12 日, 発表 No. THP016 (8 月 12 日)、予稿集 P.267.

- [48] 飯沼 裕美, 阿部 充志, 生出 勝宣, 大沢 哲, 佐々木 憲一, 中山 久義, 久松 広美, 深尾 祥紀, 古川 和朗, 三部 勉, リーマン ムハマド アブドゥル, 「MRI サイズの小型リングへ入射するための高度の X-Y 結合を伴う 3次元螺旋入射手法の開発」、第 15 回日本加速器学会年会 ハイブ長岡、2018 年 8 月 7 日～8 月 10 日、発表 No. WEOM07、予稿集 P.79.
- [49] H. Iinuma;H. Nakayama;M. Abe;K. Sasaki;T. Mibe, ‘*Design of a Strong X-Y Coupling Beam Transport Line for J-PARC Muon g-2/EDM Experiment*’, IEEE Trans. Appl. Supercond., Vol. 32, Issue 6, Art no. 4007505, 2022. DOI: 10.1109/TASC.2022.3161889.
- [50] 飯沼裕美, 大澤哲, 中山久義, ムハマドアブドゥルリーマン, 「3次元螺旋ビーム入射実証実験のための垂直ビームキッカー装置の単体性能評価」、第 17 回日本加速器学会年会 Web 開催、2020 年 9 月 2 日～9 月 4 日、発表 No. THPP48、予稿集 P.604.
- [51] 阿部充志, 萩津透, 齊藤直人, 佐々木憲一, 三部勉, 中山久義, 飯沼裕美, 村田幸弘, 古閑康則, 「g-2/EDM 精密計測用ミュオン蓄積超電導磁石の磁場調整方針」、第 16 回日本加速器学会年会 京都大学吉田キャンパス、2019 年 7 月 31 日～8 月 3 日、発表No. THOH07、予稿集P.95.
- [52] 阿部、佐々木、「磁場調整装置、磁石装置および磁場調整方法」、特願 2014-160051(2014/08/06 出願)、2018/11/09 登録。特許番号 6429312.
- [53] 阿部充志, 萩津透, 齊藤直人, 佐々木憲一, 三部勉, 中山久義 (KEK)、飯沼裕美 (茨大) g-2/EDM 精密計測用超電導磁石内設置能動磁気遮蔽型ステアリング磁石の試設計、第 17 回日本加速器学会年会 web 開催 2020 年 9 月 2-4 日、発表 No.FRPP46 (9 月 4 日) Web 開催、予稿集 p.807.
- [54] M. Abe, T. Ogitsu, N. Saito, K. Sasaki, T. Mibe, H. Nakayama, H. Iinuma, “*Design method of active shield steering magnet for fine tuning of muon injection orbit into g-2/EDM precision measurements magnet*”, IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 32, no. 6, Art no. 4007505, 2022, DOI: 10.1109/TASC.2022.3190247.

