

10.

g-2/EDM超電導磁石開発とMRIへの精密磁場技術

阿部充志

高エネルギー加速器研究機構

超電導低温工学センター

自己紹介

1977年4月 日立製作所入社 エネルギー研究所配属

以後、所属部署の名称は変化するが、実質的には同じ研究開発部門でした。

1977-2002 核融合関連の機器設計、

実験参加:トカマク装置HT-1, HT-2, TRIAM-1M(九州大)

1983-1984 原子力研究所那珂研の外来研究員でDoublet-III実験参加

1990年代、JT-60改造計画の設計検討、ITER-EDA

1998-2002、LHD建設, CHS改造計画の設計検討

2002-2017、MRI磁石及び加速器磁石磁場(熱)設計担当

開放型MRI磁石開発・製品化

J-PARC RCS磁石の熱・磁場設計

超電導放射光源(Wiggler@九州シンクロトロン)の設計検討

(設計:主に磁場分布設計手法の開発、起磁力配置の原理的検討)

2009年9月 総研大より核融合科学専攻で博士(工学)取得

2017年 日立製作所定年退社→高エネルギー加速器研究機構、

2017～2019年:素粒子原子核研究所

2019～現在 :超電導低温工学研究センター

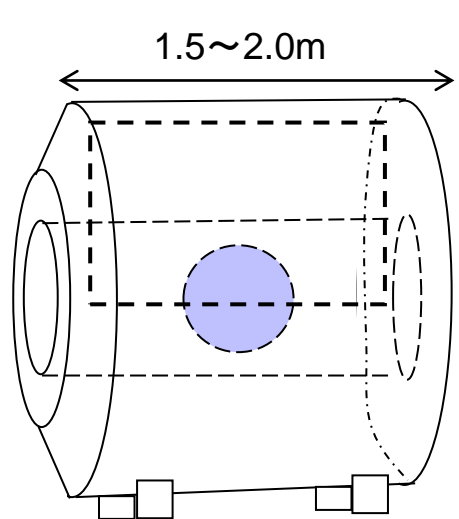
精密磁場

J-PARCで準備中のミュオン関連の実験

- ・ $g-2$ /EDM詳細計測実験
- ・MuSEUM実験(MuSEUM: Muonium Spectroscopy Experiment Using Microwave)

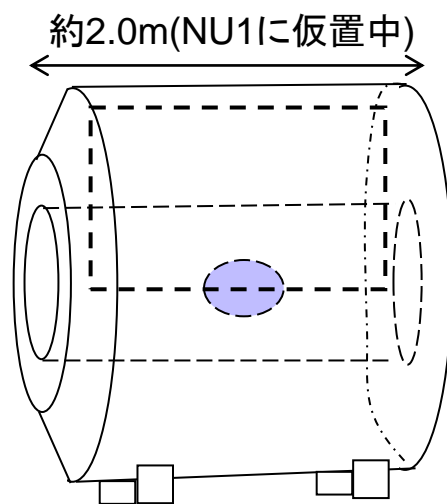
では極めて精度良い一様磁場が要求されています。どちらも、実験領域で、平均磁場 $\pm 0.1\text{ppm}$ (均一度 0.2ppm)の平坦な磁場分布を必要としています。

均一性の良い磁場が必要と言われているMRI(Magnetic Resonance Imaging)撮像装置磁場でも 10ppm (50cmDSV) $\sim 3\text{ppm}$ (40cmDSV)程度の均一度であり、2つの実験に利用する磁場を実現するには、これまでの技術に対してInnovationが必要である。



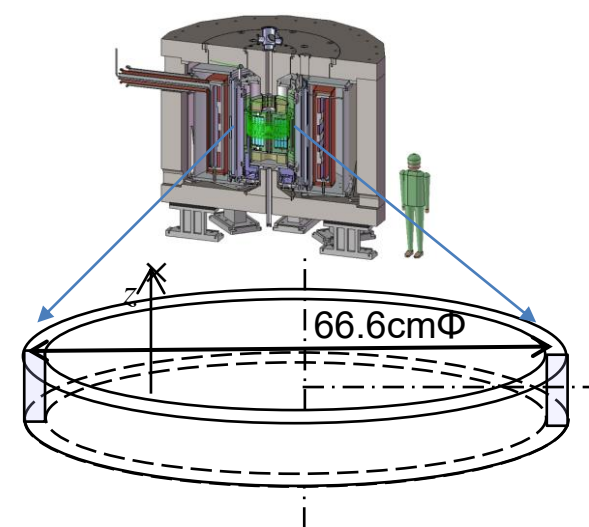
全身用撮像用MRI磁石

直径50cm球内で 10ppm 程度



MuSEUM実験用磁場

直径20cm-30cm長の楕円体内で 0.2ppm



$g-2$ /EDM実験用磁場

3.0cm幅-10cm高の円筒内で 0.2ppm

逆問題

通常、電流分布や磁性体位置が与えられて磁場計算を行うが、磁場再構成・制御・装置設計等における逆問題を解く必要性がある。つまり、

$$\text{順問題: } \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{I} \quad \longleftrightarrow \quad \text{逆問題: } \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

(\mathbf{B} : 磁場磁束等の磁場分布目標値、 \mathbf{A} : 応答行列、 \mathbf{I} : 電流分布のパラメータ)
 しかし、多くの場合、 \mathbf{A} は非正方行列で、 \mathbf{A}^{-1} が存在しないため、一般逆行列 \mathbf{A}^* を用いて、近似的に解 \mathbf{I} を得る。

$$\text{最小2乗法} \quad \mathbf{A}^t \mathbf{P} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{I} \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$$

: 安定な解が得られるとは限らない

(非常に振幅の大きな解となることも多い)



そこで、正則化法(Tihonov正則化と打ち切り特異値分解(TSVD)正則化がある)を用いる。

ここでは、TSVD正則化を用いて議論を進め内容を紹介します

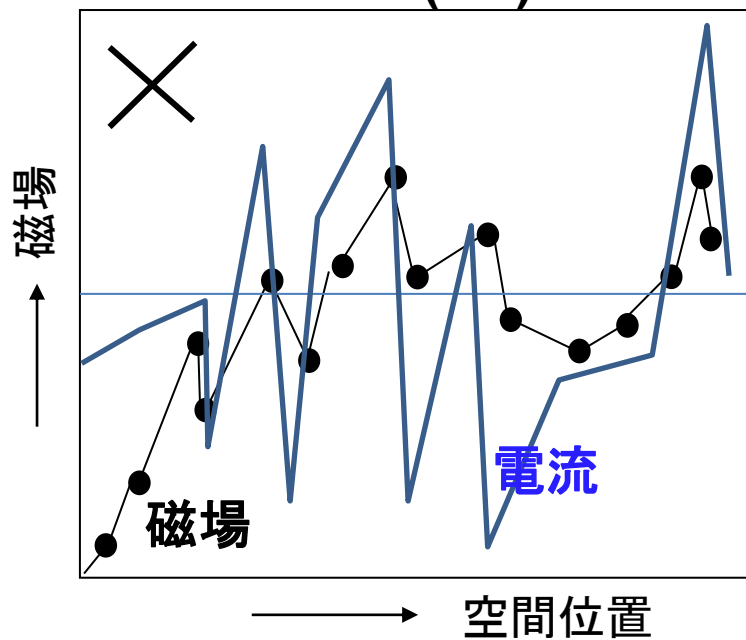
特異値分解: Singular Value Decomposition (SVD) 単位電流あたりの磁場強度の大きな成分を選択できる。TSVD=Truncated SVD

The solution that we want

Reasonable solution,

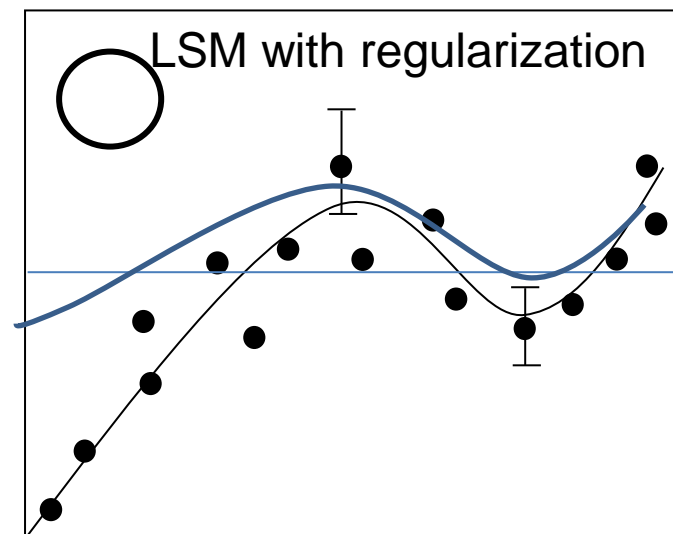
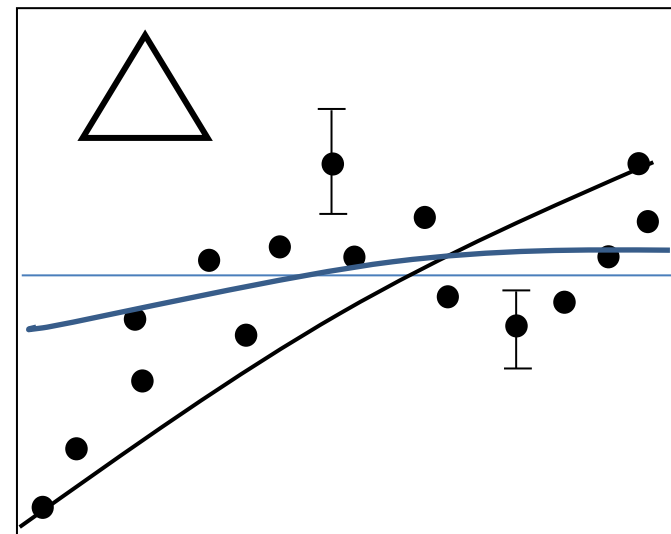
- is possible to manufacture
- with reasonable accuracy
- with reasonable currents.

$$I = A^{-1} B^{TG} = (A^t A)^{-1} A^t B^{TG}$$



Simple LSM

LSM: Least Square method



内容

1. はじめに
背景と目的
2. 最小二乗法と正則化
3. TSVD正則化を用いる例題
4. MRI用磁石の一様磁場設計
均一磁場設計、
磁場シミング(精密磁場調整)
5. $g-2/EDM$ 精密計測実験用磁石
主磁石の磁場設計、
磁場調整装置、
入射蓄積関連の磁場

余談であるが、参考文献[19]によれば、特異値分解が任意の行列に適用していることは1939年[27]に初めて示された。計算機の誕生と同じ時期である。また、この文献[19]には、「システム制御の有効な手法の1つとして定着していくであろうと思われる」と書かれているが、磁場設計の分野で、積極的に用いた例は見えない。

[19] 伊理正夫、児玉真三、須田信英、「特異値分解とそのシステムへの応用」、計測と制御、Vol.21, No.8, 昭和57年8月(1982).

[27] C. Eckart and G. Young, "A Principal Axis Transformation for Non-Hermitian Matrices", Bull. Amer. Math. Soc. 45, pp.118-121, 1939.

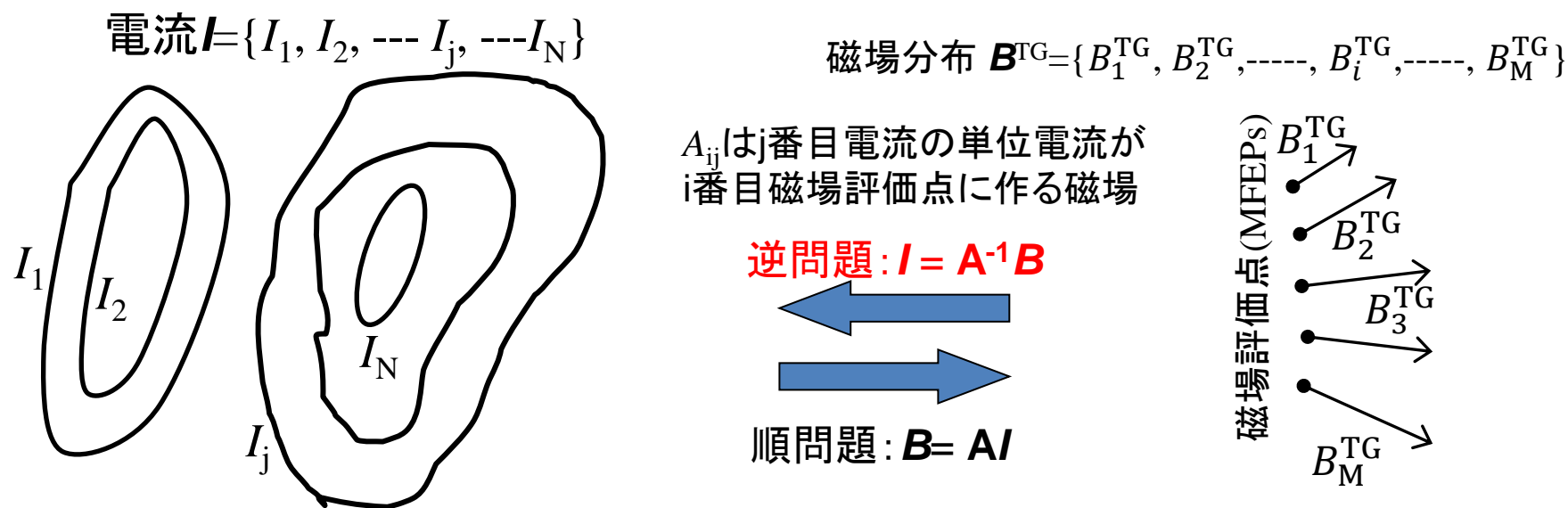
2. 最小二乗法と正則化

ここでは、磁石などの磁気応用機器を設計する際に必要となる逆問題を解く方法について、特異値分解利用した打ち切り特異値分解による正則化を説明する。

目標磁場 $\mathbf{b}^{\text{TG}}(X, Y)$ をおおよそ再現する電流分布、つまり、

$$\mathbf{b}^{\text{TG}}(X, Y, Z) \doteq f\{\mathbf{i}(X, Y, Z)\}$$

の電流分布を $\mathbf{i}(X, Y, Z)$ 求めることが、磁石設計上の課題の中心である。空間離散的に電流・磁場共に扱うと考え、下記の問題とする。



MFEP: Magnetic Field Evaluation Points)

2. 最小二乗法と正則化 (2)

$$Er = \|(\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}I)\|^2 = (\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}I)^{\text{t}}(\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}I) \rightarrow \text{最小} \quad (2-2)$$

I に関して微分を行い、極値を取る条件で $\frac{\partial Er}{\partial I} = 0$ から、最小二乗法で求める電流は目標磁場に対して、

$$(\mathbf{A}^{\text{t}}\mathbf{A})I = \mathbf{A}^{\text{t}}\mathbf{B}^{\text{TG}}, \quad (2-3)$$

$$I = (\mathbf{A}^{\text{t}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\text{t}}\mathbf{B}^{\text{TG}} \quad (2-4)$$

である。 A は非正方で非正則行列であるが、 $(\mathbf{A}^{\text{t}}\mathbf{A})$ は正方で正則となることが多いので、電流 I を求めることは出来る。しかし、この解は正確に磁場分布を再現するが、非常に大きな電流や隣り合うところに正負の大きな電流を配置するとか、工学的には実現できない解を与えることが多い。

そのため、磁場の再現誤差を許しながら、実現可能な電流分布を与える手法について、筆者が使っている特異値分解を利用した正則化法を説明する。

2. 最小二乗法と正則化 (3)

正則化法には、2つの方式がある。

1. 打ち切り特異値分解正則化

2. Tihonov正則化

本セミナーでは、打ち切り特異値分解(TSVD)を使って説明していく。

・特異値分解: SVD: Singular Value Decomposition

・打ち切り特異値分解=TSVD: Truncated SVD

TSVDを使う主な理由は下記の点である。

- (1) 特異値(単位電流当たりの磁場強度)の大きなSVD固有モードを選択するので、どういう磁場分布を必要としているか解り易い。
- (2) 打ち切り固有モード番号と磁場再現精度が解り易い
- (3) SVD固有モードから必要とする起磁力源配置の把握が容易
- (4) 必要な磁場精度と起磁力源配置の自由度の関係が解り易い

2.1. 正則化による最小二乗解

行列 \mathbf{A} にSVDを適用すると、

$$\mathbf{A} = \sum \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k^t, \quad (2-5)$$

ここで、 \mathbf{u}_k と \mathbf{v}_k はそれぞれ、磁場分布と電流分布の正規直交基底で、 λ_k は特異値で電流-磁場の換算係数(T/A)と考えること出来、単に電流当たりの磁場強度である。加算は固有モード番号 k について行う。

SVD固有モードを使うと、一般逆行列は、

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t / \lambda_k, \quad (2-6)$$

で求めることが可能である。

$$\mathbf{I} = \sum_k (\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG}) \mathbf{v}_k / \lambda_k \quad (2-7)$$

一方、Tihonov正則化は、

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L}) \mathbf{I} = \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{TG} \quad (2-8) \rightarrow \mathbf{I} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \varepsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{TG} \quad (2-9)$$

$$\mathbf{I} = \sum_{all_k} \left\{ \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \varepsilon^2} \right) \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG} \right\} \mathbf{v}_k \quad (2-10)$$

である。両者の違いは打ち切り方法である。

2.2. 固有モード強度に注目したTSVD正則化

最小二乗解は前ページの解であるが、書き直して

$$I = \sum_k (\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{TG}}) \mathbf{v}_k / \lambda_k \quad (2-7) = \sum_k n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P_k^{\text{TG}} / \lambda_k, \quad (2-11)$$

ここで、 P_k^{TG} は k 番目固有モードの強度で、下式である。

$$P_k^{\text{TG}} = \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{TG}} / n_p^{1/2} \quad (2-12)$$

磁場評価点(MFEPs)での再構成磁場は、

$$\mathbf{B}^{\text{REC}} = \sum_k n_p^{1/2} P_k^{\text{TG}} \mathbf{u}_k \quad (2-13)$$

目標磁場 \mathbf{B}^{TG} と再構成磁場 \mathbf{B}^{REC} の差(残差 \mathbf{B}^{RE})は、

$$\mathbf{B}^{\text{RE}}(M_T) = \mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{B}^{\text{REC}} = \mathbf{B}^{\text{TG}} - \sum_k n_p^{1/2} P_k^{\text{TG}} \mathbf{u}_k \quad (2-14)$$

であるが、加算は、固有モード k について1～打ち切りSVD固有モード番号 M_T まで行い、残差は M_T に依存する。残差の最大最小(Peak-to-peak値 PP値)

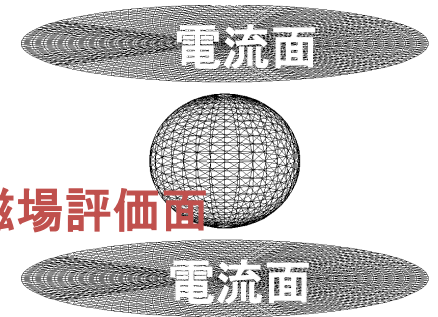
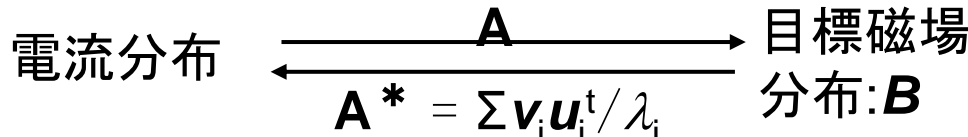
$$B_{\text{PP}}^{\text{RE}}(M_T) = B_{\text{MAX}}^{\text{RE}}(M_T) - B_{\text{MIN}}^{\text{RE}}(M_T) < \varepsilon_r \quad (2-15)$$

で磁場分布の再構成精度を確認し、磁場設計の妥当性を確認する。

以上で求めた電流 I を使えば、任意の点で磁場を計算でき、超電導導体の経験磁場など、実機で実現可能性を評価する。固有モードの加算で、番号が M_T 以下であっても、不必要なもの、例えば対称性が一致しないものなど、は加算から除外する(計算誤差を避ける)こともある。

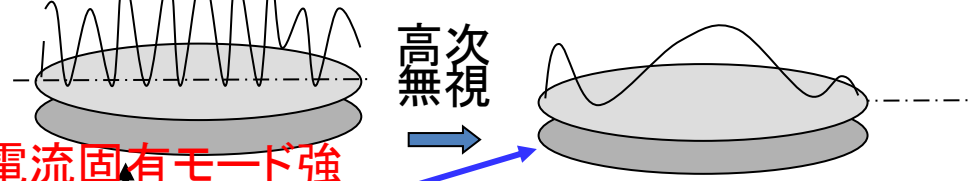
2.2. 固有モード強度に注目したTSVD正則化 (2)

模式的説明



v_i, u_i^t および λ_i で i 番目固有モードを構成

全て加算 = 最小2乗法

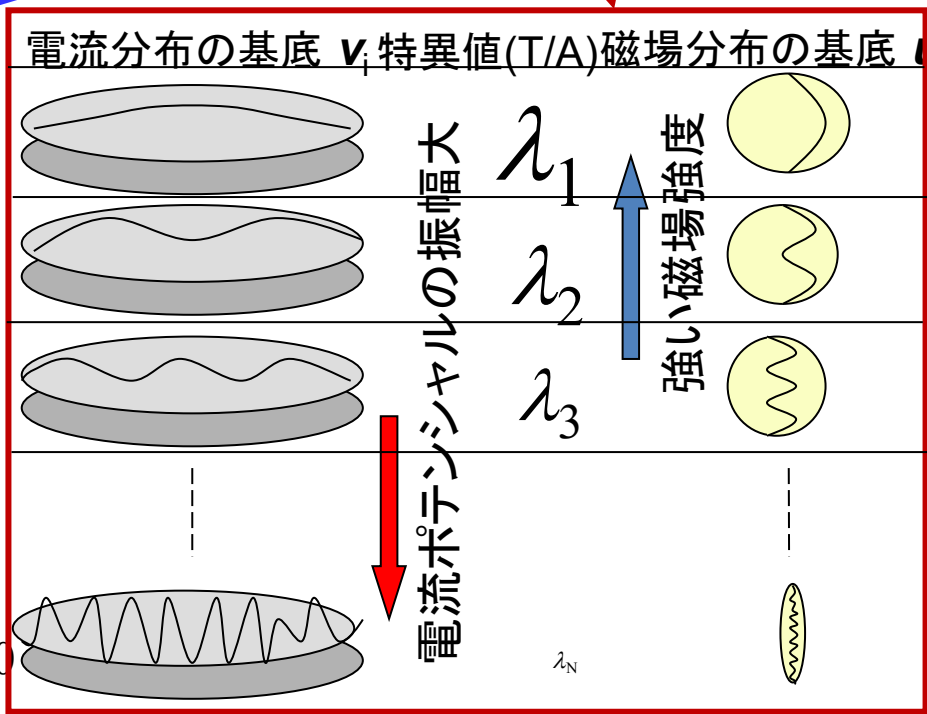


電流固有モード強度 $I_k = n_p^{1/2} P_k / \lambda_k$

固有モード強度 $P_k = u_k^t B / n_p^{1/2}$

行列Aのランクの数

$-1.0/\lambda \sim 1$
 $0.5/\lambda \sim 5$
 $0.05/\lambda \sim 20$
 $0.001/\lambda \sim 1000$



電流ポテンシャルの振幅大

強い磁場強度

λ_N

-1.0
 0.5
 0.05
 0.001

2.3. 目標磁場について

磁場設計の目標磁場 \mathbf{B}^{TG} は、 B_X, B_Y, B_Z のどの方向でもあり得るが、一様磁場の場合(MRI, g -2/EDM実験やMuSEUM実験の磁場)についてコメントする。一様磁場を目指した設計では、磁石軸 Z 方向の磁場を取り扱う。つまり。

$$\mathbf{B}^{\text{TG}} = (B_{Z1}^{\text{TG}}, B_{Z2}^{\text{TG}}, \dots, B_{Zi}^{\text{TG}}, \dots, B_{ZM}^{\text{TG}})$$

である。一方で、実機での計測値や試験対象(Muon)が感じる磁場は、磁場の絶対値であり、わずかな差異がある。その差は、

$$\text{絶対値} = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_Z^2} \simeq B_Z \left\{ 1 + 0.5 \left(\frac{B_{\perp}^2}{B_Z^2} \right) \right\}, \quad (4-19)$$

である。括弧内第2項は、 B_{\perp} 成分が100ppmレベルの誤差があっても、 $5E-9$ の大きさで、一様磁場に与える影響は極めて小さい。

記号 \mathbf{B}^{**} (上添え字**は、MS(計測磁場), TG(目標磁場), REC(再構成磁場), RE(残差磁場)等)の要素は i 番目磁場評価点に対して B_i^{**} である。

余談であるが、SVDを行う計算ツールは、現在ではwebから容易にダウンロードできると思います。'80年代では、ネットは無かったので、この方法を使い始めた時には、正方行列の固有値・ベクトルを求めるプログラムから自作した。現代は非常に効率的である。

3. TSVD正則化を用いる練習問題

第2章での定式化を、簡単な体系で練習問題として磁場設計を行うことで、理解を助ける。

- ・円環体系で垂直断面(ポロイダル断面)内の磁場を目標磁場として、円環面を周回(トロイダル)方向に流れる電流分布を求める。

3.1 例題の計算体系

(円電流の計算精度を補足)

3.2 応答行列と特異値分解

3.3 磁場・電流分布の再構成

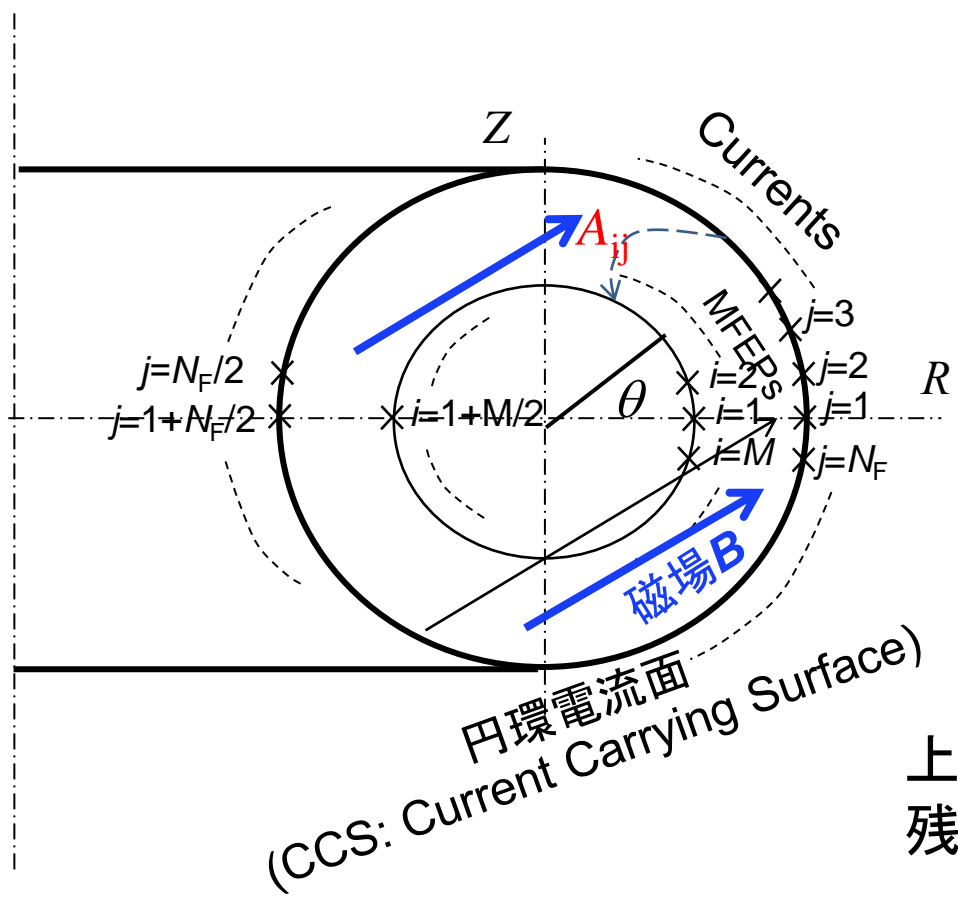
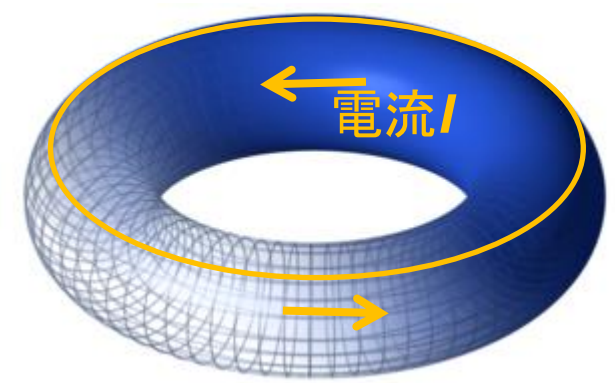
3.4 目標磁場とMaxwell方程式

3.5 第3章のまとめ

3.1 例題の計算体系

電流: トーラス面上を周回方向に流れる電流 I

$$I = (I_1, I_2, \text{-----}, I_{NF})$$



磁場: ポロイダル断面上的の磁場 B

$$B^{**} = \sin(\theta)B_R + \cos(\theta)B_Z$$

$$B^{**} = (B_1^{**}, B_2^{**}, \text{-----}, B_{NP}^{**})$$

上添字**は目標TG、再構成REC、残差RE、平均AV、基準0、----など

3.1 例題の計算体系 (2)

現在の練習問題は

$$\mathbf{B}^{\text{TG}} \doteq \mathbf{A}\mathbf{I}$$

の電流 \mathbf{I} を求めることで、答えは、

$$\mathbf{I} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^{\text{t}} \mathbf{B}^{\text{TG}}) \mathbf{v}_{\mathbf{k}} / \lambda_{\mathbf{k}}$$

そこで、 \mathbf{A} を求め特異値分解(SVD)を適用する。 A_{ij} 計算で円電流が作る磁場の場合、

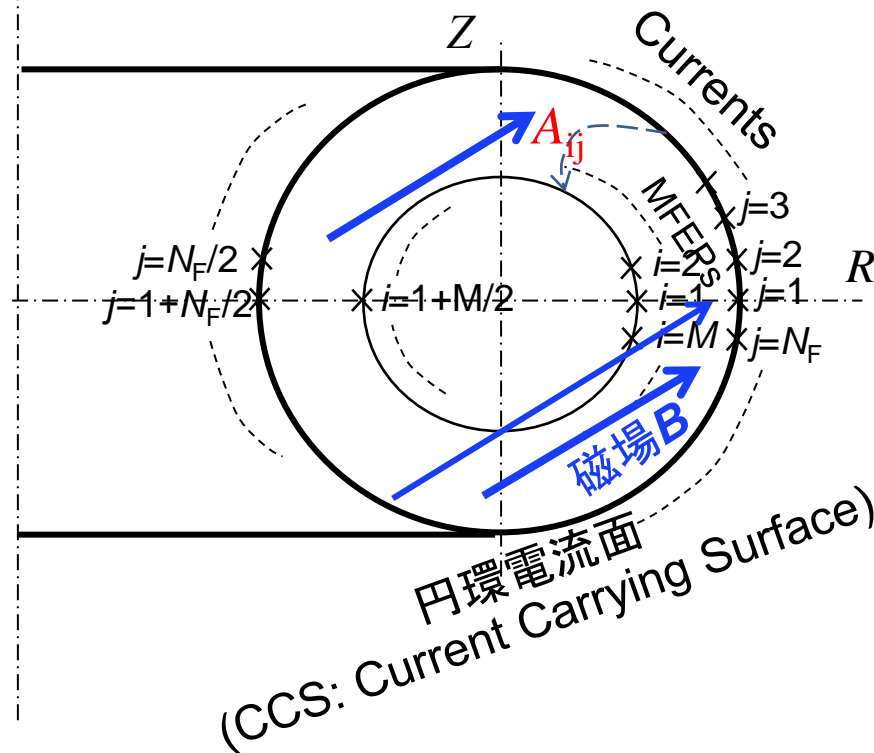
$$B_Z = \frac{\mu_0 I \sqrt{k}}{4\pi \sqrt{R_c R_m}} \left[\frac{R_c^2 - R_m^2 - Z_m^2}{(R_c - R_m)^2 + Z_m^2} E(k) + K(k) \right]$$

$$B_R = \frac{\mu_0 I Z_m \sqrt{k}}{4\pi R_m \sqrt{R_c R_m}} \left[\frac{R_c^2 + R_m^2 + Z_m^2}{(R_c - R_m)^2 + Z_m^2} E(k) - K(k) \right]$$

$$E(k) = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k \sin^2 \theta} d\theta$$

$$K(k) = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}}$$

$$k = \frac{4R_c R_m}{(R_c + R_m)^2 + Z_m^2} \quad (k=0 \sim 1.0)$$



ベクトルポテンシャル(例題の体系では周回方向成分のみ)の場合は、

$$A_{\theta} = \frac{\mu_0 I \sqrt{R_c}}{\pi \sqrt{k R_m}} \left[\left(1 - \frac{k}{2}\right) K(k) - E(k) \right]$$

$K(k)$ 、 $E(k)$ は第1種、第2種の完全楕円積分値である。この計算精度は磁場計算精度に直接影響する。→短い計算時間で、高精度に計算できることが必要。

3.1.1 円電流による磁場

多くの磁石は円形コイルの組み合わせで作られる。円電流による磁場を高速・高精度で計算することは、磁場設計を高精度に行うためには極めて重要。

そこで、第1種、第2種の完全楕円関数の計算($K(k)$, $E(k)$)に近似式を使う(参考文献)。

$$K(k) \approx \sum_{n=1}^N c_n k'^n - \ln k' \sum_{n=1}^N d_n k'^n$$

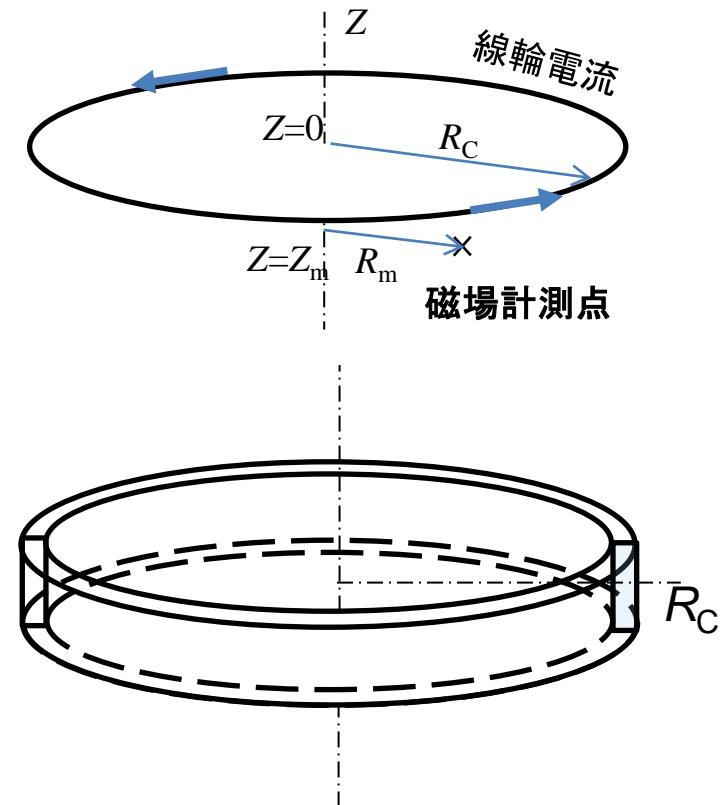
$$E(k) \approx 1.0 + \sum_{n=1}^N a_n k'^n - \ln k' \sum_{n=1}^N b_n k'^n$$

ただし、 $k' = 1.0 - k$

係数 C_n , d_n , a_n , b_n の計算法と数値は参考文献で与えられているので、利用する。

$N=4$ では $2.0E-8$ 程度、 $N=10$ では $1E-12$ 以下の精度が得られる。

MRIや核融合関連では $N=4$ で必要十分な解を得ていた。



[32] W. J. Cody, "Chebyshev approximations for the complete elliptic integrals K and E," Math. Comput., vol. 19, pp. 105–112, 1965. (注)

[34] Xuewei Ping, Li Li, Xinghui Yin, Xin Wang, Qingbo Li, and Meiyang Ju, "A Discussion on Efficient Methods for Computing Magnetic Flux Density of Circular Coils", IEEE Journal of Multiscale and Multiphysics Computational Technique, Vol.4, pp227-233, 2019

3.1.1 円電流による磁場 (2)

円電流: $z=0.15\text{m}$ 、半径 $R_C=0.52$ 、及び、 0.81 m
 磁場計算点, $Z=0.0\text{m}$, $R_m=0.25, 0.0$, および、 0.333 m

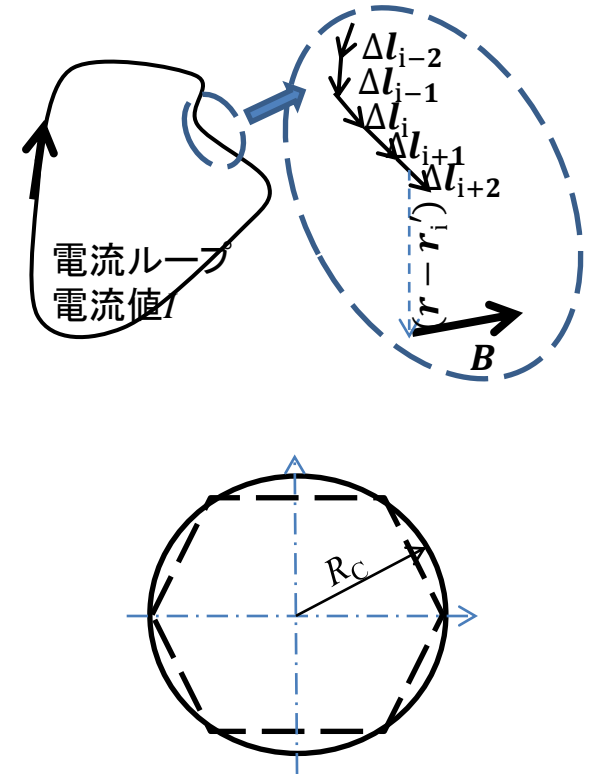
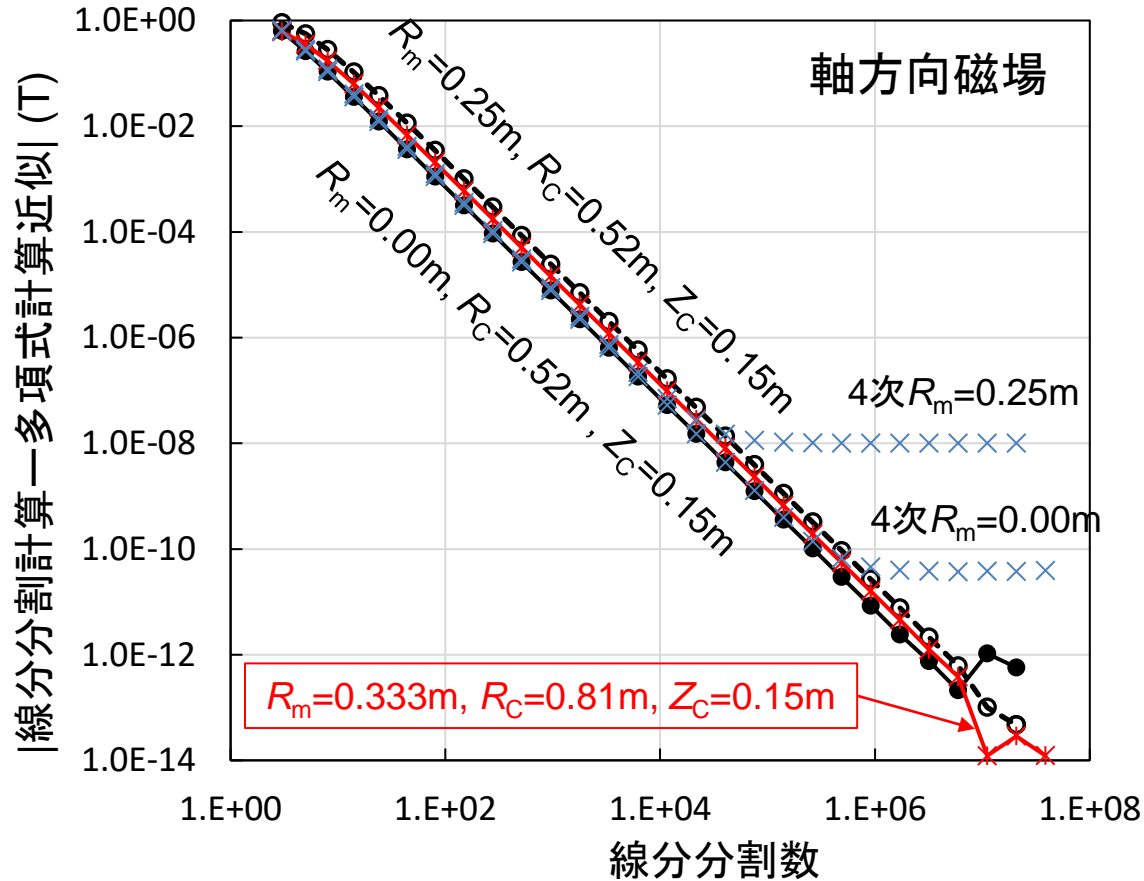
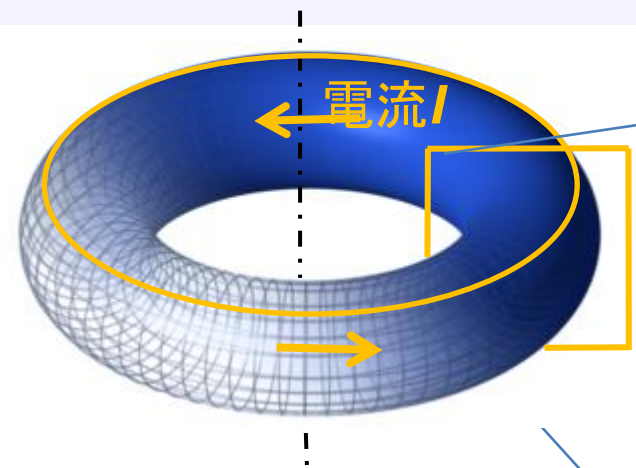


Fig. 3.1-3(a) 曲線の線分分割

Fig. 3.1-3(b) 磁場計算精度の確認。完全楕円積分に近似式を使った解析式による値と線分分割による計算値の比較。

3.2. 応答行列と特異値分解



軸対称の円環上の周回(トロイダル方向電流)を計算する(2D体系)

・電流: 大半径2.0m, 小半径0.4mの円環(トーラス)面を周回方向(トロイダル方向)に流れる電流80本。

$$I = (I_1, I_2, \dots, I_j, \dots, I_{NF})$$

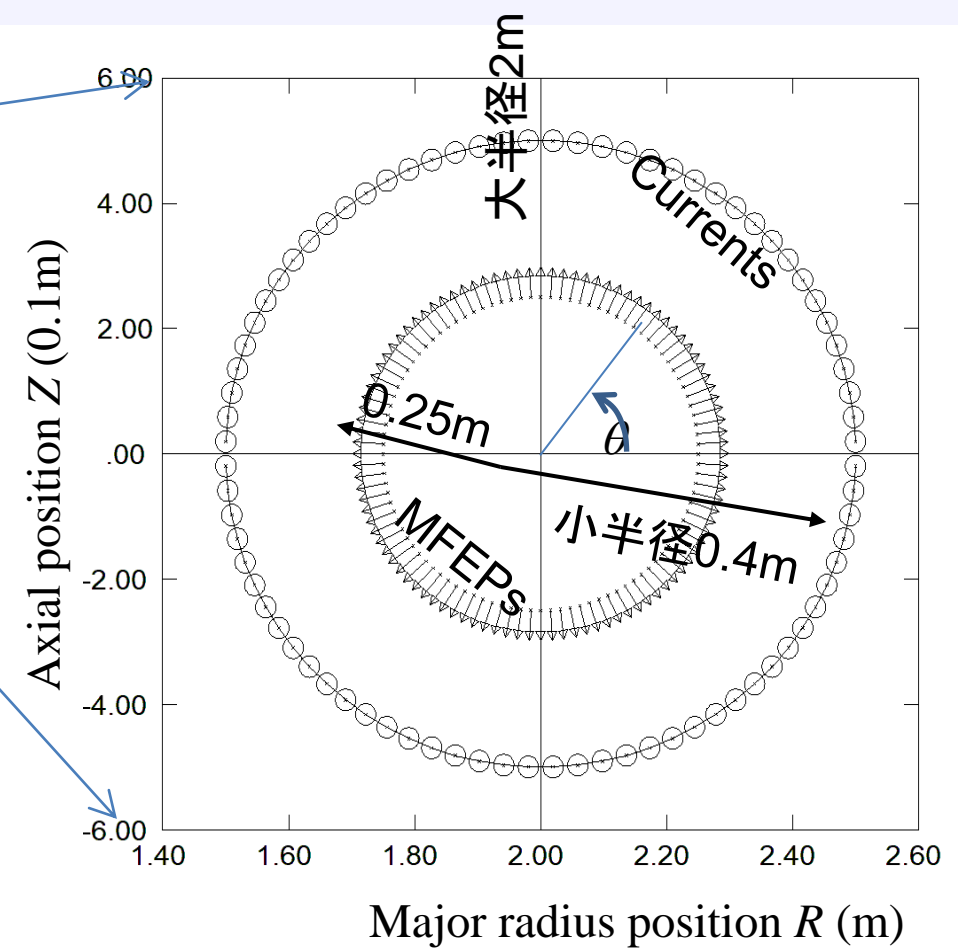
・磁場評価点(MFEPs): 大半径2.0m, 小半径0.25mの円環(トーラス)面上に100点。

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, I_{MA})$$

MFEP上の磁場(B_R, B_Z)が評価磁場であるが、今回は、小半径方向の磁場、

$$B_r = \cos(\theta)B_R + \sin(\theta)B_Z$$

で評価する。



・応答行列A

$$B = AI \quad \{A_{ij} = \cos(\theta) A_{ij}^R + \sin(\theta) A_{ij}^Z\}$$

行列成分 A_{ij} はi番目円電流がj番目MFEPに作る単位電流当たりの磁場。

MFEPs: magnetic Field Evaluation Points

3.2. 応答行列と特異値分解 (2)

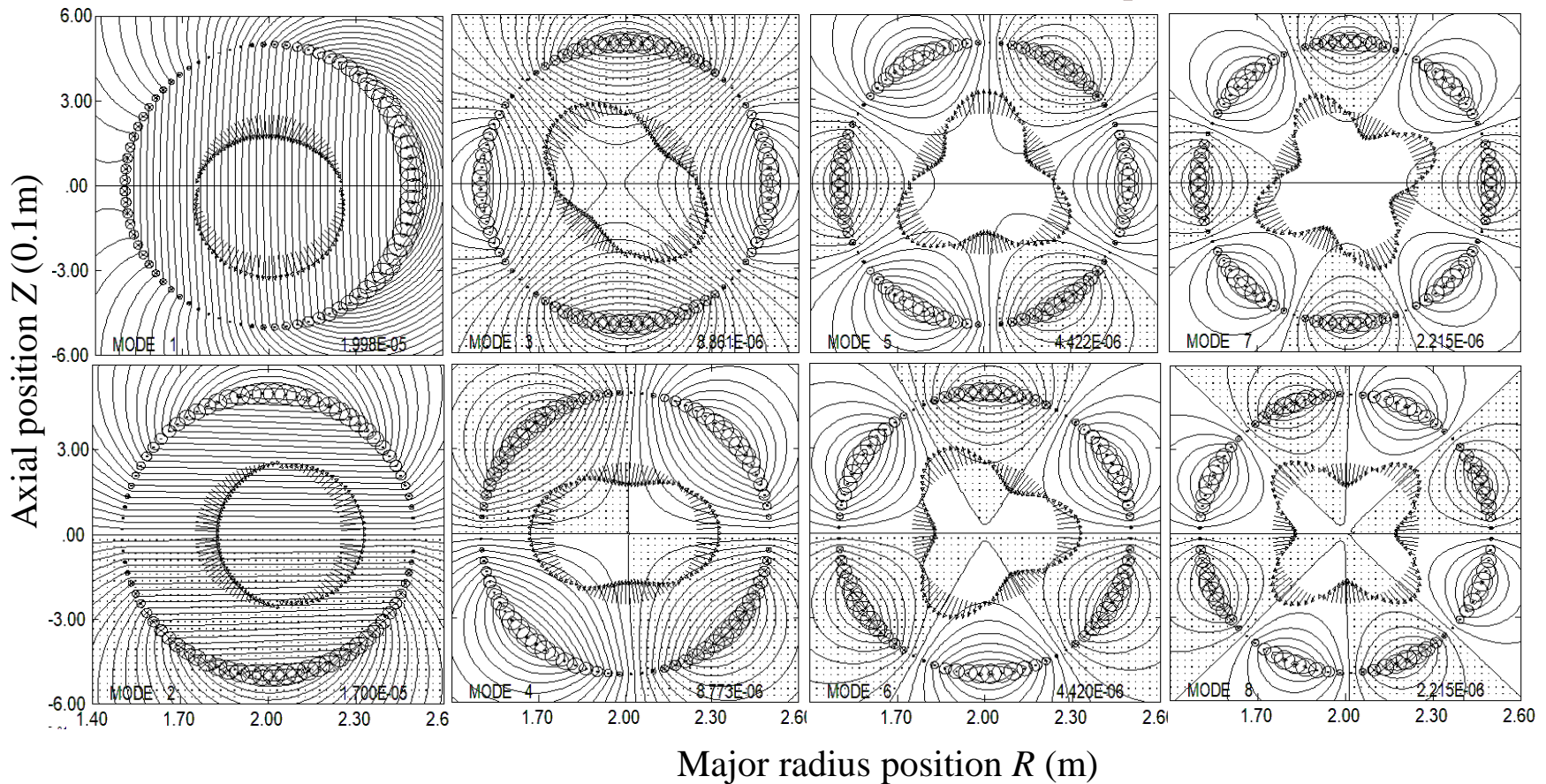
・応答行列 \mathbf{A}

$$\mathbf{B}^{**} = \mathbf{A} \mathbf{I} \quad \{A_{ij} = \cos(\theta) A_{ij}^R + \sin(\theta) A_{ij}^Z\}$$

行列成分 A_{ij} は i 番目円電流が j 番目 MFEP に作る単位電流当たりの磁場 \mathbf{B} 。

$$A_{ij}^Z = \frac{\mu_0 \sqrt{k}}{4\pi \sqrt{R_{cj} R_{mi}}} \left[\frac{R_{cj}^2 - R_{mi}^2 - Z_m^2}{(R_{cj} - R_{mi})^2 + Z_m^2} E(k) + K(k) \right]$$

$$A_{ij}^R = \frac{\mu_0 Z_m \sqrt{k}}{4\pi R_{mi} \sqrt{R_{cj} R_{mi}}} \left[\frac{R_{cj}^2 + R_{mi}^2 + Z_m^2}{(R_{cj} - R_{mi})^2 + Z_m^2} E(k) - K(k) \right]$$



3.2. 電流-磁場の応答行列と特異値分解 (3)

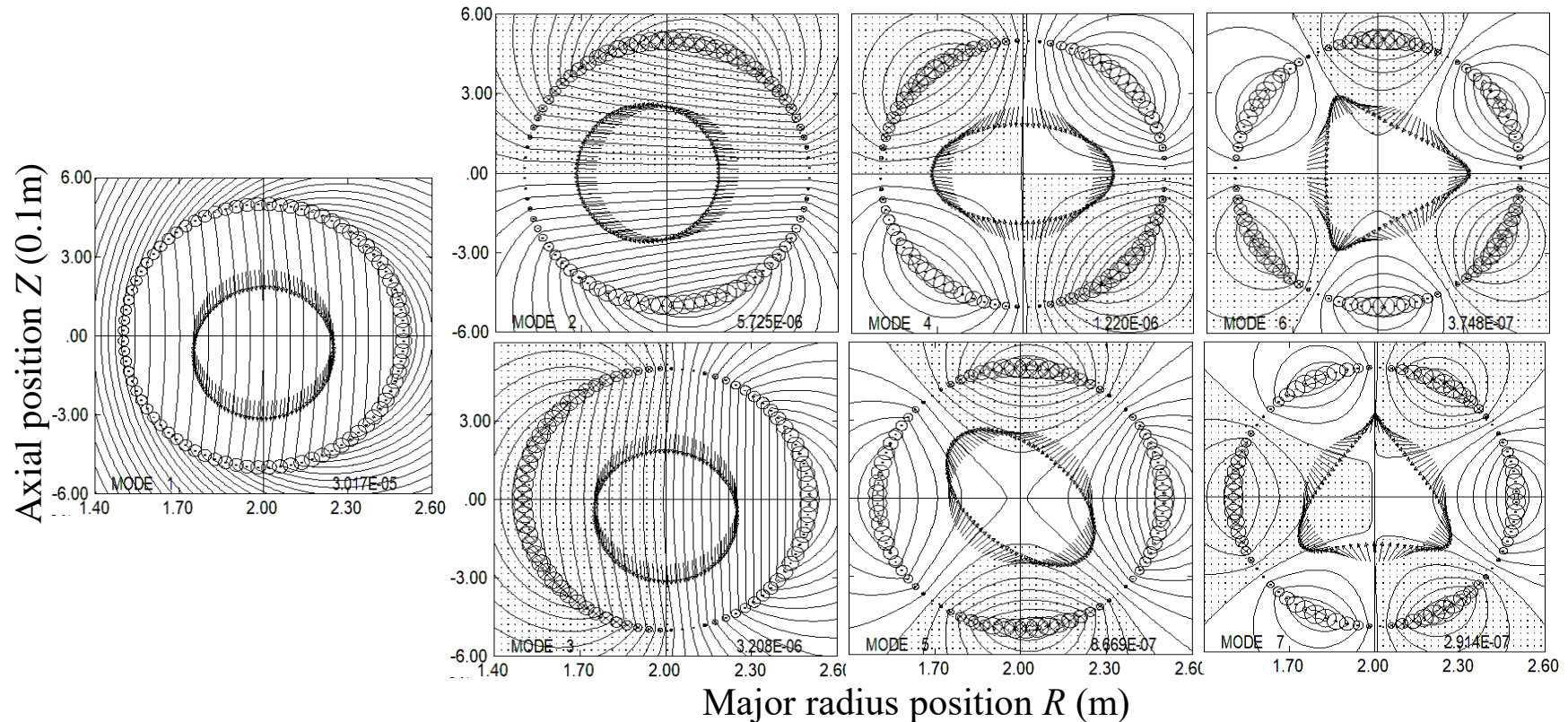
・応答行列 A

$$B^{**} = AI$$

行列成分 A_{ij} は i 番目円電流が j 番目 MFEP に作る単位電流当たりのベクトルポテンシャル A_{Φ} .

$$A_{ij} = \frac{\mu_0 \sqrt{R_{cj}}}{\pi \sqrt{k R_{mi}}} \left[\left(1 - \frac{k}{2} \right) K(k) - E(k) \right]$$

$$k = \frac{4R_{cj}R_{mi}}{(R_{cj} + R_{mi})^2 + Z_{mi}^2} \quad (k=0 \sim 1.0)$$



3.3. 磁場・電流分布の再構成

目標磁場: \mathbf{B}^{TG}

$B_Z = 1.0\text{T}$ 一様

$$B_i^{\text{TG}} = \sin(\theta_i) B_Z$$

$$\mathbf{B}^{\text{TG}} = \{ \text{-----}, \sin(\theta_i) B_Z \text{-----} \}$$

$$\mathbf{I} = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{TG}} / \lambda_k$$

$$= \sum_k n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P_k^{\text{TG}} / \lambda_k,$$

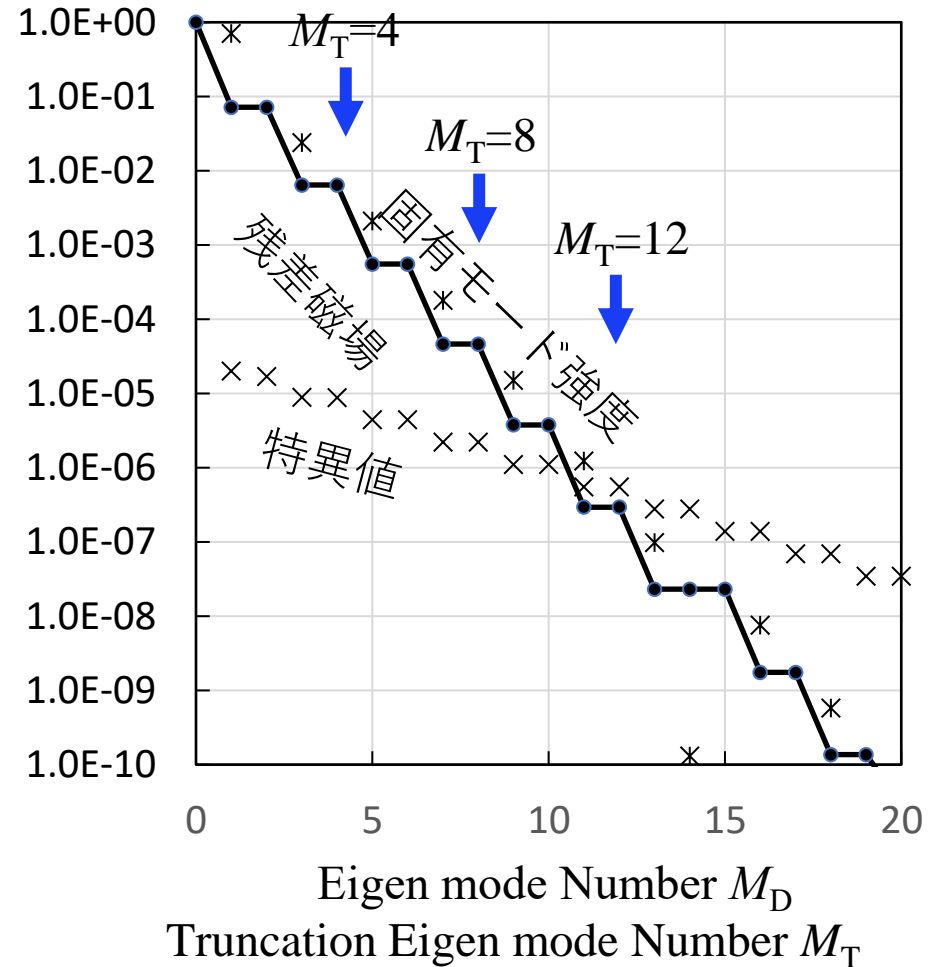
$$P_k^{\text{TG}} = \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{TG}} / n_p^{1/2}$$

$$\mathbf{B}^{\text{REC}} = \sum_k n_p^{1/2} P_k^{\text{TG}} \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{B}^{\text{RE}} = \mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{B}^{\text{REC}}$$

$$B_{\text{PP}}^{\text{RE}} = B_{\text{MAX}}^{\text{RE}} - B_{\text{MIN}}^{\text{RE}}$$

Singular value λ_k [T/A], Eigenmode strength P_k^{TG} [T],
Peak-to-peak residual $B_{\text{PP}}^{\text{RE}}$ [T]



3.3. 磁場・電流分布の再構成 (2)

下記式で $k=1\sim M_T$ で加算して電流分布 I を求め、

$$I = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG} / \lambda_k$$

$$= \sum_k n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P_k^{TG} / \lambda_k,$$

円電流の集まりとして、磁場分布 $B_Z^{REC}(\mathbf{X})$ を計算。

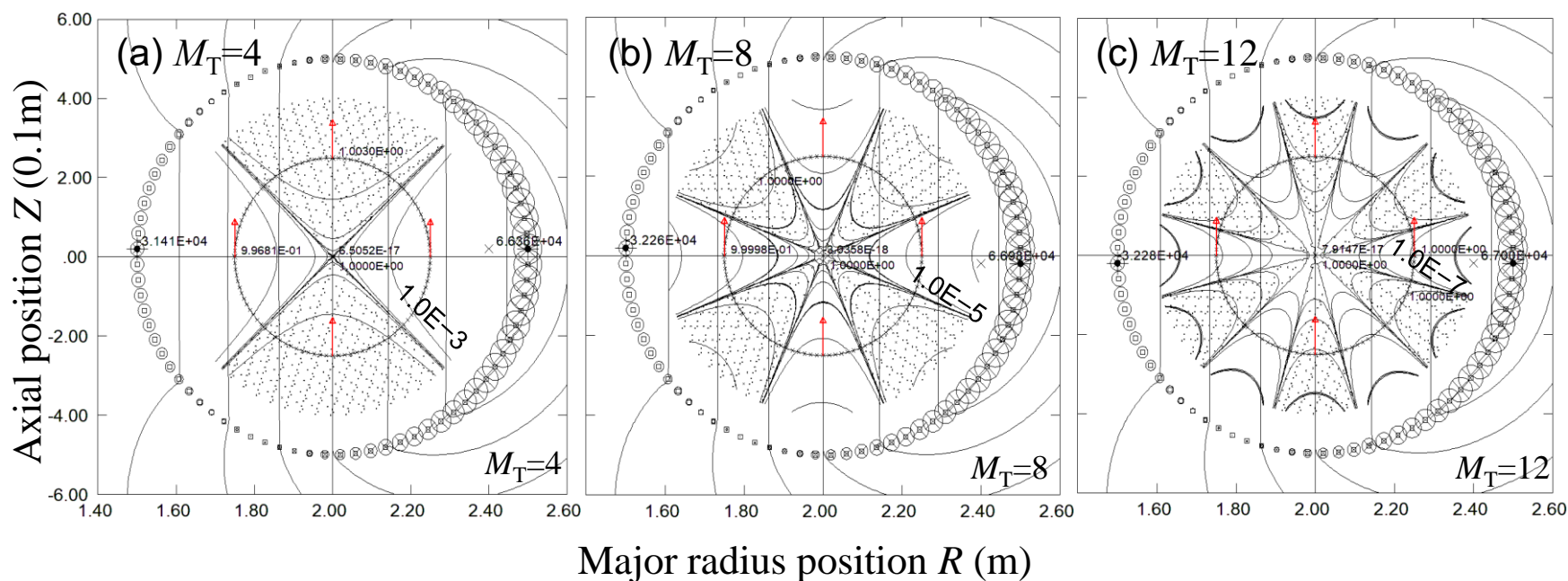
下記式で残差磁場分布を計算

$$B^{RE}(\mathbf{X}) = B_Z^{TG} - B_Z^{REC}(\mathbf{X})$$

ここでは目標磁場を

$$B_Z^{TG} = 1.0T$$

としている。



磁場を目標とした場合の磁場分布をベクトルポテンシャル A_ϕ (上下に走る線)と残差磁場分布(放射状の等高線、単位:T)。 M_T を増やすことで、残差磁場は減少する。

3.3. 磁場・電流分布の再構成 (3)

目標磁場をベクトルポテンシャルで与える場合、

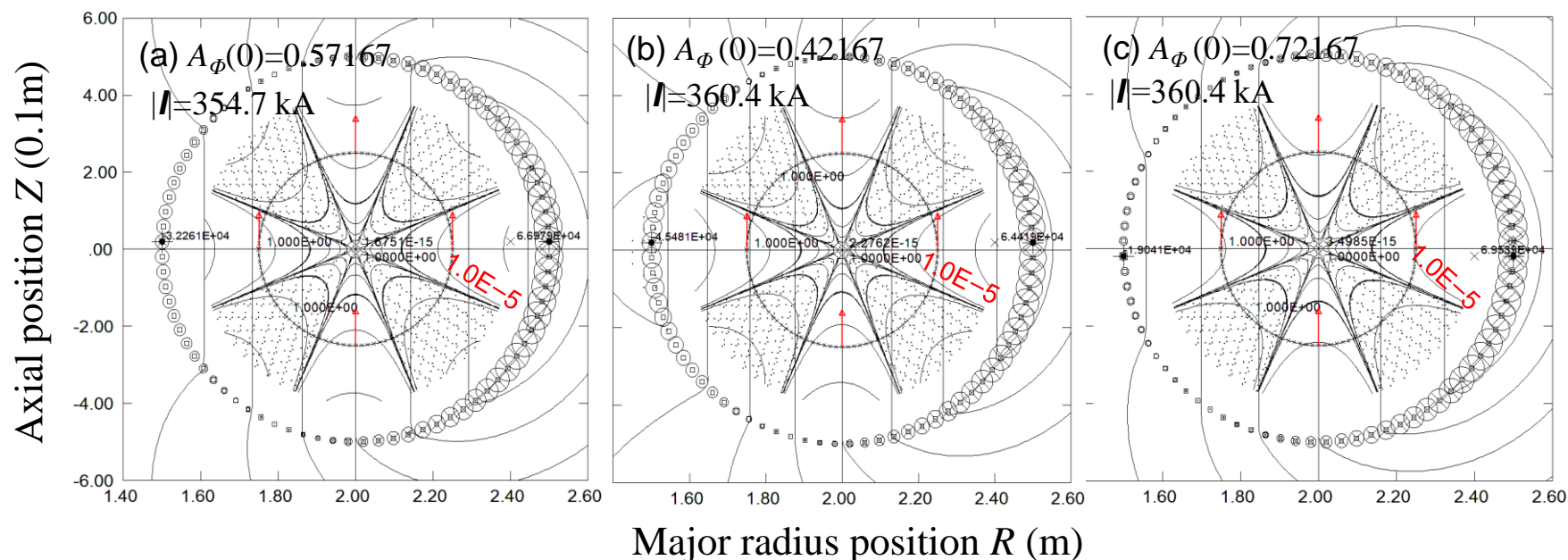
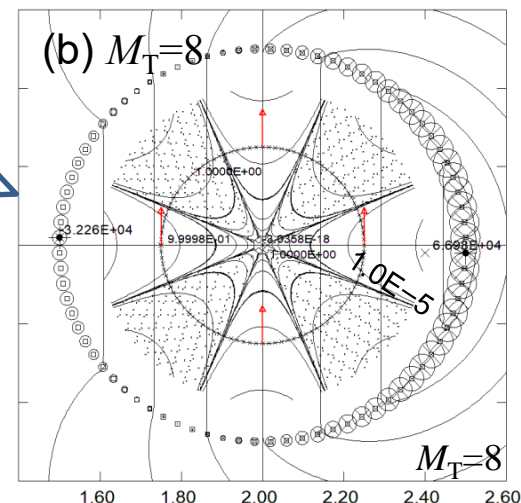
$$A_{\phi}^{TG} = R/2.0 + \text{Const}/R$$

であれば、軸方向磁場は、

$$B_Z^{TG} = \frac{1}{R} \frac{\partial R A_{\phi}}{\partial R} = 1.0 \text{ T}$$

で前ページと同じ目標磁場である。
この目標磁場で磁場を再構成し、
残差を求めた結果($M_T=9$)が下図。

目標磁場を磁場
分布 $B(1\text{T一様})$
で与えた場合



ベクトルポテンシャルを目標磁場として電流分布計算も出来る。磁場を目標とした場合(右上)は左端に近い結果であり、電流の絶対和は小さい。

3.4 目標磁場とMaxwell方程式(B_R の目標磁場)

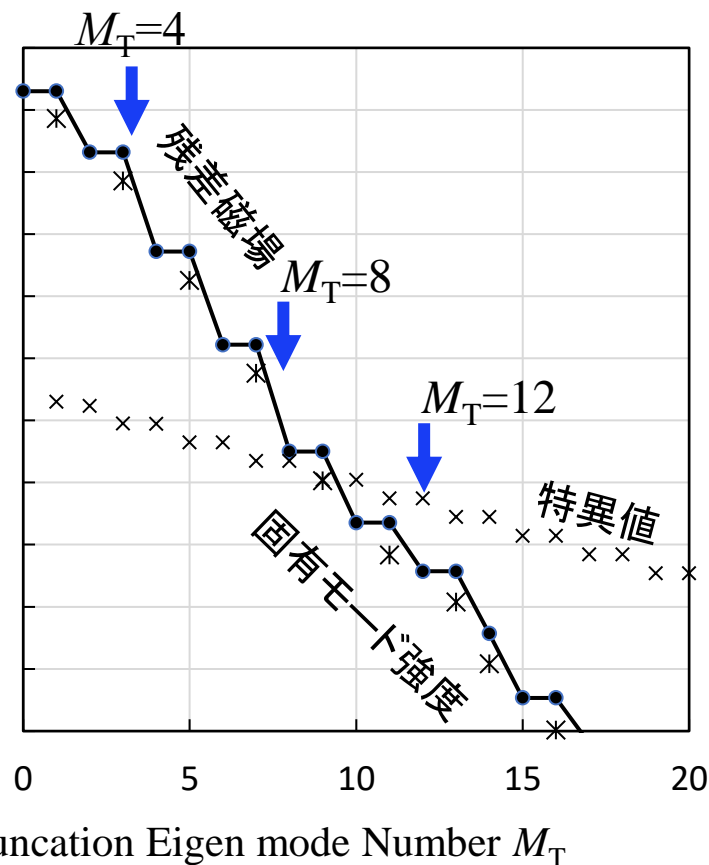
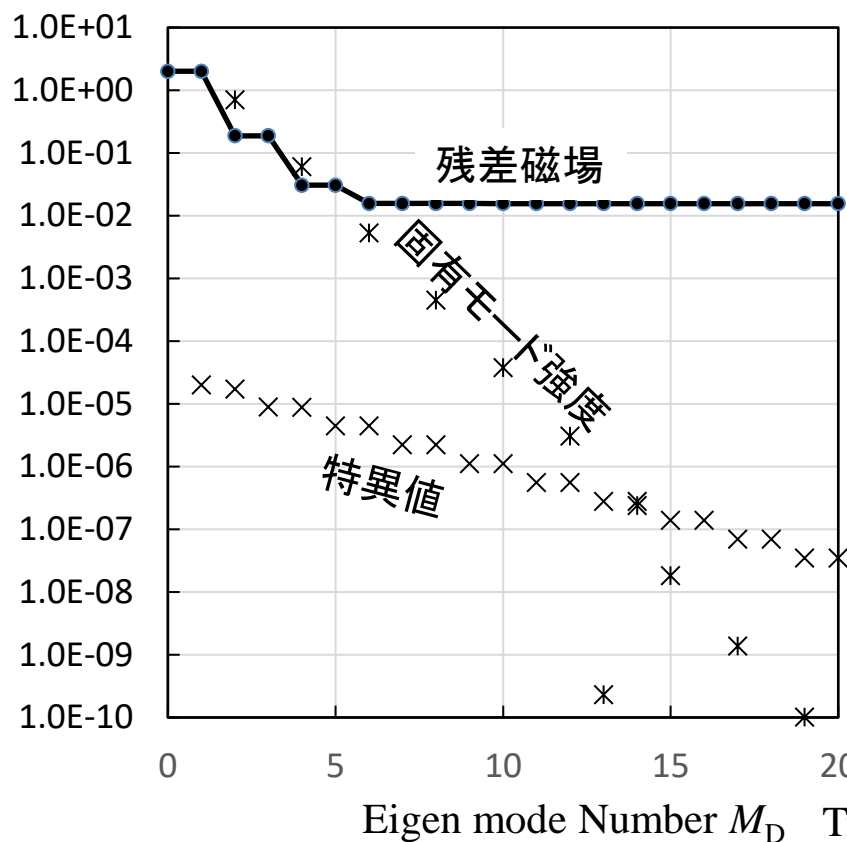
Maxwell方程式と整合しない目標磁場を与えた場合を示しておく、

左側: $B_R^{TG} = 1.0$ [T]とした場合、

右側: $B_R^{TG} = R/2.0$, & $B_Z^{TG} = -Z$ [T]

$div\mathbf{B}=0$ ($\frac{1}{R}\frac{\partial RB_R}{\partial R} + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0$)に
矛盾しない目標磁場は右側

Singular value λ_k [T/A], Eigenmode strength F_k^{TG} [T],
Peak-to-peak residual B_{pp}^{RE} [T]



残差磁場強度の比較、目標磁場、左: Maxwellと矛盾、右: Maxwellに整合

3.4 目標磁場とMaxwell方程式 (B_R の目標磁場2)

下記式で $k=1\sim M_T$ で加算して電流分布 I を求め、

$$I = \sum_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG} / \lambda_k$$

$$= \sum_k n_p^{1/2} \mathbf{v}_k P_k^{TG} / \lambda_k,$$

円電流の集まりとして、磁場分布 $B_Z^{REC}(\mathbf{X})$ を計算。

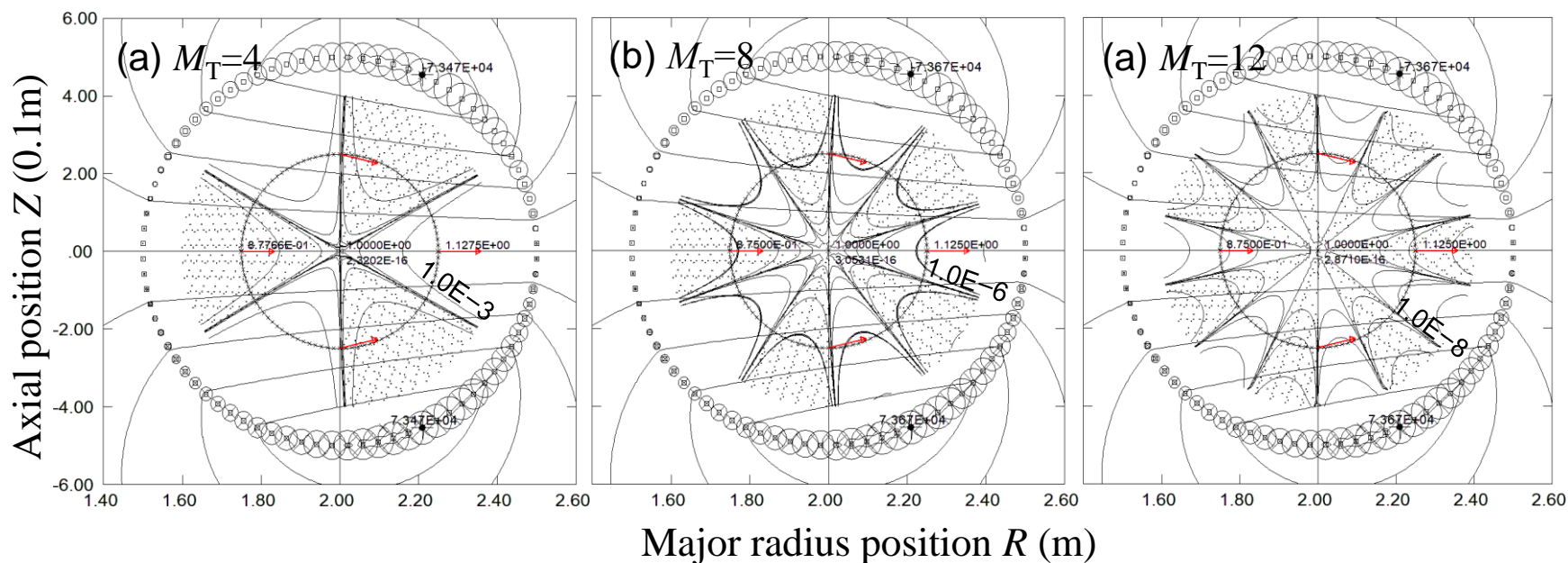
下記式で残差磁場分布を計算

$$B^{RE}(\mathbf{X}) = B_Z^{TG} - B_Z^{REC}(\mathbf{X})$$

ここでは、目標磁場を、カプス磁場

$$B_R^{TG} = R/2.0, \text{ \& } B_Z^{TG} = -Z \text{ [T]}$$

としている。



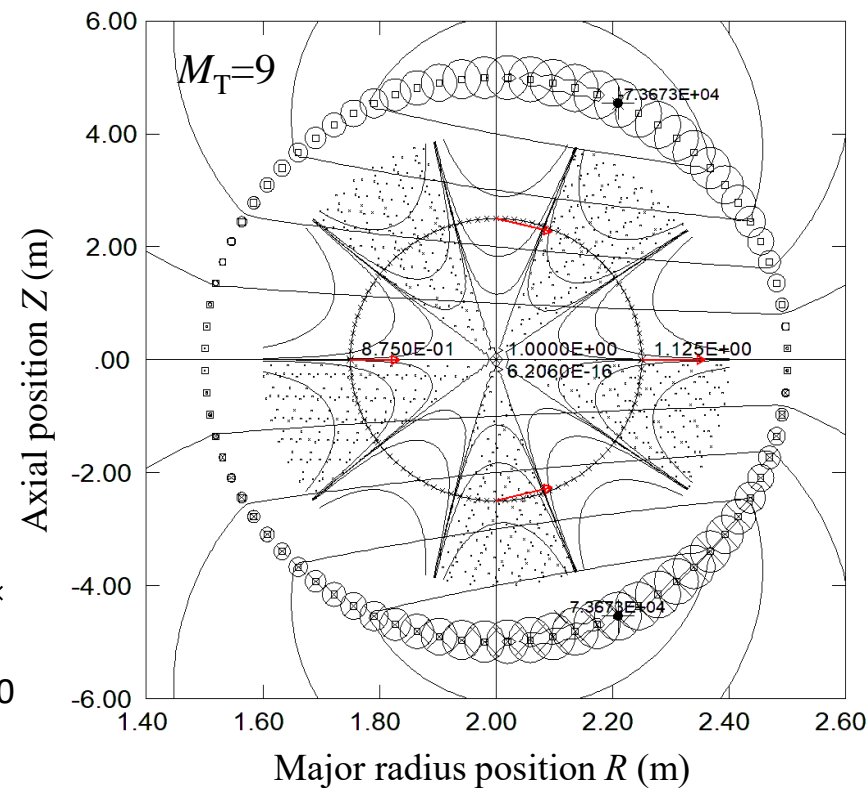
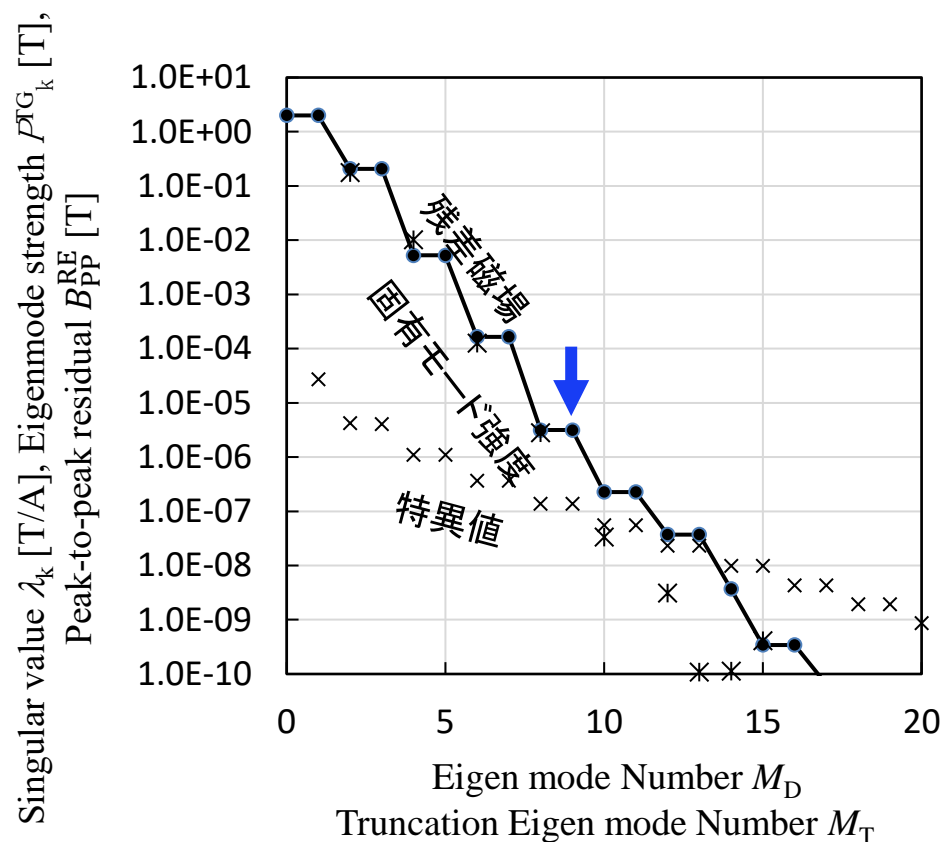
磁場を目標とした場合の磁場分布をベクトルポテンシャル A_ϕ (左右に走る線)と残差磁場分布(放射状の等高線、単位:T)。 M_T を増やすことで、残差磁場は減少する。

3.4 目標磁場とMaxwell方程式(3)

目標磁場にベクトルポテンシャル利用し、

$$A_{\phi}^{\text{TG}} = -RZ/2.0 \quad (3-21)$$

とする場合の、磁場再構成。



3.4 目標磁場とMaxwell方程式(4 勾配磁場の場合)

目標磁場を

$$B_Z(R) = 1.0 + \text{Const}(R - 2.0) \text{ [T]},$$

とすると、 $\frac{\partial B_R}{\partial Z} = \frac{\partial B_Z}{\partial R}$ であることから、

$$B_R^{\text{TG}} = \text{const}Z$$

さらに、

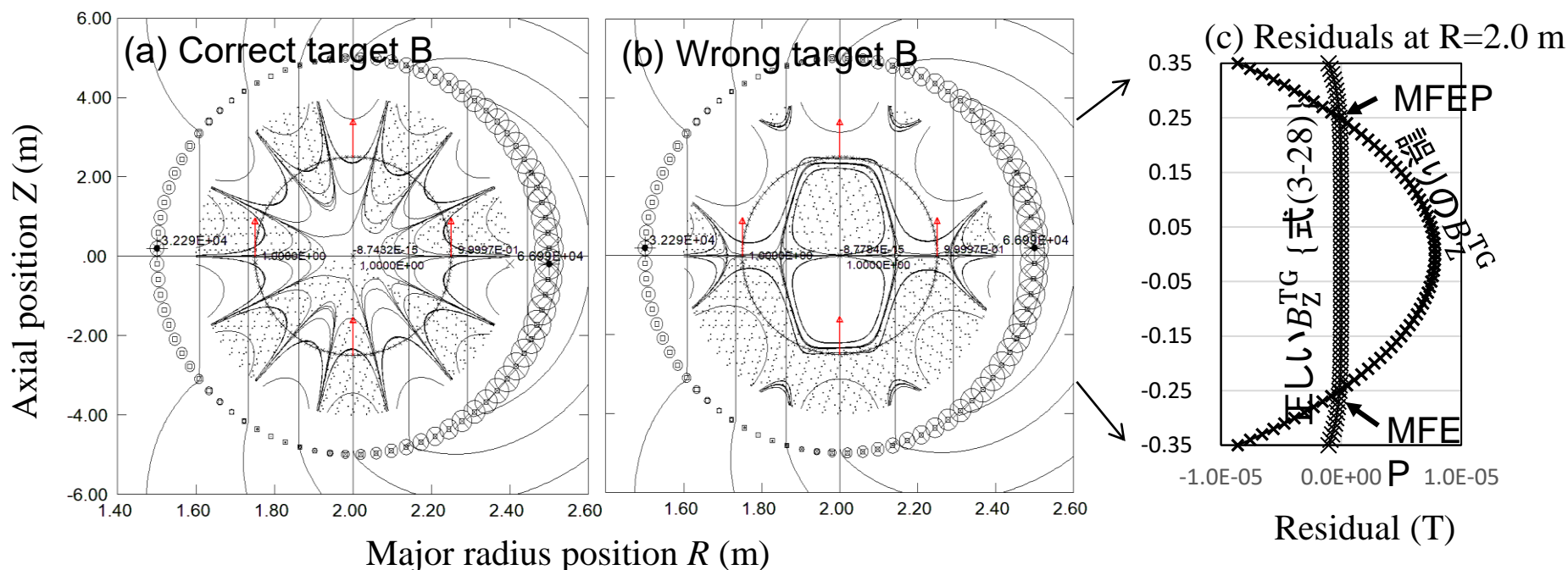
$$\frac{1}{R} \frac{\partial R B_R}{\partial R} + \frac{\partial B_Z}{\partial Z} = 0$$

で有ることが必要であり、 $Z=0$ 面以外では、

$$\Delta B_Z^{\text{TG}} = \frac{-1}{R} \frac{\partial B_Z}{\partial R} \frac{Z^2}{2}$$

を追加する。

$$B_Z^{\text{TG}} = 1.0 + \frac{\partial B_Z}{\partial R}(R-2.0) - \frac{\partial B_Z}{R_0 \partial R} \frac{Z^2}{2}$$



勾配垂直磁場の再構成結果、目標磁場、左: Maxwellに整合、中央: Maxwellと矛盾、
右: 残差磁場の軸(Z方向)方向分布(R=2.0m)

3.5 第3章のまとめ

円環体系(トーラス)で、最小二乗法を打ち切り特異値分解正則化で解く手法を、例題を通して説明した。

1. 太い円環上に電流が周回方向に流れ、細い円環上に磁場評価点(MFEPs)を配置し、MFEPsに目標磁場を与え、電流分布を求める、例題である。
2. 円電流の高速・高精度で求めるために完全楕円積分値を展開式で求める手法を説明した。
3. 垂直軸方向(Z)一様磁場を目標にした場合を示した。
4. 大半径方向(R)方向磁場を目標とした場合を通じて、Maxwell方程式との整合性について説明した。また、ベクトルポテンシャルも目標磁場として用いることも可能であると説明した。
5. 最後に垂直磁場に傾斜がある場合の目標磁場について説明した。

4. MRI用磁石の一樣磁場設計

本章では、これまで説明してきた、最小二乗法を打ち切り特異値分解による正則化を使って解く方法(TSVD正則化)を、一樣磁場を持つMRI用磁石の起磁力配置の設計に適用する。

全身用MRIに適用している磁石には、大別して、下図左の垂直磁場(開放)型と右の円筒(トンネル)型の2種類があるが、ここでは、主に円筒型を取り扱う。垂直磁場型(0.2~1.2T)では起磁力源に超電導コイルを用いるもの以外に、永久磁石を用いるものもあるが、円筒型(>1.5T)では全てNbTi線材利用の超電導コイル利用である。

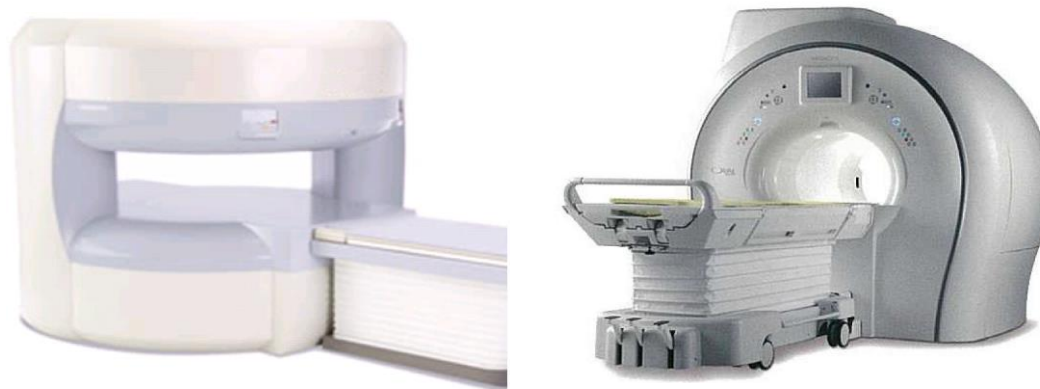


Fig. MRI 装置の外観写真. 左:垂直磁場型, 右:水平磁場型.
(参考文献[29], 図12より引用)

4. MRI用磁石の一樣磁場設計 (2)

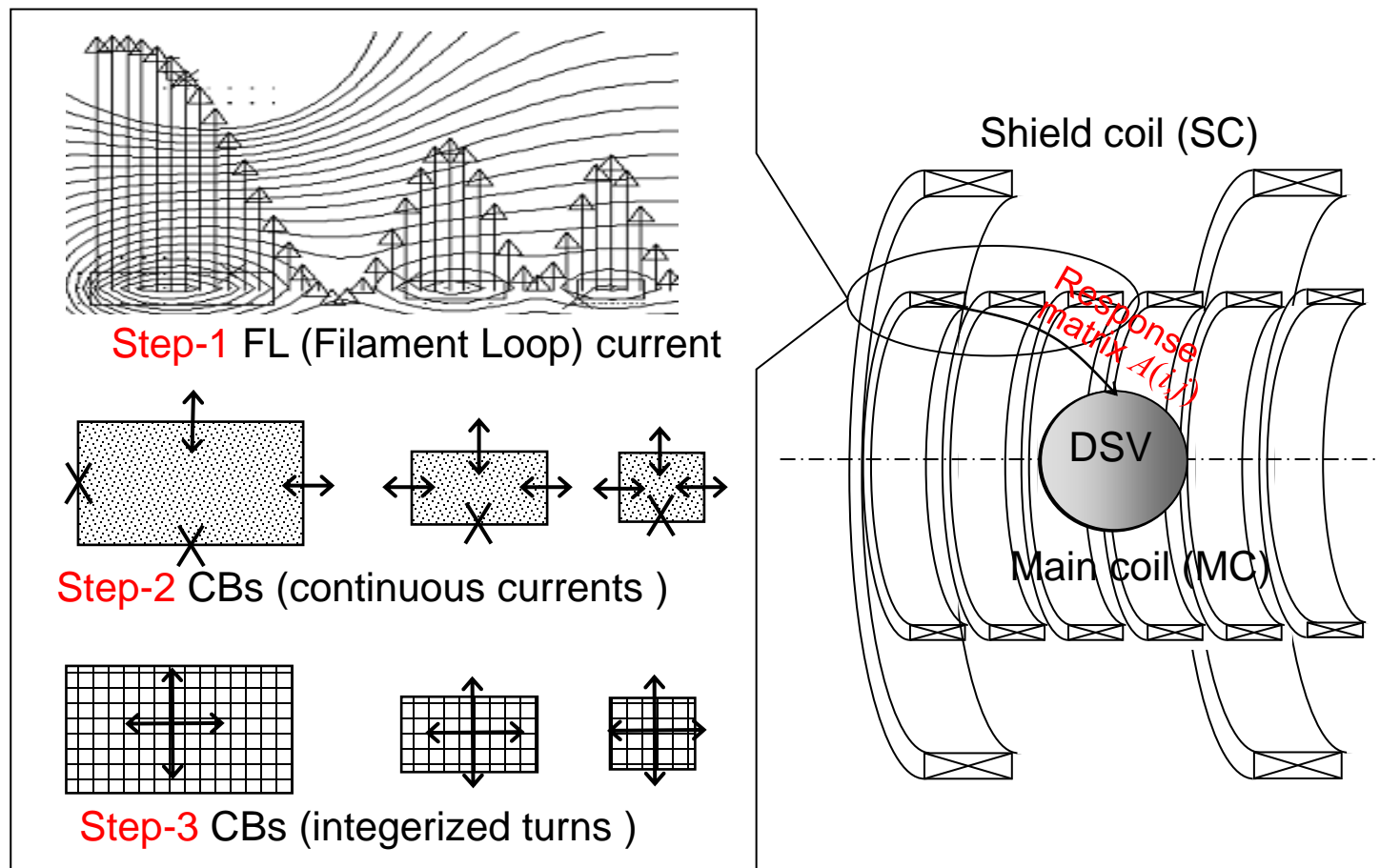
本章では、下記の項目について説明していく。4.1～4.4は磁石の起磁力配置設計例でこの時の目標磁石は右下表である。

- 4.1. MRI磁石磁場設計の磁場成分
- 4.2. 概念検討(Step-1)
(CB断面の積分について)
- 4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2)
- 4.4. 巻き線数の離散化(Step-3)
- 4.5. 鉄芯型MRI磁石の場合
- 4.6. 磁場シミング
- 4.7. MRI磁石静磁場設計のまとめ
Ref. [9, 10]を中心に説明します。

Table 4-1 MRI磁石の試設計仕様
文献[10], Table 1より引用)

Parameter	Value
Number of MC-CBs (N_{MC})	6 (5 to 7)
Magnetic field at center (B^0)	3.00 T
Inner radius of coil blocks	0.500 m
Electrical length of MC (L_e)	1.520 m
Homogeneity in 40 cm DSV	< 1.00 ppm
Volume of interest (VOI)	0.40 m DSV
Radius of shield coil (R_{SC})	0.945 m
Current density, end-MC-CBs	150 A/mm ²
other CBs	180 A/mm ²
Max. magnetic field conductor	<6.20 T
Current drive mode	Persistent

4. MRI用磁石の一様磁場設計 (3)



3段階の計算によりDSV(40cmφ程度)中の磁場を1ppm程度以下とするコイルブロック (CB: Coil Block)配置を求める

4.1. MRI磁石磁場設計の磁場成分

一様磁場を発生するMRI用などの磁石で、起磁力配置を決める磁場設計には、 $|\mathbf{b}|$ ではなく b_z を扱う。これは、計算を線形化するためであり、妥当性を下に述べる。

MRIや後で取り扱うg-2/EDM磁石の磁場は、VOI (Volume OF Interest) 中では極めて一様で、磁石軸方向を向いた磁場 \mathbf{b} である。このとき、 $|\mathbf{b}| \doteq b_z$ で、

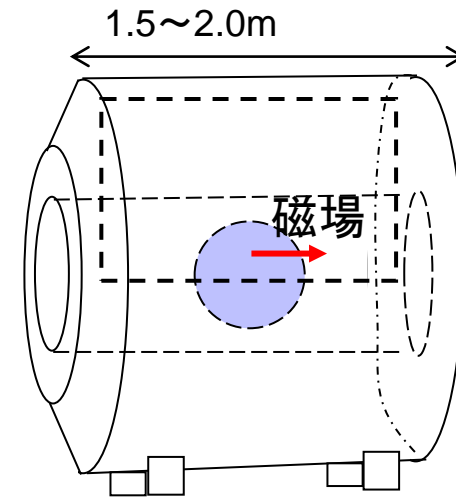
$$b = \sqrt{b_{\perp}^2 + b_z^2} \simeq b_z \left\{ 1 + 0.5 \left(\frac{b_{\perp}^2}{b_z^2} \right) \right\},$$

一様磁場中では、 $|\mathbf{b}|$ の変動は10ppm/40cm程度以下であり、 $\frac{\partial b_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \right)$, および、

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} = \frac{\partial b_y}{\partial z}, \quad \&, \quad \frac{\partial b_z}{\partial x} = \frac{\partial b_x}{\partial z} \text{ を考慮すると、} b_{\perp} \text{成分も}$$

10ppm/40cm程度以下で、 $0.5 \left(\frac{b_{\perp}^2}{b_z^2} \right) < 1.0\text{E-}9$ である。

このため、一様磁場磁石設計ではこの項は無視でき、 $|\mathbf{b}| \doteq b_z$ である。



全身用撮像用MRI磁石
直径50cm球内で均一度10ppm程度

均一度[ppm] =

$$\frac{\text{磁場分布の最大最小値の差}}{\text{平均磁場}} \times 10^6$$

4.2. 概念検討(Step-1)

Step-1: 連続電流(多数の円電流)で主コイル数・位置の概要を決める

(a) 線輪電流→磁場分布の行列 \mathbf{A}

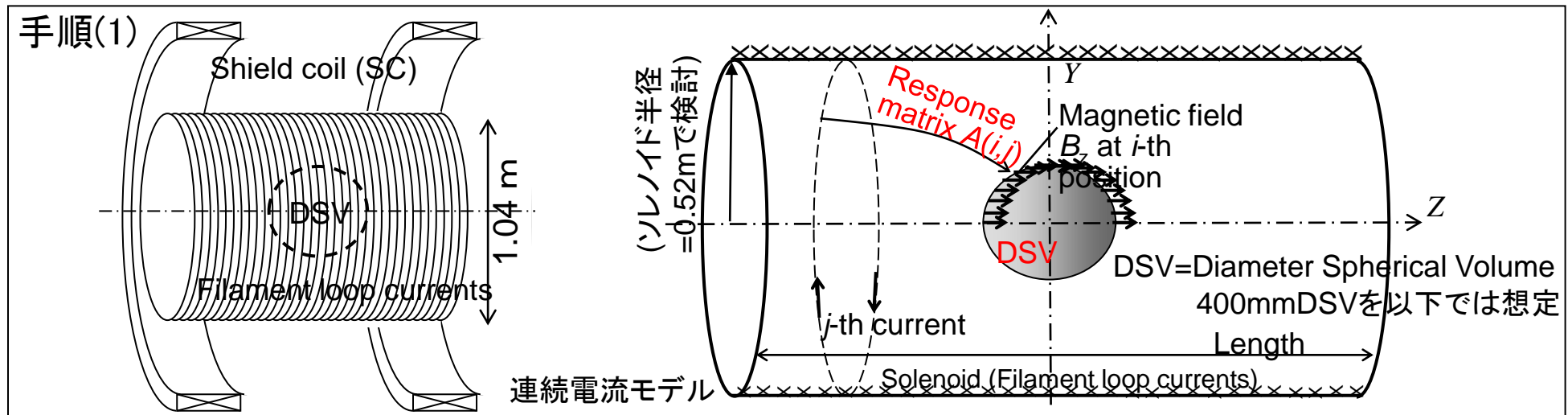
(b) 特異値分解 $\mathbf{A}=\sum \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k^t$ 実行

(c) 固有モードの加算で電流分布

正則化; Truncated SVD (SVD=Singular Value Decomposition)

$\mathbf{I}=\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{TG}$; $\mathbf{A}^*=\sum \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t / \lambda_k$ で打ち切り固有モード番号 M_T まで加算

本研究ではSVDを利用して、利用可能な固有モード(電流分布)を明確化する



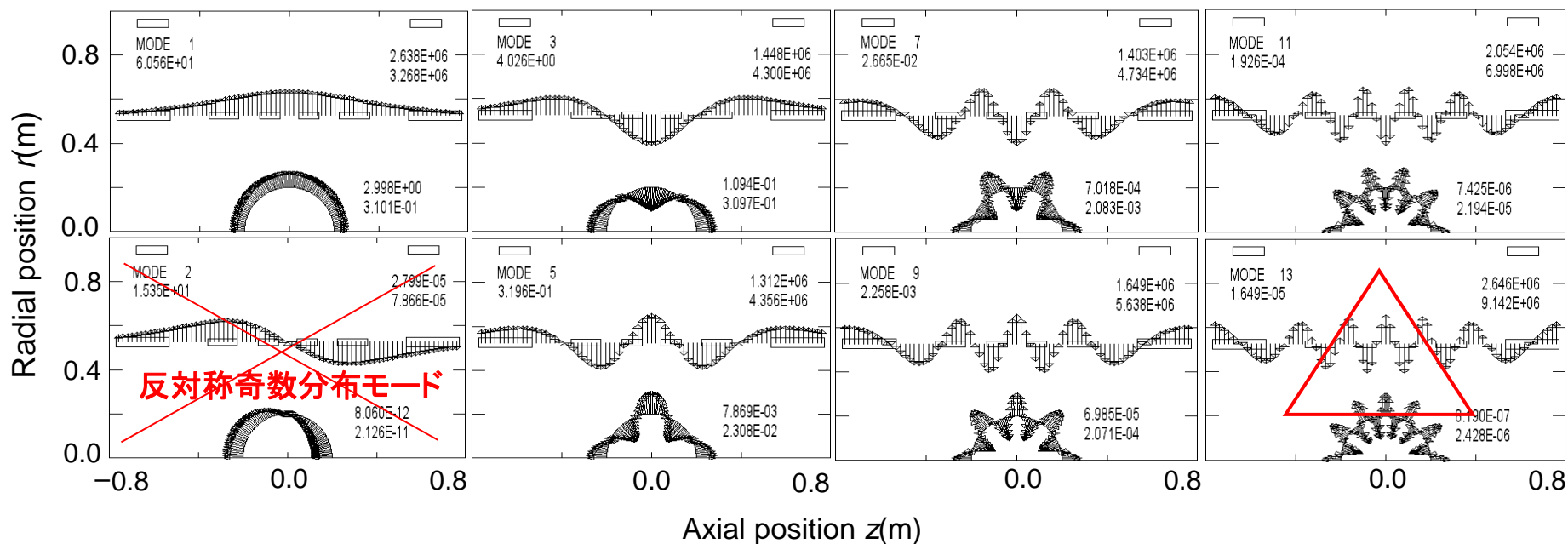
4.2. 概念検討(Step-1) (2)

Step-1の連続電流(多数の線輪電流)モデルによる応答行列Aの特異値分解($\mathbf{A}=\sum \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k^T$)による固有モード

目標精度(|残差磁場|) <1ppm (400mmDSV) <3 μ T ($B^{TG}=3$ Tで一様)

No.	特異値(T/A)	強度(p-p T)	No.	特異値(T/A)	強度(p-p T)
1	6.06E-5	3.10	9	2.56E-9	2.07E-4
3	4.03E-6	0.109	11	1.93E-10	2.19E-5
5	3.20E-7	0.0231	13	1.65E-11	2.43E-6
7	2.57E-8	2.08E-3	15	<1E-11	<1E-6

13番目以上の固有モードの寄与は小さい(1ppm以下)均一度にわずかに影響



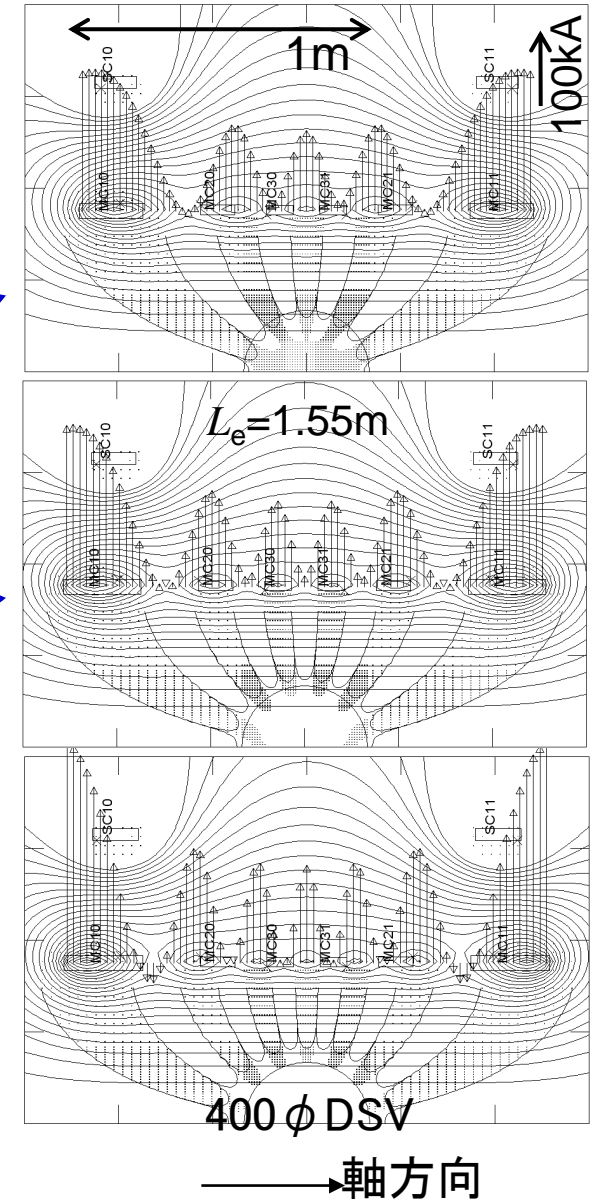
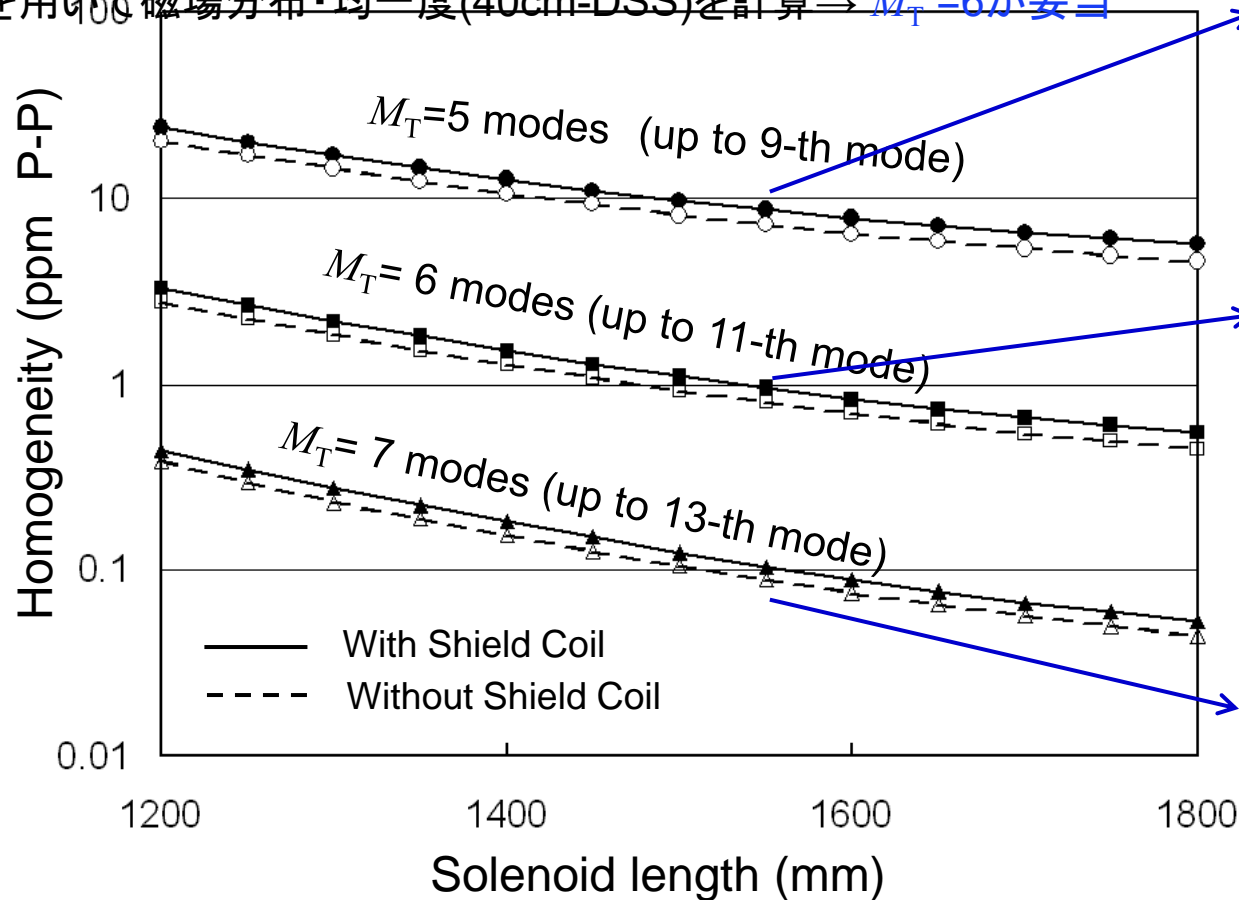
4.2. 概念検討(Step-1) (3)

固有モード数と均一度の関係を把握し、固有モード数を決める。

(シールドコイル(SC)は主コイル(ソレノイド)の-99%磁気モーメント)

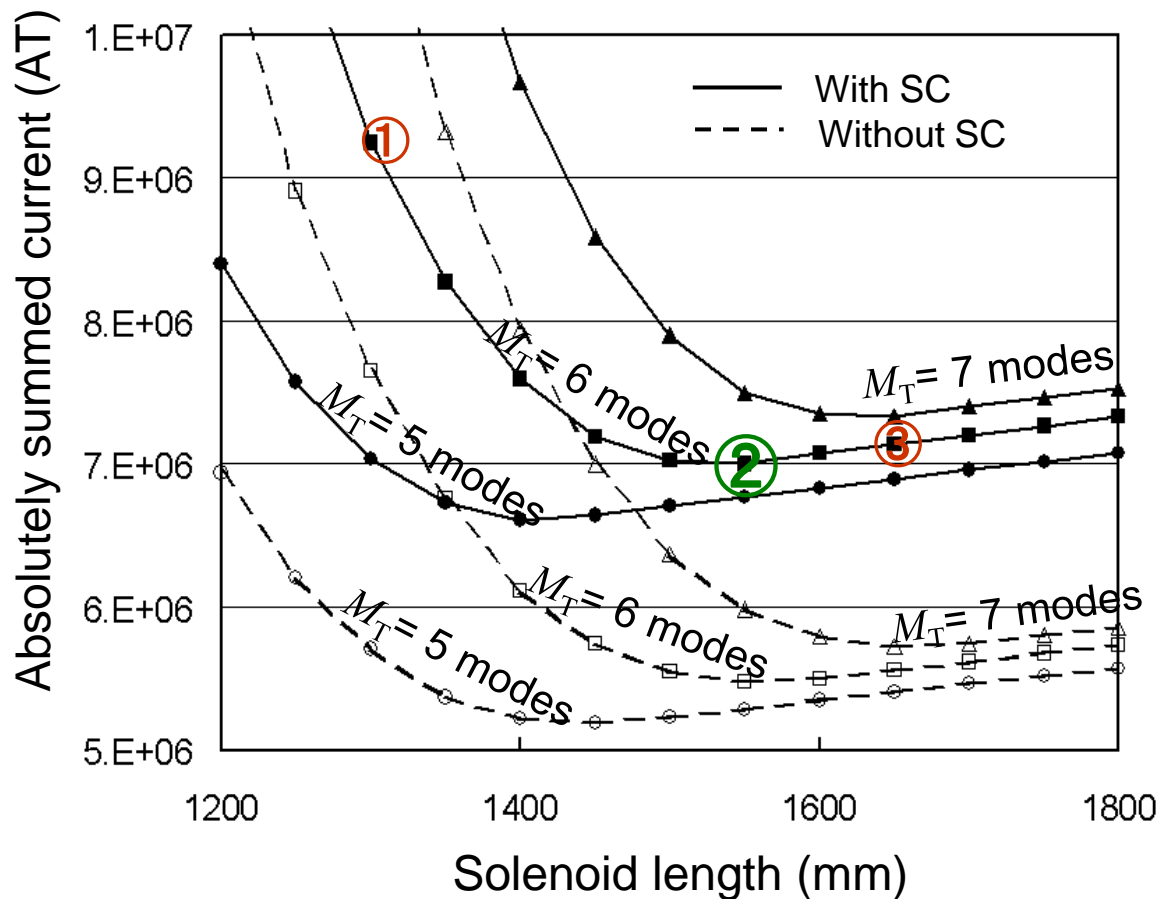
$$\text{目標磁場 } \mathbf{B}^{\text{TG}} = \{3.0\text{T (一様分布)} - \mathbf{B}^{\text{SC}}\} \approx \mathbf{I} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^t \mathbf{B}^{\text{TG}}) \mathbf{v}_{\mathbf{k}} / \lambda_{\mathbf{k}}$$

\mathbf{I} を用いて磁場分布・均一度(40cm-DSS)を計算 $\rightarrow M_T = 6$ が妥当

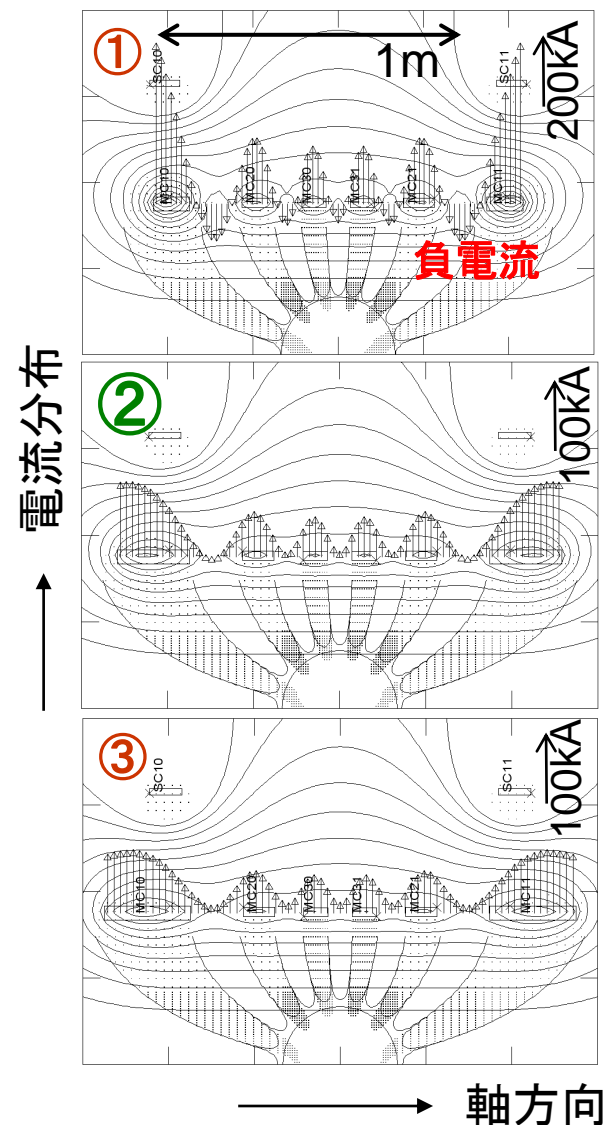


4.2. 概念検討(Step-1) (4)

各打ち切り固有モード数(M_T)で起磁力最少の軸長が存在。
 ②が妥当で、この磁場を再現するように起磁力配置(離散配置されたCBs)を決める(Step-2&Step-3)



主コイル(ソレノイド)軸長と総起磁力の関係

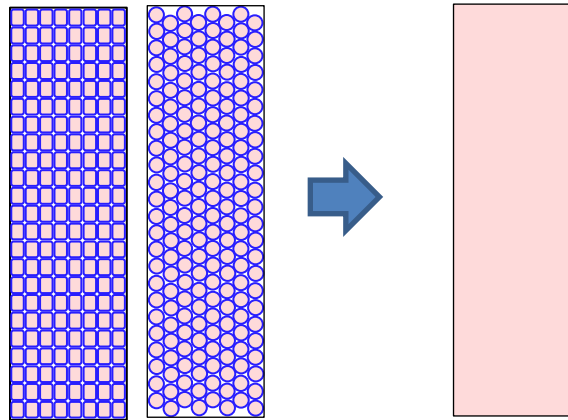


3T均一磁場の電流分布

4.2.1. CB断面の積分について

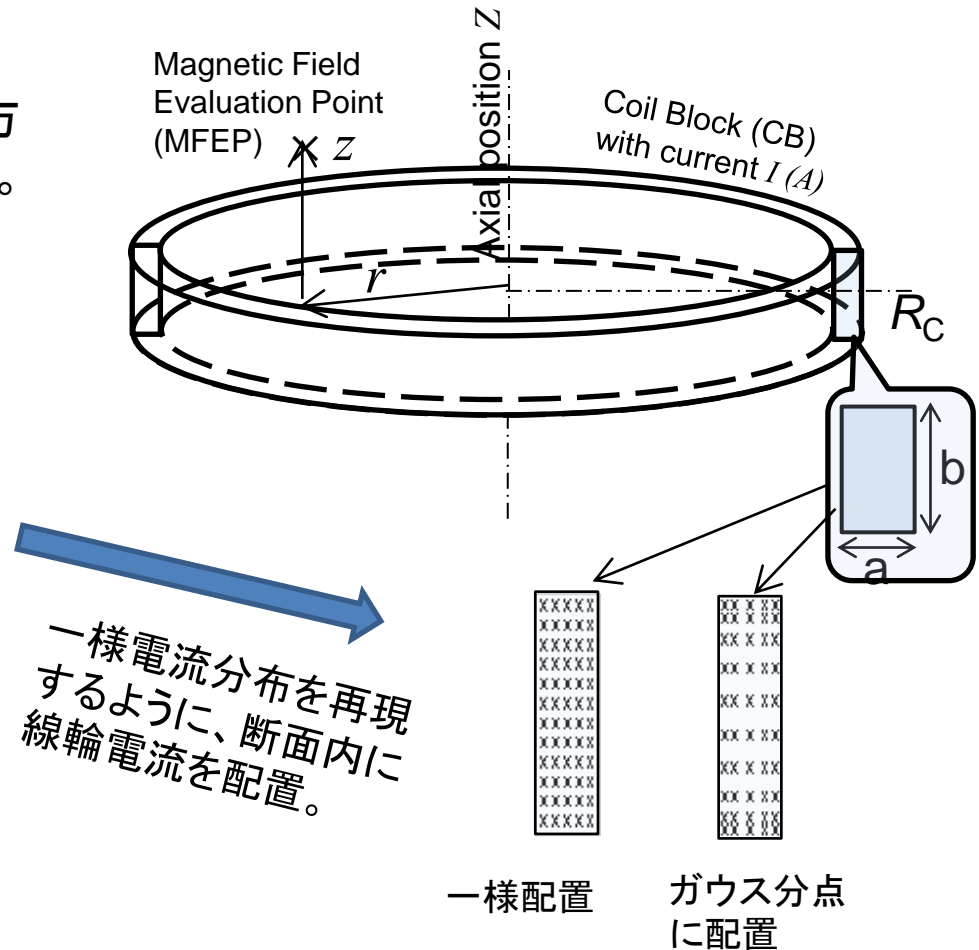
Coil Block(CB)の磁場計算で、断面の積分にはガウス求積法を利用。

Coil Block(CB)は矩形断面を持つ。この断面を一定の電流密度(A/mm^2)で周回方向電流が流れているとして磁場を求める。



$8 \times 23 = 184$ と $8 \times 24 = 192$ で作図したが、実際の3T磁石では小さいCBでは10倍以上の巻き数、

なので、CB断面内を一樣電流密度での磁場計算は妥当と考える。



一樣配置

ガウス分点配置

4.2.1. CB断面の積分について

断面内の面積積分は、

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{M_y} w_i w_j f(x_i, y_j)$$

で加算に置き換えて実行するが、 x_i, y_j を一様配置とガウス分点に配置した場合で、磁場計算精度を比較した。既出の線輪電流磁場式を使って下記で計算する。

$$b_z = b_z(I, R_c, R_m, Z_{mc})$$

ここで、 R_c, R_m, Z_{mc} はCB半径、磁場計算点の半径位置、および、CBから見た計算点の軸方向位置である。

CBが作る磁場はCB断面を積分して、下記である。

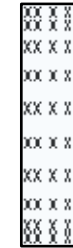
$$\int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{I}{ab} \right) b_z(1.0, R_c + x, R_m, Z_{mc} - y) dx dy$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_X} \sum_{j=1}^{M_Y} \left(\frac{I}{ab} \right) w_i w_j b_z(1.0, R_c + 2ax_i, R_m, Z_{mc} - 2by_j)$$

一様配置では均等に配置するが、ガウス求積法では、 w_i, w_j と x_i, y_j は既に計算された値がweb上に公開されているので、それを利用する。ただし、それぞれの数値の有効桁は可能な限り多くしておく(64bit数値では16桁)。



一様配置



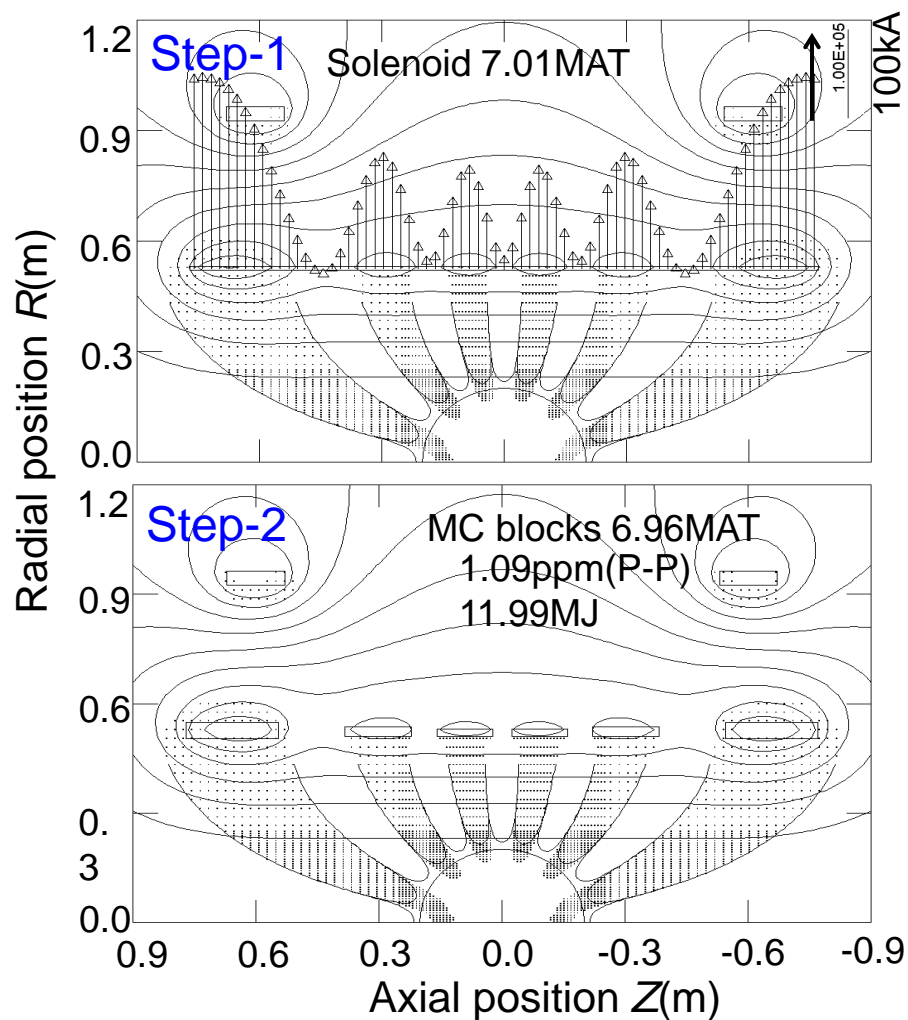
ガウス分点に配置

Table 4-3 磁場積分値の比較

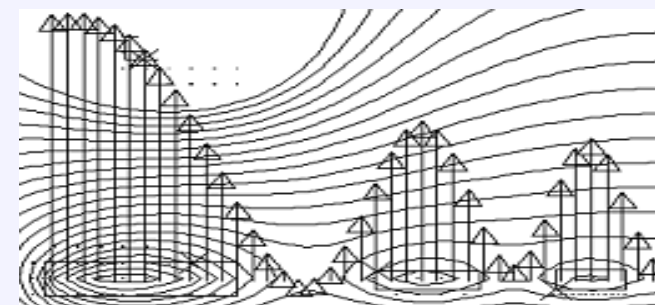
磁場計算点		ガウス求積(4x7)	等分割(1000x5000)
R_m (m)	Z_{mc} (m)	B_z (T)	B_z (T)
		B_R (T)	B_R (T)
0.333	0.0	0.694431840217	0.694431840305
		0.0	0.0
0.333	0.50	0.366090422210	0.366090422208
		0.110401434761	0.110401434778
0.333	0.10	0.670767518211	0.670767518289
		0.0574310032839	0.0574310033036
0.333	0.05	0.688363919301	0.688363919386
		0.0298539491299	0.0298539491404

CBs近傍では精度が不十分であるので、要注意。導体の経験磁場の計算には一様配置が良い。

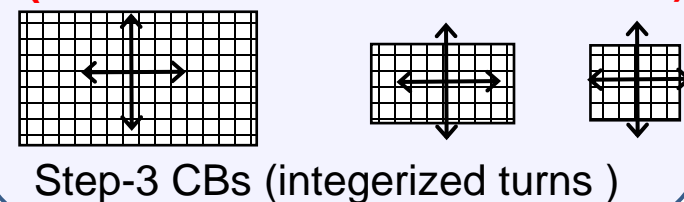
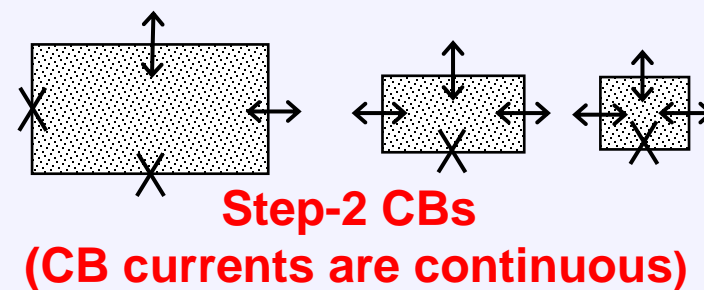
4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2)



三段階の磁石設計手法

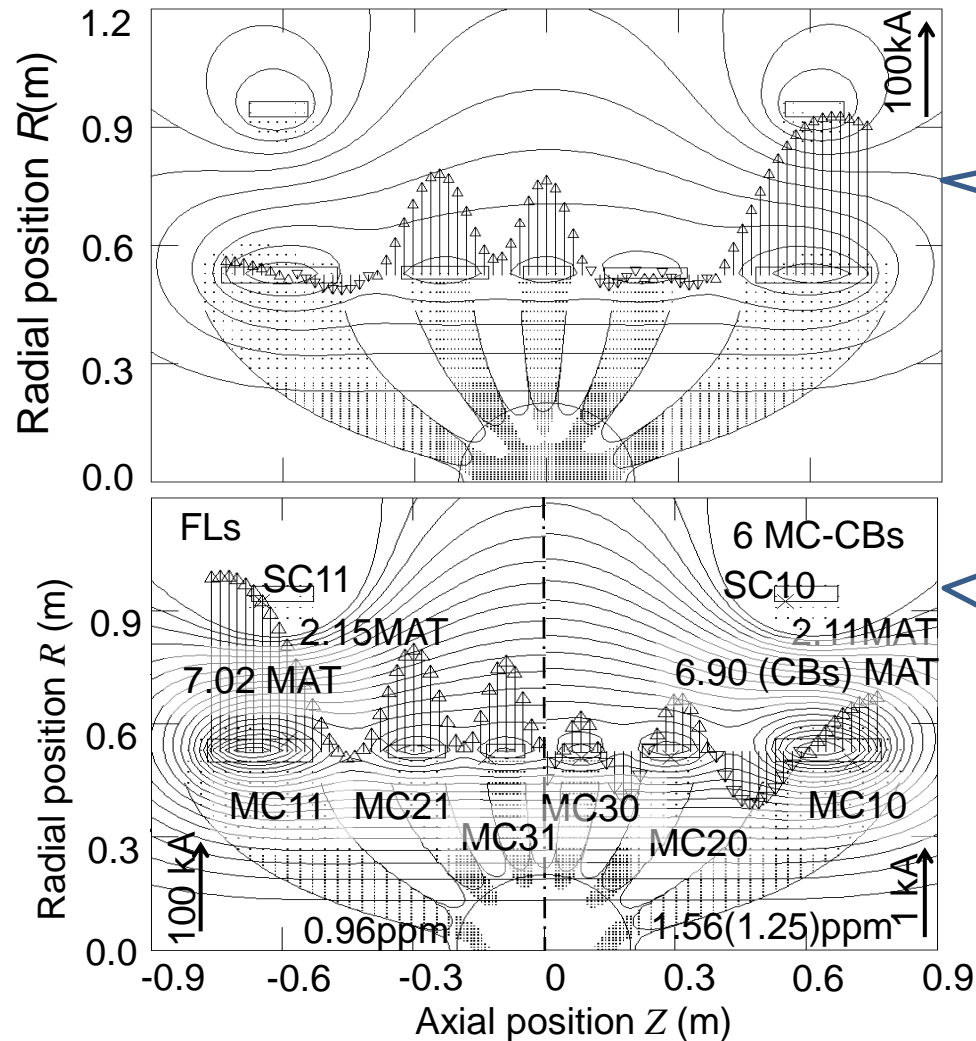


Step-1 FL current



Step-2では、Step-1で求めたFL電流配置(上)でピークとなった位置にCB(Coil Blocks)を、Step-1の磁場を再現するように配置(位置・断面形状)を調整する(下)。Step-2では、CBsの起磁力は連続値、実数値(real number)の電流値である。rCBとしてStep-3で決めるiCBと区別する。

4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2) (2)



目標磁場 B^{TG} を、
 $B^{TG} = (3.0\text{T一様}) - (\text{CB磁場})$
 として、線輪電流を求めた。

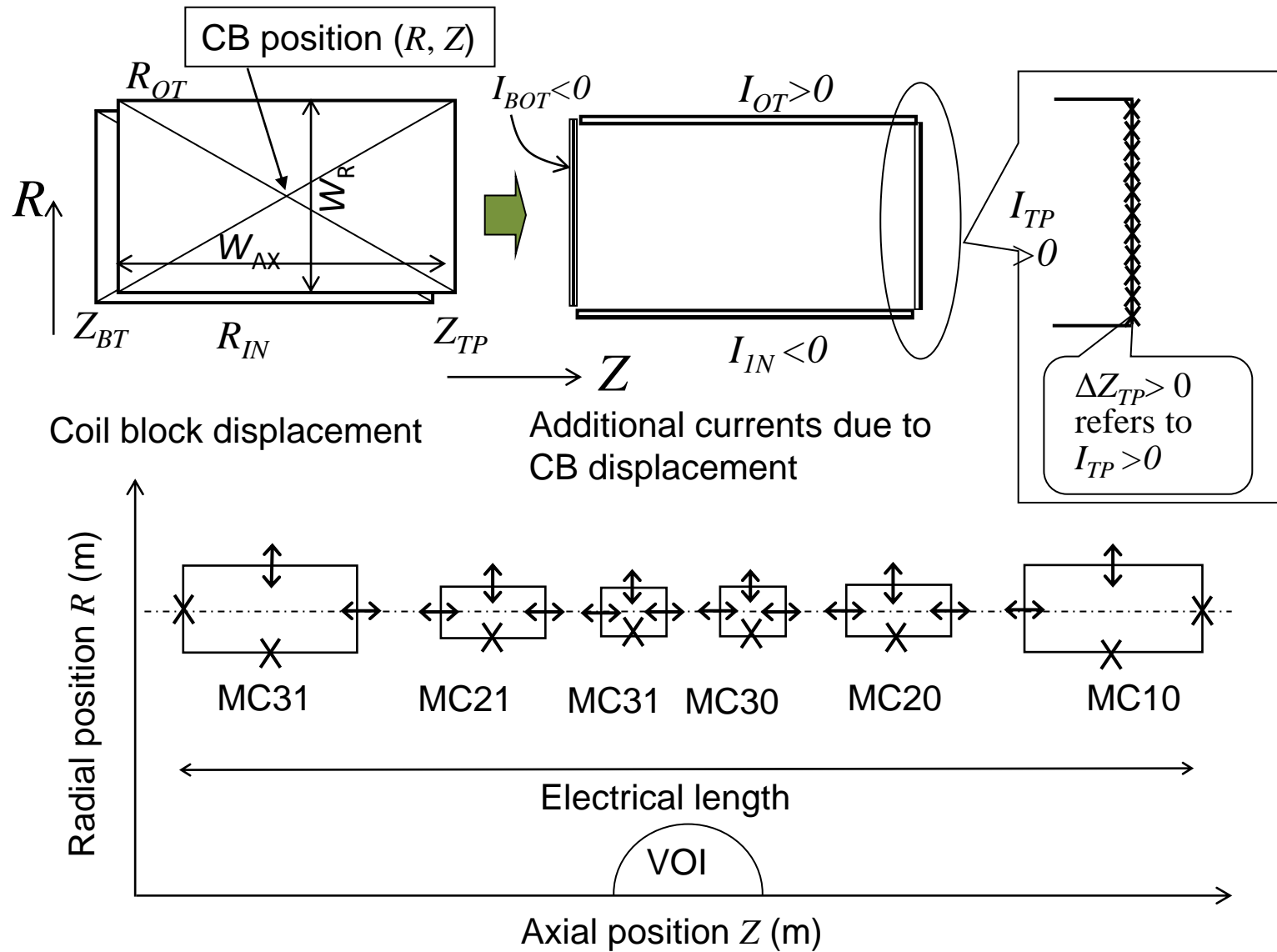
手作業で調整し、線輪電流が
 おおよそ $\pm 1\text{kA}$ 程度まで抑え
 た。手作業だとこのあたりが限
 界であるが、40cm Φ で 1.56ppm
 の均一度、Step-1(0.96ppm)よ
 り悪化している



磁場設計に使っている固有
 モードの強度を正確に調整する
 手法を考案・採用。

CBsの手作業による配置
 残差線輪電流が小さくなるように配置

4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2) (3)



4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2) (4)

Step-2のSVD固有モードはStep-1の多数線輪電流(連続電流分布を模擬)とほぼ同じ磁場分布を持つ。そのため、Step-1の磁場分布を再現できる。

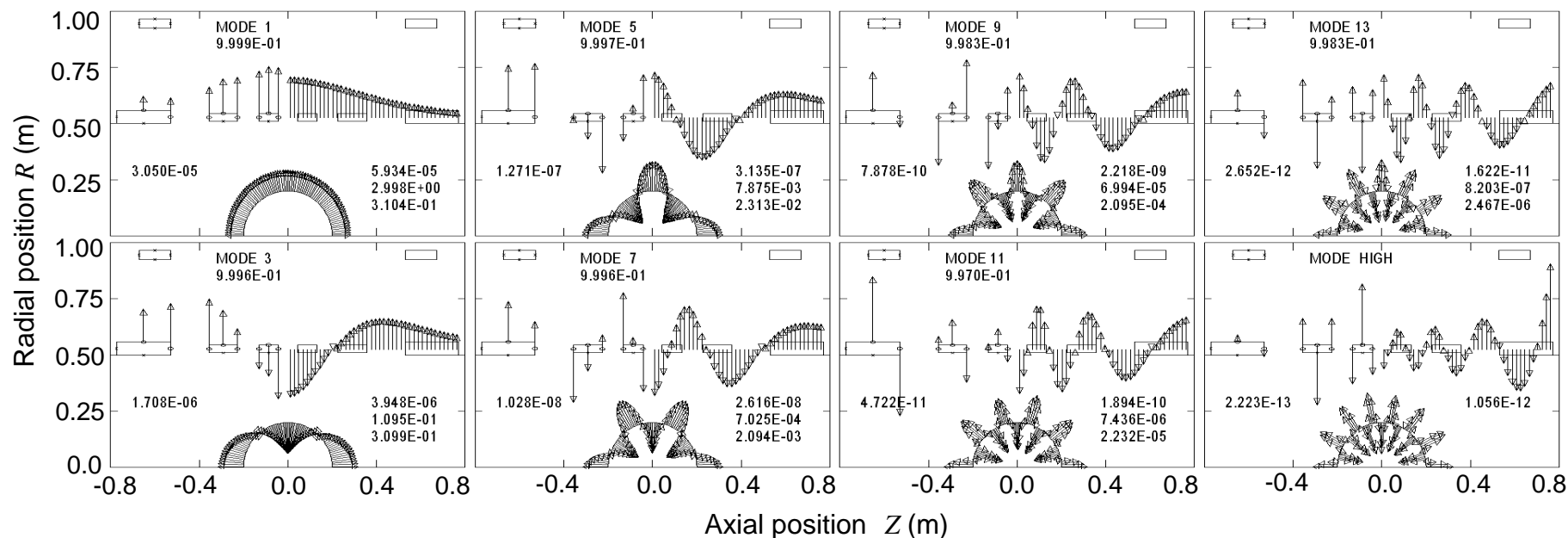
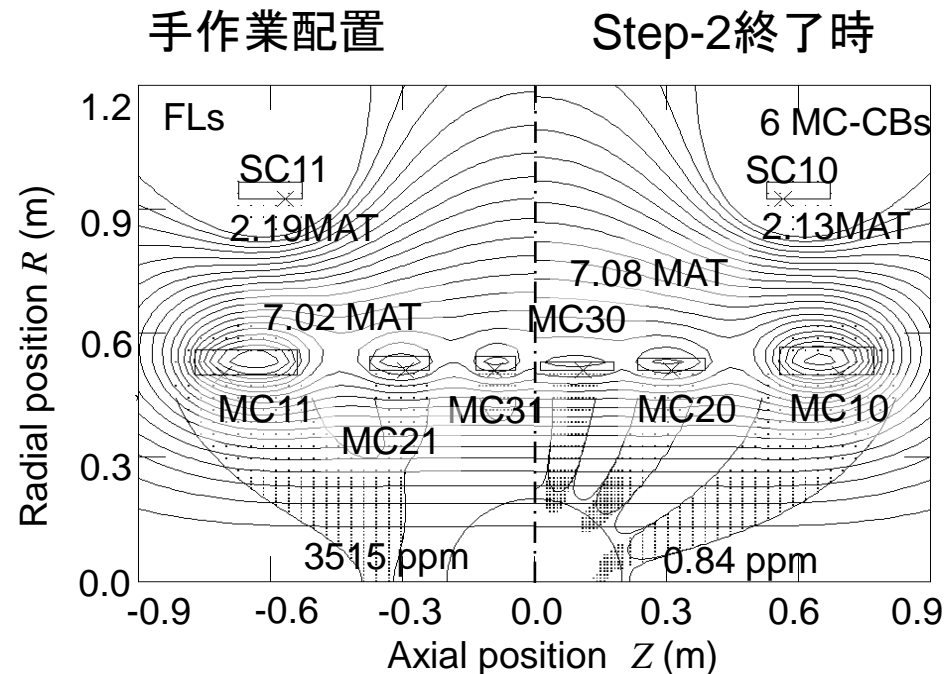
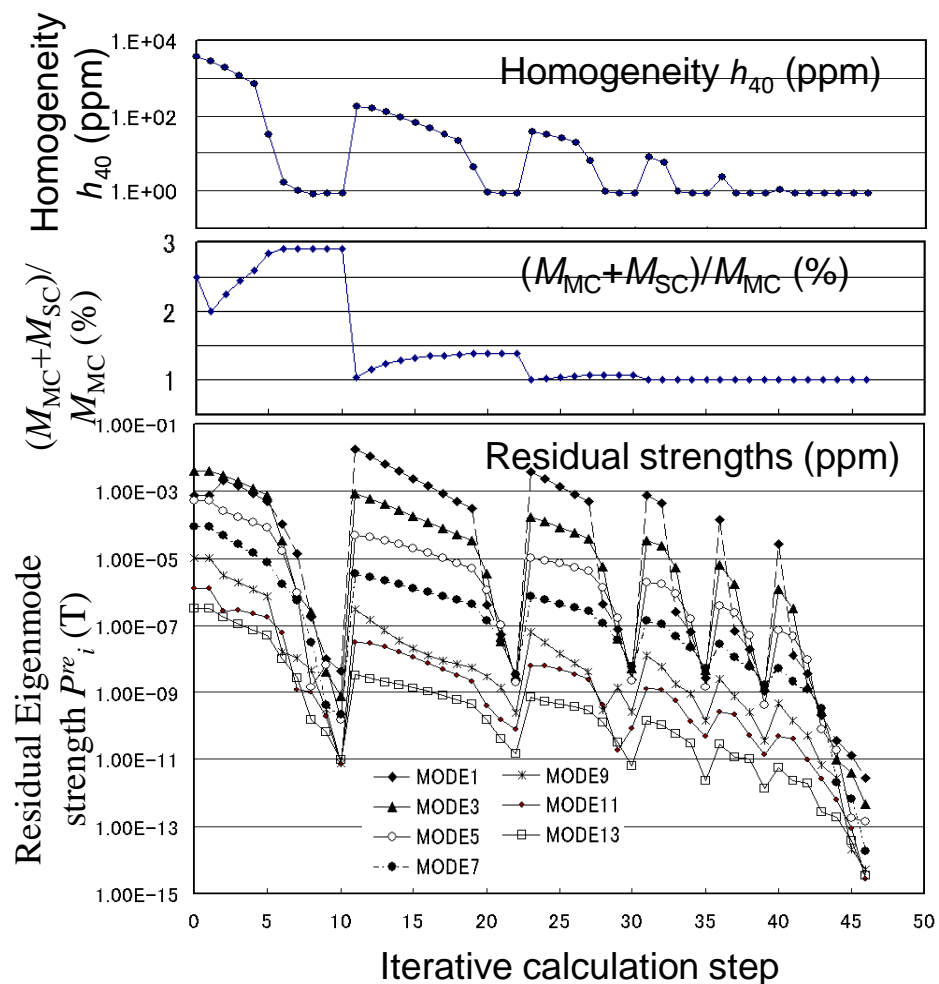


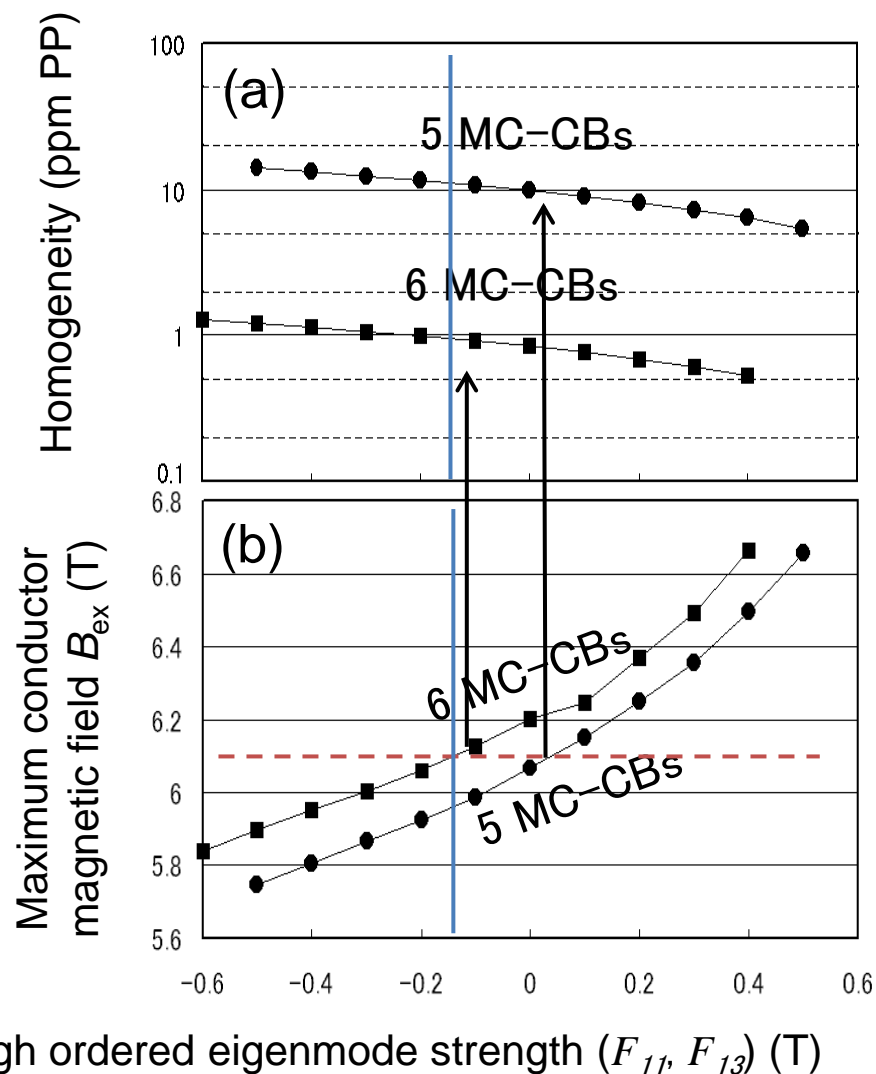
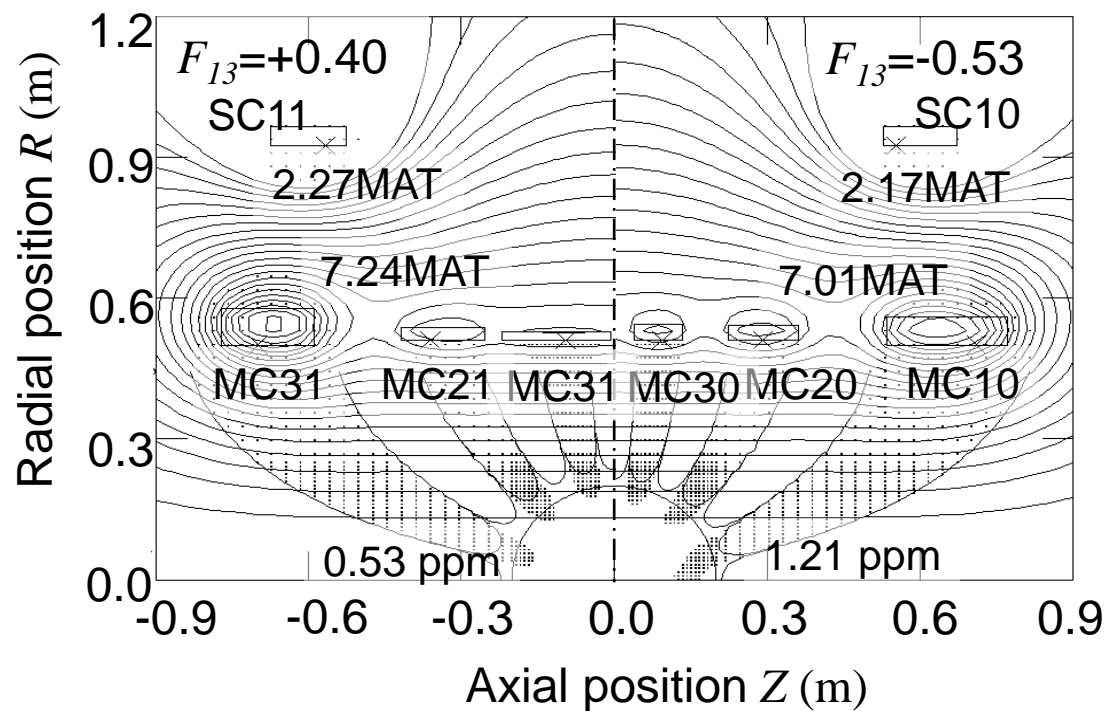
Fig. Step-2の固有モードの電流と磁場分布、左: Step-2でCB辺の移動によるSVD固有モード、右: Step-1の線輪電流(連続電流)によるSVD固有モード.

4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2) (5)



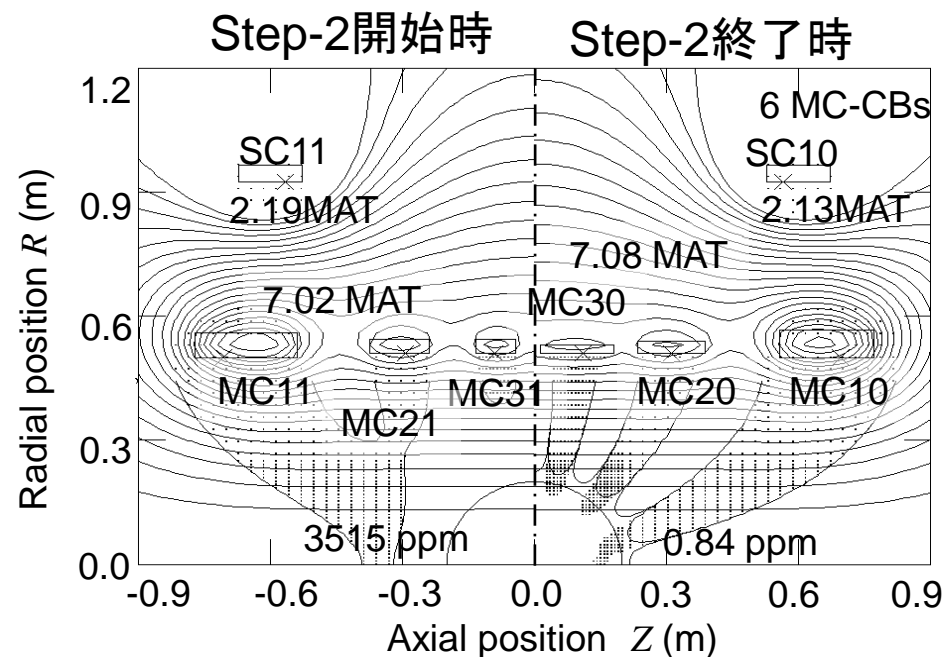
Step-2では、SVD固有モード強度をStep-1の多数線輪電流(連続電流分布を模擬)で求めた固有モード強度と同じ値となるように、CBsの位置・形状を繰り返し計算で調整する。

4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2) (6)



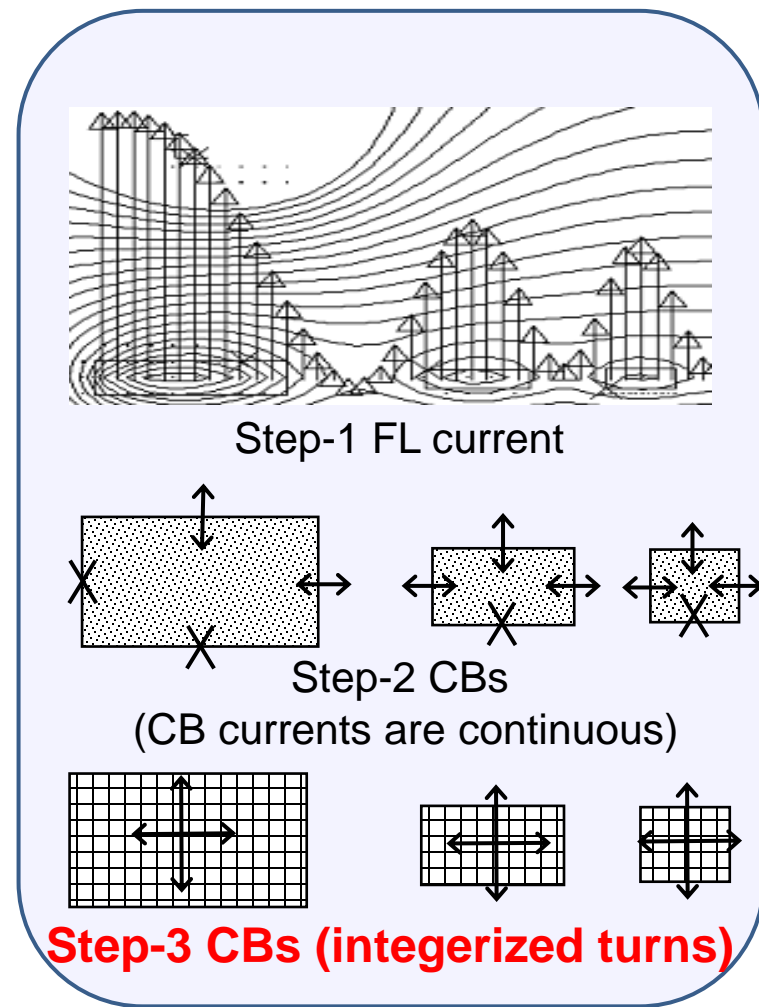
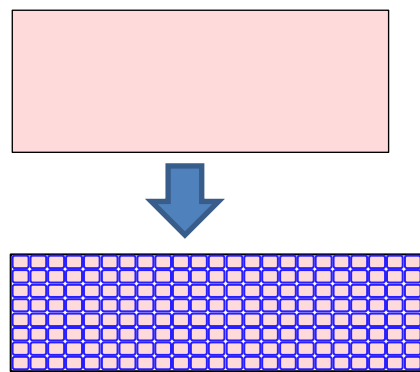
高次コイルの固有モード強度による均一度の改善と端部MC-CBの経験磁界

4.4. 巻き線数の離散化(Step-3)



上記のようにStep-2で求めた起磁力配置ではrCBs. 巻き数・起磁力は連続・実数

Step-3巻き線構造、素線電流値を決め、各iCBs位置を、一様磁場を発生するように微調整する。



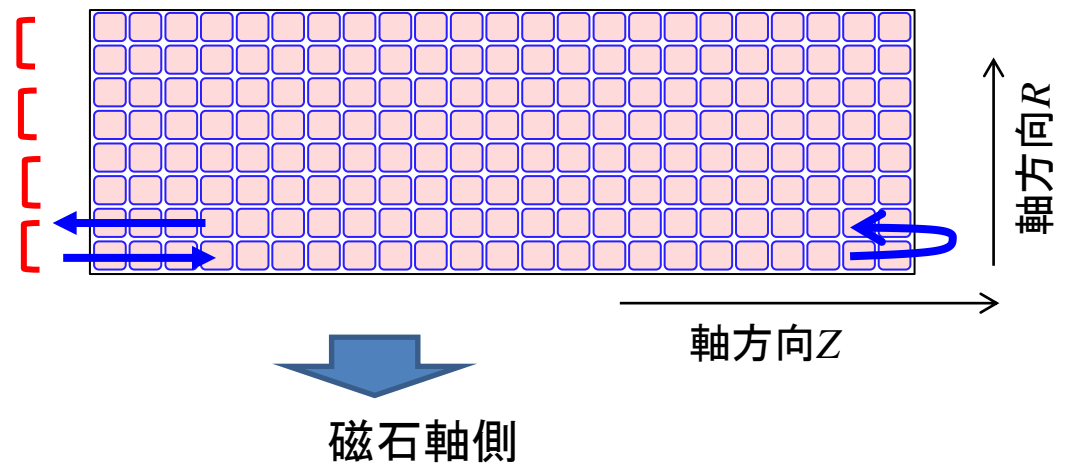
4.4. 巻き線数の離散化(Step-3) (2)

Table 下記線数の整数化検討例(rCB→iCB)

Models	rCB placements ($F_{j3}=-0.13$)			Conductor sizes		iCB ($I_{PS} = 1000.5$ A)						
	rCB Sizes (mm)		Amp-turns (kAT)	Radial (mm)	Axial (mm)	Winding turns			iCB sizes (mm)		CB-Total turns	Amp-turns (kAT)
	Radial	Axial				Radial	Axial	Lack	Radial	Axial		
MC10	64.2	220.0	2117.9	2.05	3.25	32	66	-2	65.6	214.5	2110	2111.1
MC20	29.5	154.3	820.3	1.85	3.00	16	52	-2	29.6	156	830	830.4
MC30	22.1	150.0	594.6	1.85	3.00	12	50	-2	22.2	156	598	598.3
SC10	42.0	144.8	-1094.8	1.85	3.00	22	50	-2	40.7	150	1098	-1098.6

起磁力は連続値
導体
巻き線数を整数化

半径方向の層数は、2層単位で決めるため、コイル形状・起磁力は、Step-2からは、素線の大きさや電流値より、大きく変化する。



4.4. 巻き線数の離散化(Step-3) (2)

Step-3のSVD固有モードもStep-1の多数線輪電流(連続電流分布を模擬)とほぼ同じ磁場分布を持つ。そのため、Step-1の磁場分布を再現できる。

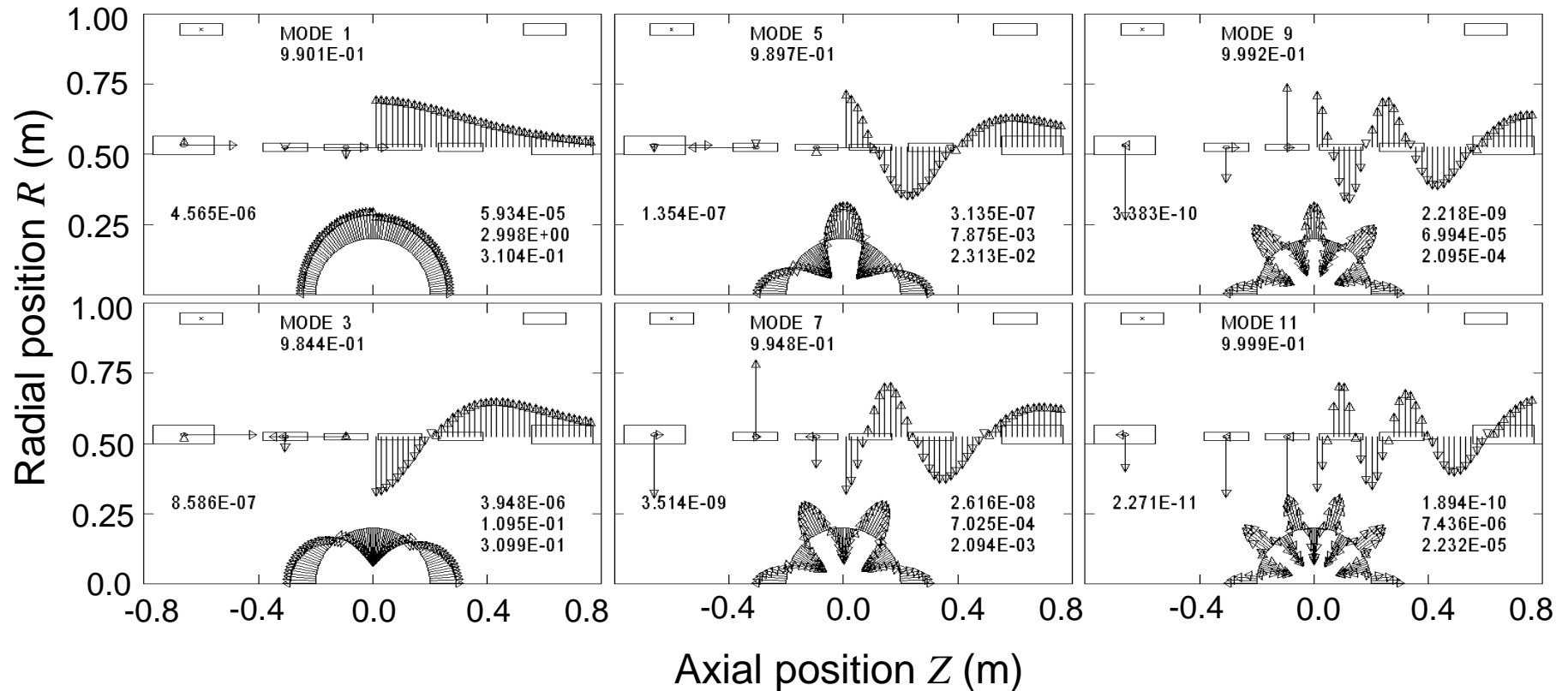


Fig. Step-3の固有モードの電流と磁場分布、左: Step-3でCB移動によるSVD固有モード、右: Step-1の線輪電流(連続電流)によるSVD固有モード。

4.4. 巻き線数の離散化(Step-3) (3)

Step-3では、Step-2の電流・CB形状に近くなるように、巻き線数を決め、後半ではStep-2の固有モード強度を再現するように、CBs位置を調整し、起磁力配置を求める。その後、実機の求める大きさ、導体、機械的強度、クエンチ時の健全性など把握する。

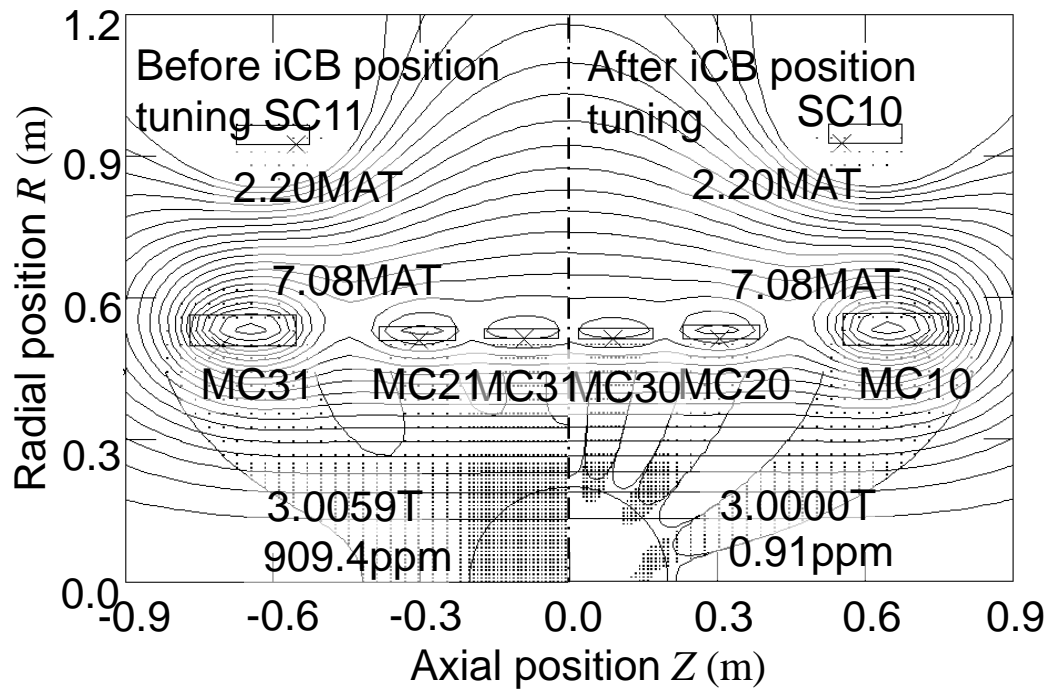
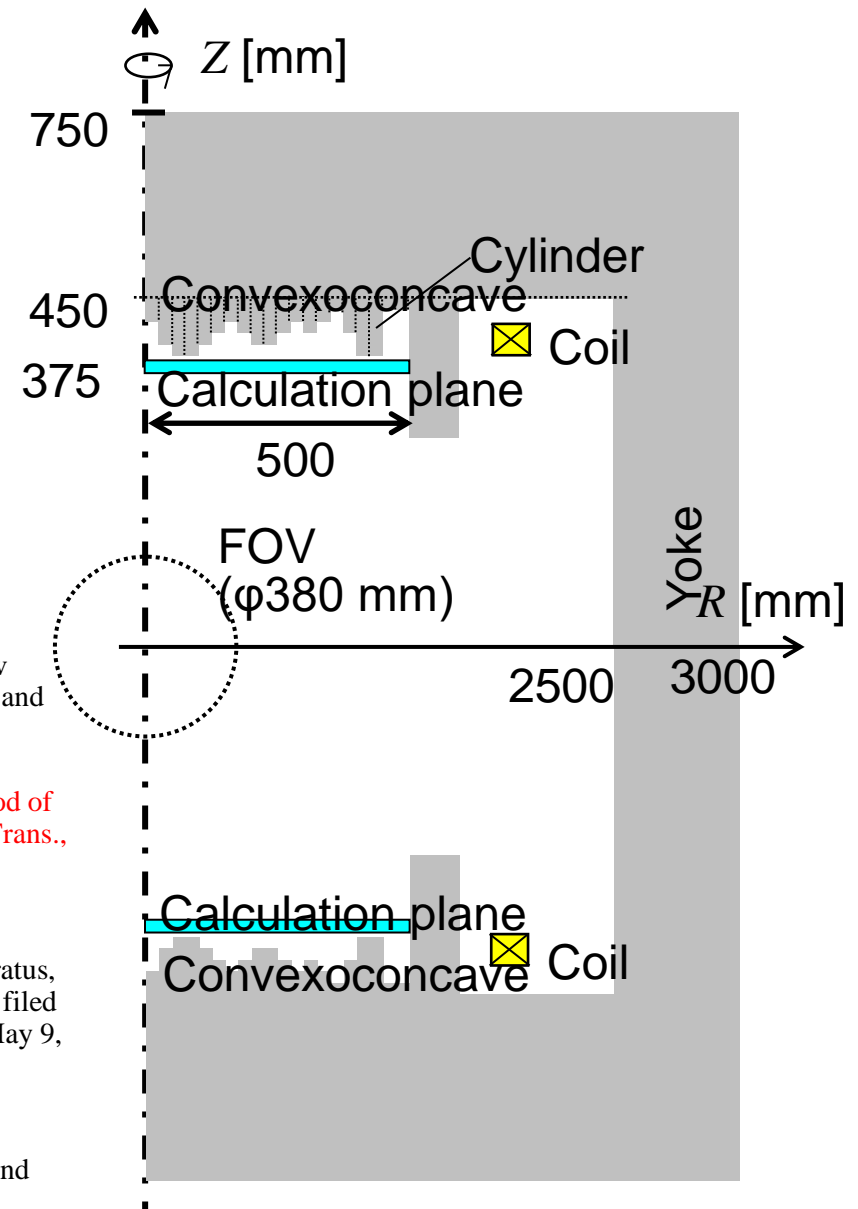
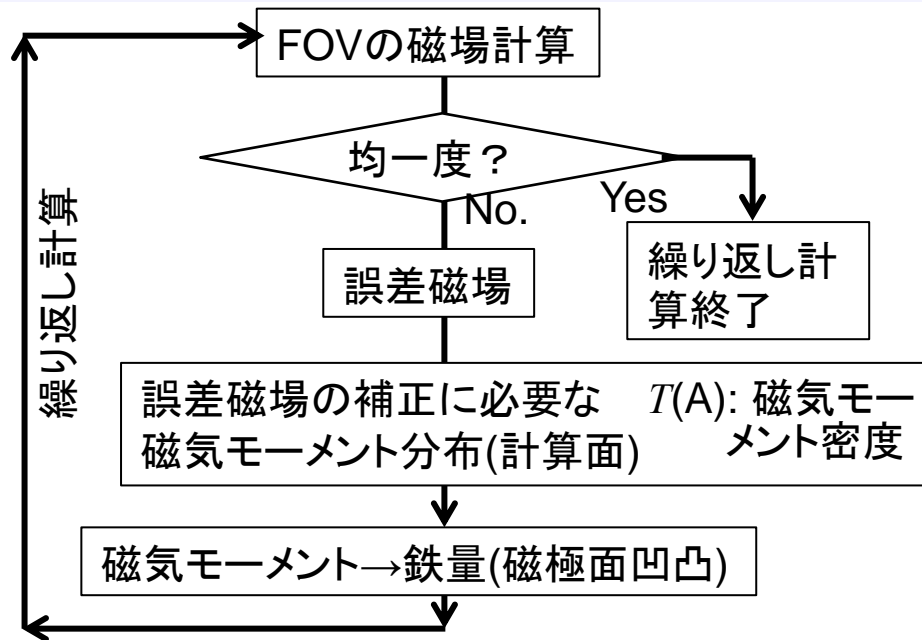


Fig. Step-3でのCBs配置の最適化。
左: Step-3開始時、離散化巻き線数でStep-2のCB位置、右: Step-3終了時でCBs位置を固有モード強度を調整後。

Table Step-3でのiCBとrCBのコイル位置調整

CB names & Parameters		rCB ($F_{13}=-0.14$)	iCB 1000.0A	iCB 1000.5A
MC10	R_C (m)	0.5321	0.5325	0.5328
MC11	Z_C (m)	0.6610	0.6623	0.6625
MC20	R_C (m)	0.5248	0.5266	0.5268
MC21	Z_C (m)	0.3062	0.3078	0.3079
MC30	R_C (m)	0.5210	0.5228	0.5231
MC31	Z_C (m)	0.0942	0.0946	0.0946
SC10	R_C (m)	0.9450	0.9460	0.9465
SC11	Z_C (m)	0.6000	0.6000	0.6000
E. Length L_e	m	1.5420	1.5390	1.5396
Homog. h_{40}	ppm	0.94	0.91	0.91
B_{ex}	T	6.10	6.17	6.17
E_M	MJ	12.21	12.27	12.29

4.5. 鉄芯型MRI磁石の場合



• DUCAS: M. ABE, T. NAKAYAMA, S. OKAMURA, K. MATSUOKA, "A new technique to optimize coil winding path for the arbitrarily distributed magnetic field and application to a helical confinement system", Phys. Plasmas. Vol.10, No.4, (2003)1022.(核融合科学研究所と共著)

• 本計算例: Y. Murata, M. Abe, R. Ando, T. Nakayama, 'A Novel Design Method of Shapes of Ferromagnetic Materials for the Superconducting MRI Magnets', IEEE, Trans., Applied Superconductivity, vol. 19, Issue 3, 2009, pp.2293-2296.

DUCAS応用シミング:

• M. Abe, R. Ando, T. Nakayama, "Magnetic field shimming adjustment: Reducing magnetic distribution errors by obtaining current potential distribution of MRI apparatus, United States Patent, US 8,947,089 B2, 3 Feb. 2015, PCT No. PCT/JP2009/058713 filed May 8, 2009, PCT Pub. No. WO2009/136643, Foreign Application Priority Data, May 9, 2008 (JP) 2008-122843.

• M. Abe, 'MRI Magnet Shimming by Calculations of Iron Piece Placements with Truncated Singular Value Decomposition Regularization', will be submitted to JSMRM(日本磁気共鳴医学会), Accepted for publication (2016/10/28), in press and Advance Publication] Released: March 02, 2017, mp.2016-0046.

Fig. 1/2 cross-sectional drawing of test model Including symmetric axis

4.5. 鉄芯型MRI磁石の場合 (2)

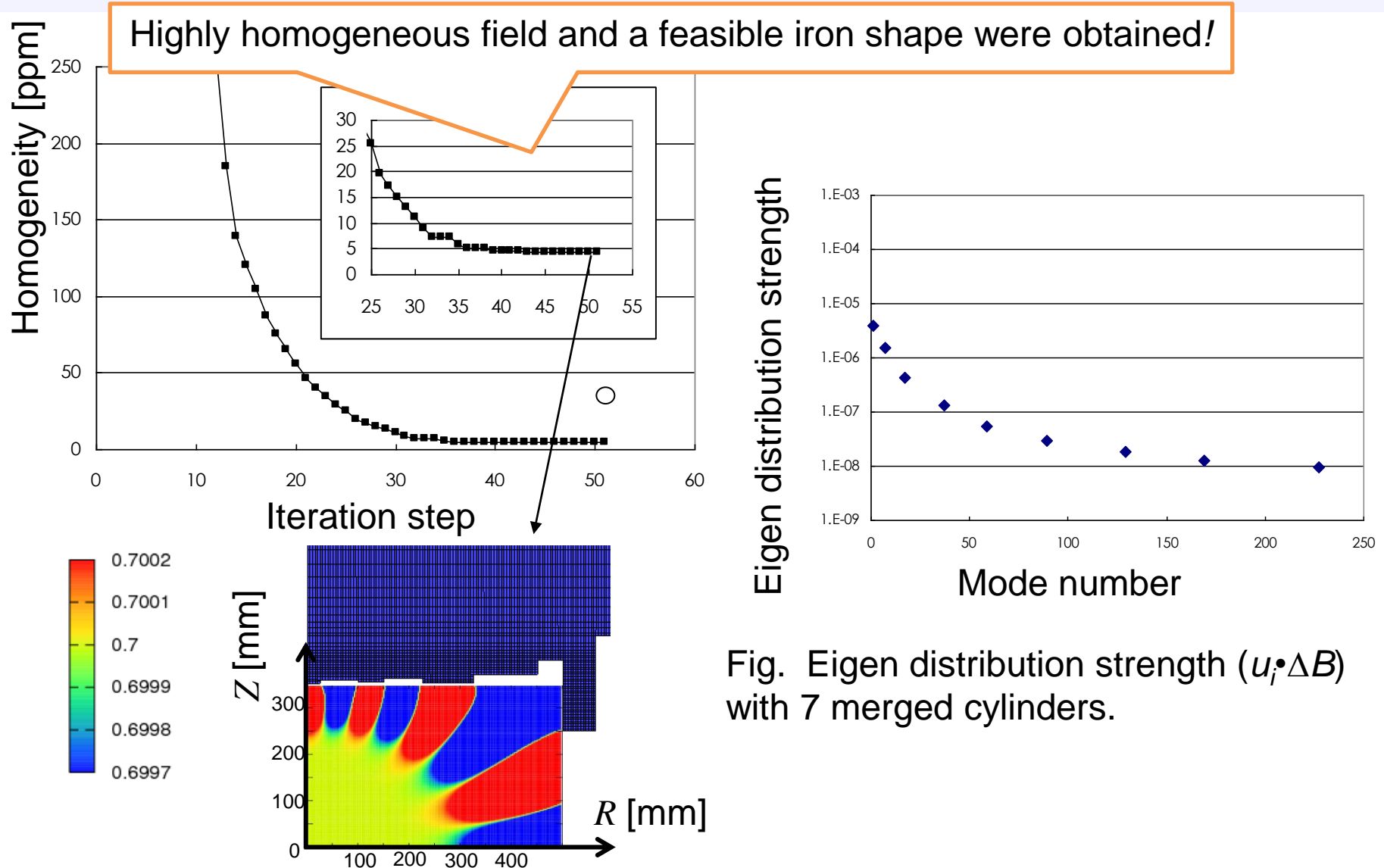


Fig. Transition of homogeneity in explicit method process, and final shapes and B_z field distribution after 50 iterations with 7 merged cylinders.

4.6. 磁場シミング

一様磁場を持つように設計しても、実機では、設計時の丸め誤差、製作・組み立て誤差がある。さらに設置されると、周囲の鉄材(建物や床の鉄筋など)の影響で誤差磁場が発生する。

例えば、右図は、J-PARCでMuSEUM実験用に用意している磁石が発生した磁場である。MuSEUM実験では、20cm-30cmの回転楕円体で0.2ppmの均一度が必要とされており、ほど遠い均一度であった。磁場を正確に調整(シミング)して初めて利用できる磁石になる。

NU1の磁石に対して、MuSEUM実験で必要な均一度が実現可能であることを示す、シミング試験を行い、成功しているので、その方法を述べる。

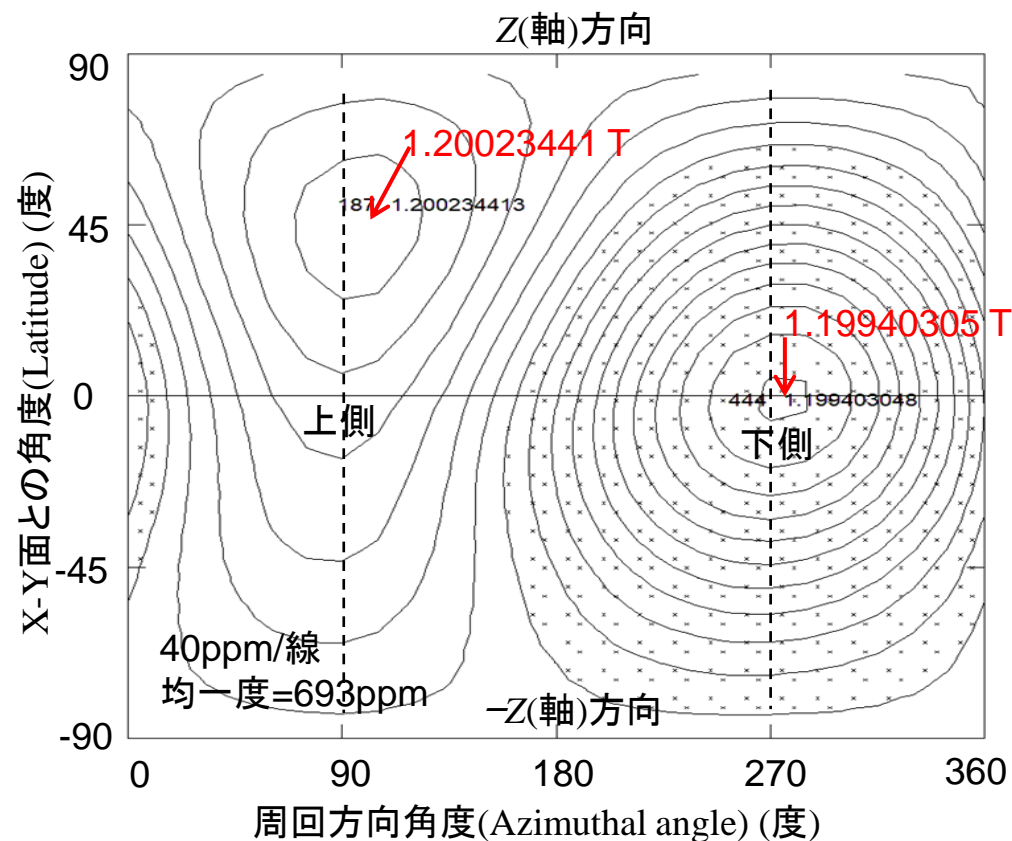
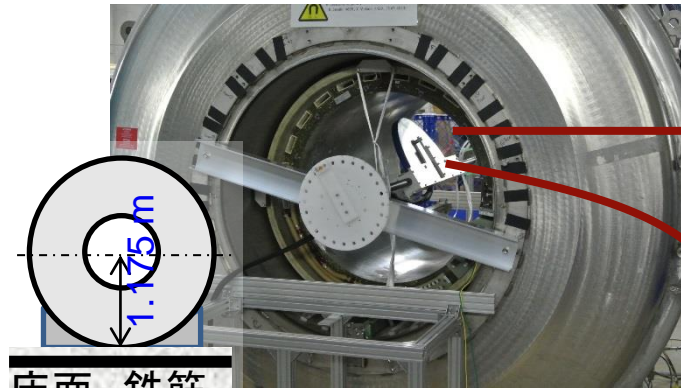


Fig. 4-19 NU1に仮置きしているreuseの全身MRI用MRI磁石で、シミング前に計測された磁場。メルカートル図法(回転軸は磁石軸位置で水平方向)で直径40cm球体表面の磁場分布(1.20T)。下側で弱い磁場は、床に入っている鉄筋の影響と考えられる。

40cm-DSS: 693ppm,

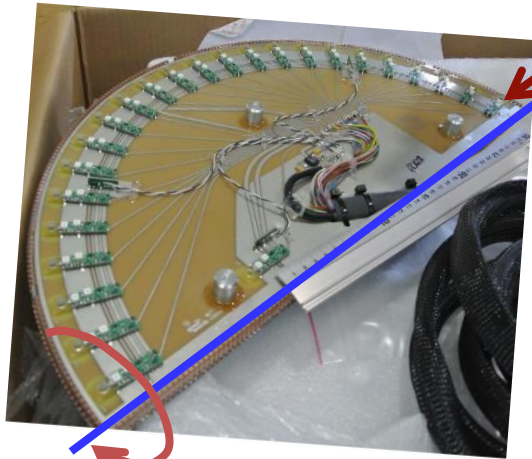
20-30cm回転楕円体表面: 341ppm

4.6.1. シミング機構

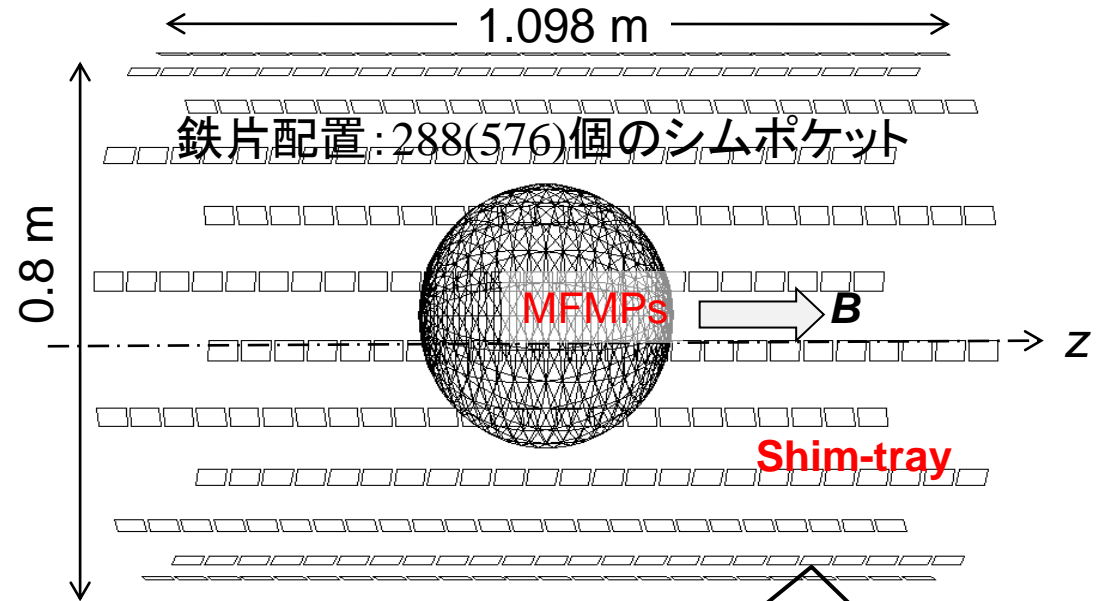


床面 鉄筋

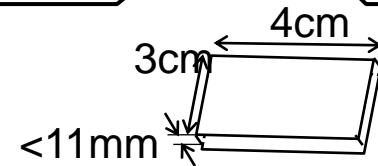
MuSEUM magnet と Field camera
Magnet. Reuse MRI magnet, $B \leq 2.9$ T.



Field camera (1.2 T用) : 分解能 $0.02 \mu\text{T}$ 程度、
24nmr センサ \times 24 角度位置 = 576 点を 40cm 球面上で計測。
(日立製作所より借用、感謝します)



シムポケットにシム片を配置



鉄片数でシム片量を調整、
最小単位は 0.06cc (0.1Am^2) \rightarrow より小さく
最大量 = 13.2cc (1ポケット当たり)

MuSEUM実験用のReuse-MRI磁石で磁場シミングを試行

4.6.2. 繰り返しのシミング作業

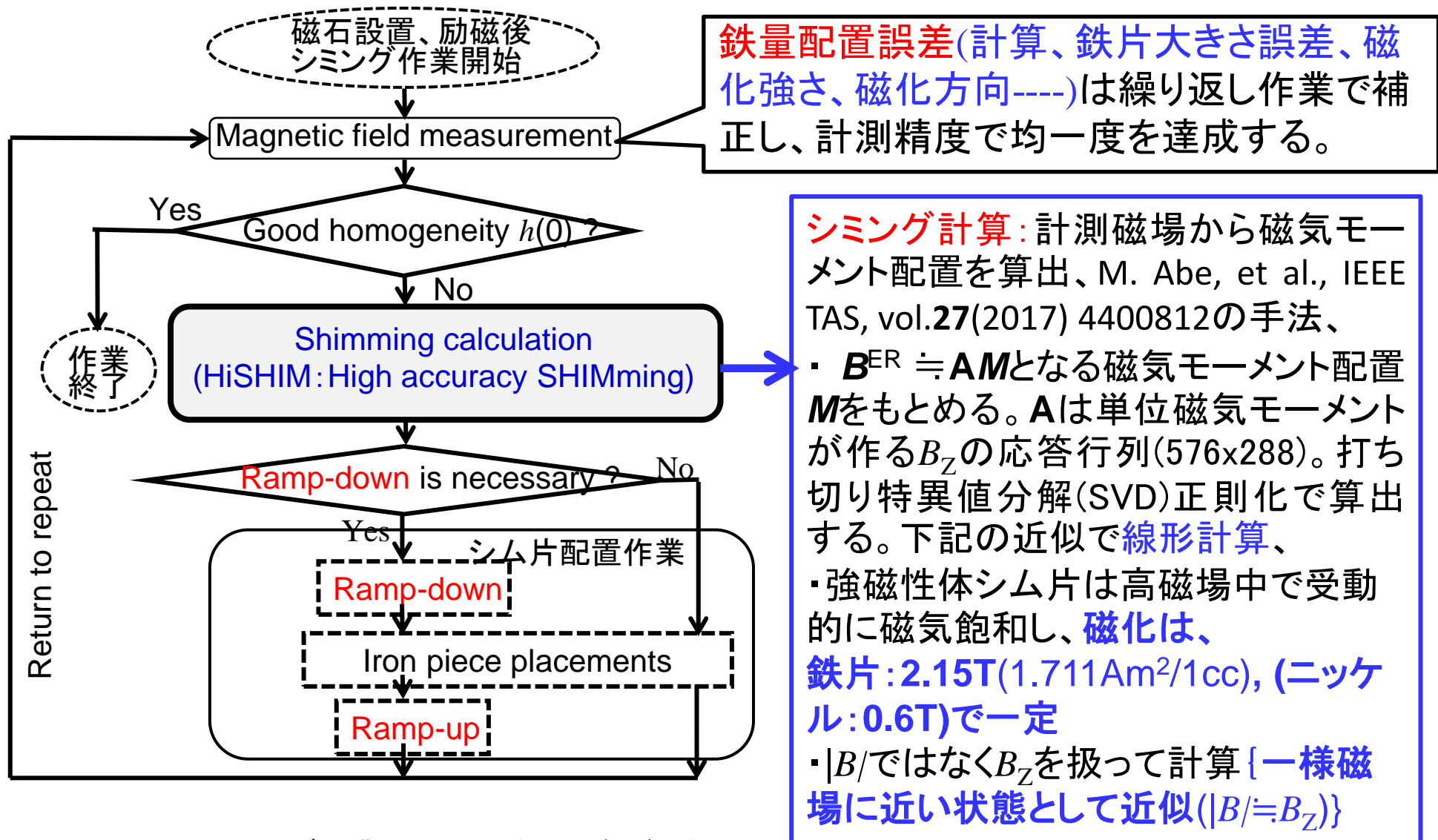


図4-17 シミング作業の手順。磁場分布が目標の均一度を得るまで、繰り返し作業を行う。

4.6.3. シミング計算

最小二乗法(LSM)で誤差磁場 $\mathbf{B}^{\text{ER}} = \mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{\text{MS}}$ を補正する磁気モーメント分布 \mathbf{M} を求める。

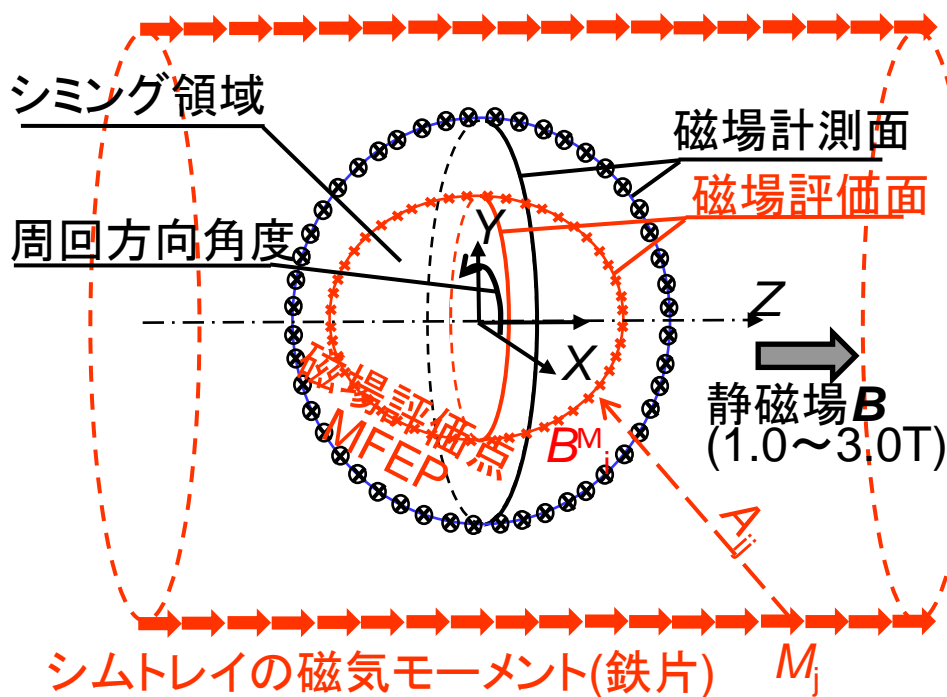
$$Er = (\mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{\text{MS}} - \mathbf{A}\mathbf{M})^2 = (\mathbf{B}^{\text{ER}} - \mathbf{A}\mathbf{M})^2 \rightarrow \text{最小}$$

\mathbf{B}^{MS} : 576点の計測磁場 ($B_1^{\text{MS}} \dots B_i^{\text{MS}} \dots B_{576}^{\text{MS}}$)

ただし、計測面から内挿した磁場である。

\mathbf{B}^0 : 目標磁場 ($B_1^0 \dots B_i^0 \dots B_{576}^0$)

\mathbf{A} : 磁気モーメントから磁場の応答行列



・純鉄飽和磁化; 鉄片1cc = 磁気モーメント 1.711 Am²

LSMの解で、誤差磁場を補正する \mathbf{M} は、

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{\text{ER}},$$

$(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t$ は一般逆行列、打ち切り特異値分解正則化法(TSVD)を利用すると下記。

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{M_T} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{ER}} / \lambda_k,$$

加算は固有モードについて特異値 λ_k [T/Am²] 降順に、打ち切り固有モード番号 $k = M_T$ まで行う。 \mathbf{v}_k と \mathbf{u}_k はそれぞれ、 \mathbf{M} と \mathbf{B} の k 番目固有分布。シミング後の予想残差磁場 \mathbf{B}^{RE} は下式となる

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\text{RE}} &= \mathbf{B}^{\text{ER}} - \sum_{k=1}^{M_T} \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{\text{ER}}) \\ &= \mathbf{B}^{\text{ER}} - \mathbf{A}\mathbf{M}(M_T) \end{aligned}$$

このシミング計算では少ないシム片量で良好な均一度となるように、

- ・打ち切り固有モード番号 M_T 、
- ・目標磁場強度 B^0 、

を決める仮想的シミング計算(シミング設計)も必要、シミング作業前に検討する。

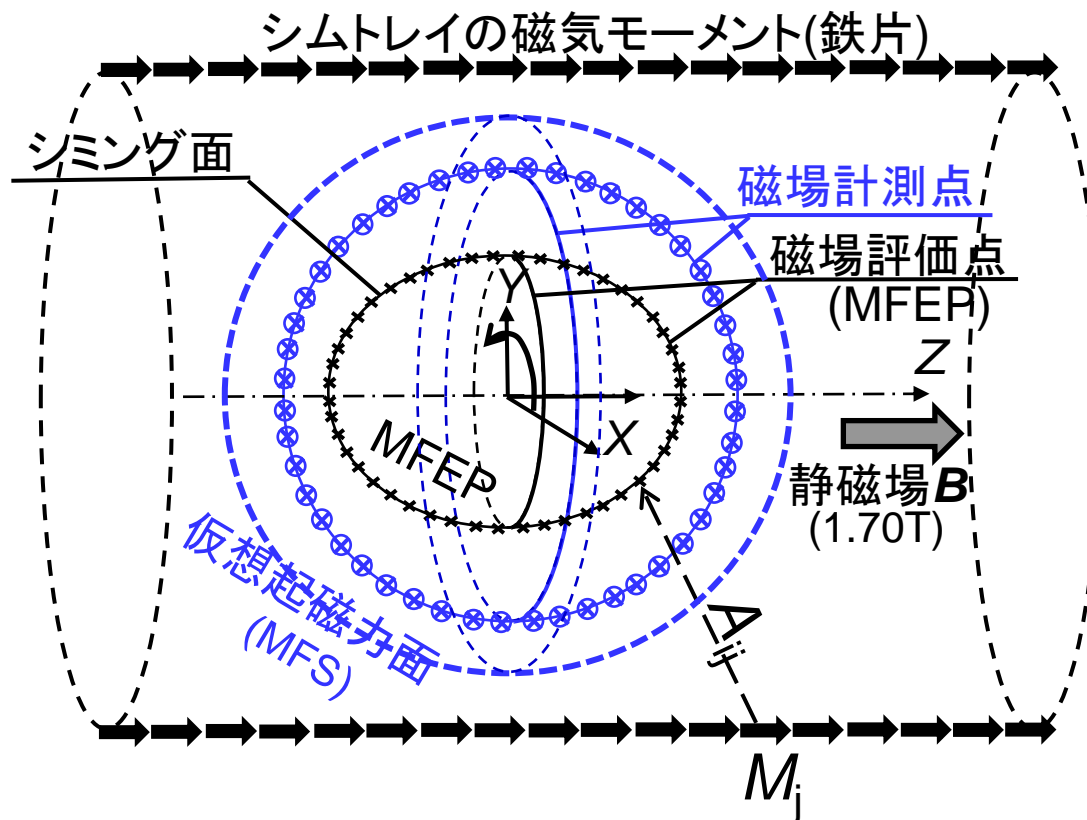
4.6.3. シミング計算 (2:磁場分布の内挿)

MUSEUM実験領域(20-30cm楕円体)の到達可能均一度

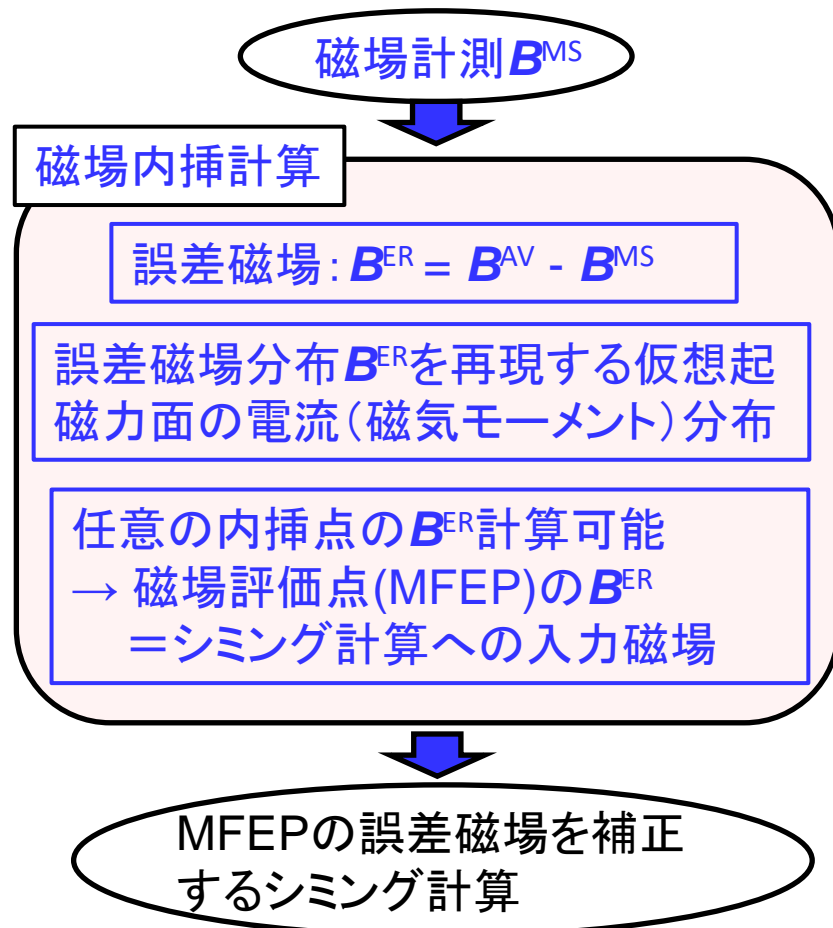
50cm球面で最少二乗法	楕円体面で最少二乗法
0.476 ppm	0.00482 ppm

$$\text{均一度(ppm)} = 10^6 \frac{\text{Max}(\mathbf{B}^{\text{RE}}) - \text{Min}(\mathbf{B}^{\text{RE}})}{B_{\text{CEN}}}$$

最少二乗法(LSM)で設計(シミング)
 $E_r = (\mathbf{B}^{\text{ER}})^2 = (\mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{\text{CB}})^2 \rightarrow \text{最小}$

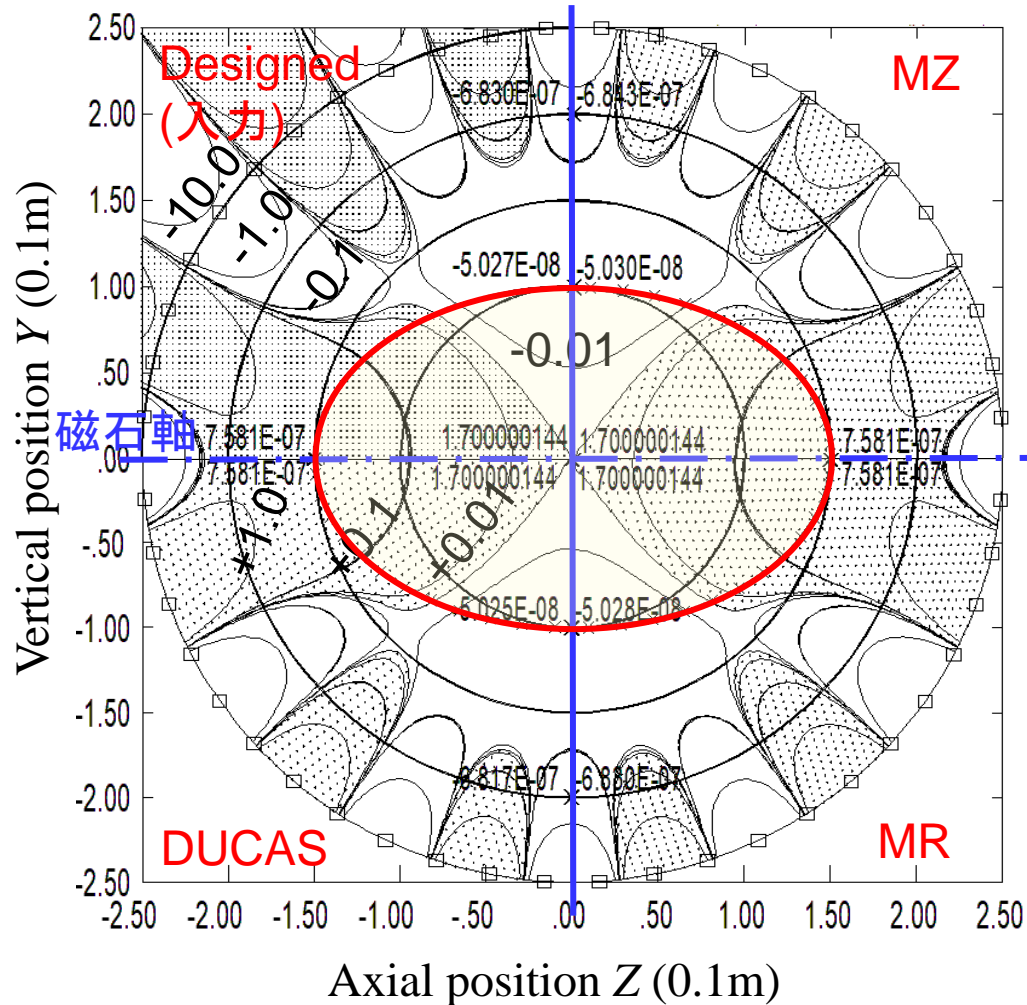


MFS: Magnetomotive Force Surface(起磁力面), MFEP: Magnetic Field Evaluation Point(磁場評価点)



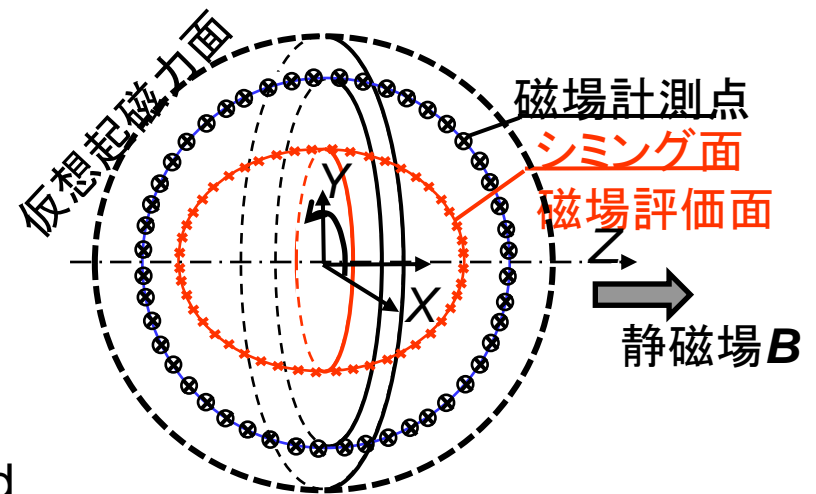
4.6.3. シミング計算 (3: 磁場分布の内挿2)

仮想磁石設計磁場で1.7T内挿磁場計算
50cm-DSS(球面) 磁場分布→内挿磁場



Magnetic field interpolation test, using a magnetic field of a virtually designed magnet (LSM on 50cm-DSS).

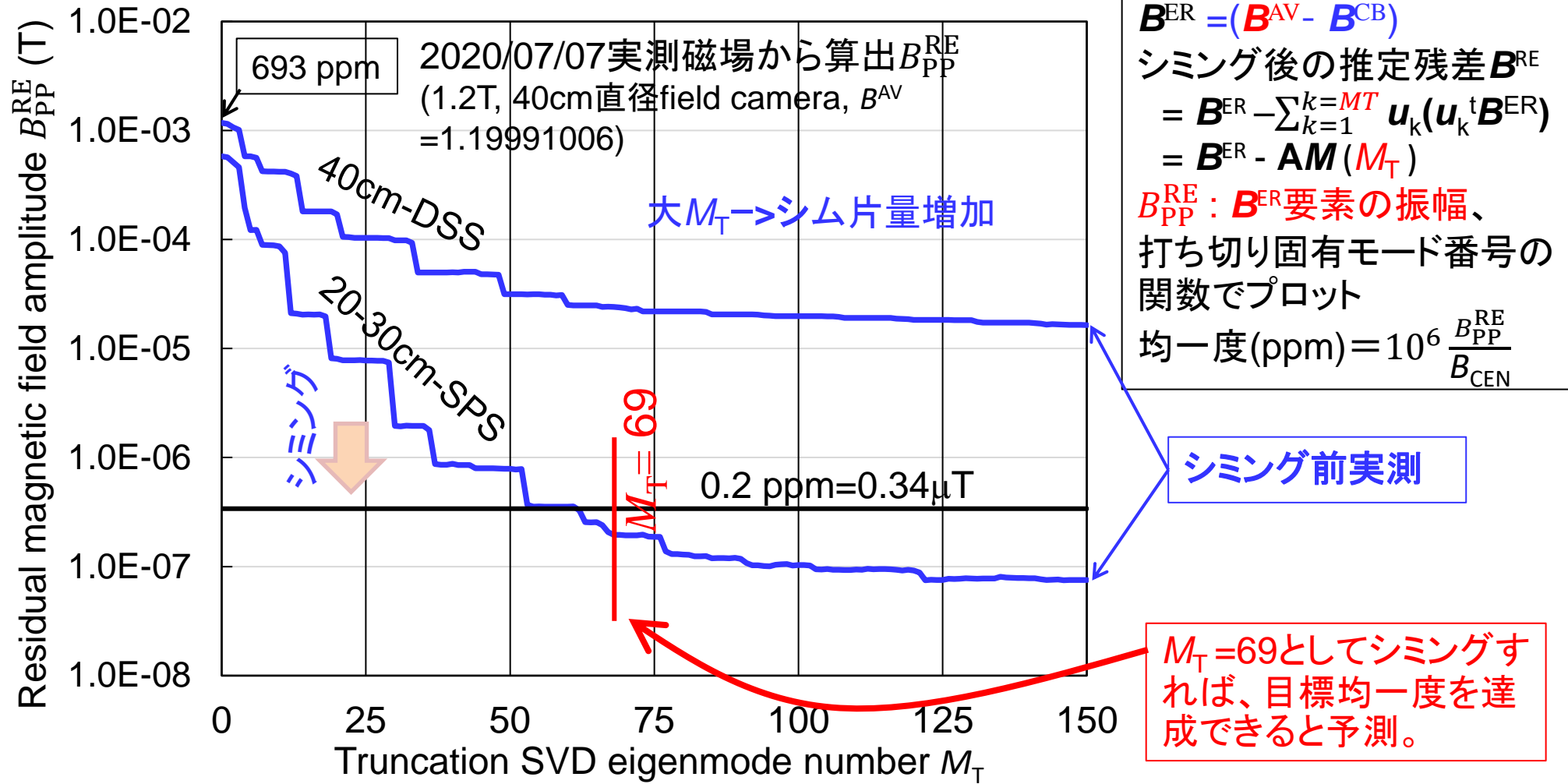
- (1) 計算磁場(50cm球面576点)を入力
- (2) 磁場分布を再現する起磁力分布をLSMで算出(MFS=70cm-DSS, 3602 nodes)
 - ・電流(DUCAS),
 - ・半径方向磁気モーメント(MR),
 - ・軸方向磁気モーメント(MZ),
- (3) 起磁力分布から計測面内の磁場分布を算出
確認結果: 全モデル、実験領域では**1.0E-9T (0.001ppm)**以下の誤差で磁場を内挿できる。
- ・ 今後は、アルゴリズムの最も単純な**MZモデル**を内挿計算に利用する。



DSS: Diameter Spherical Surface

4.6.3. シミング計算 (4:シミング設計)

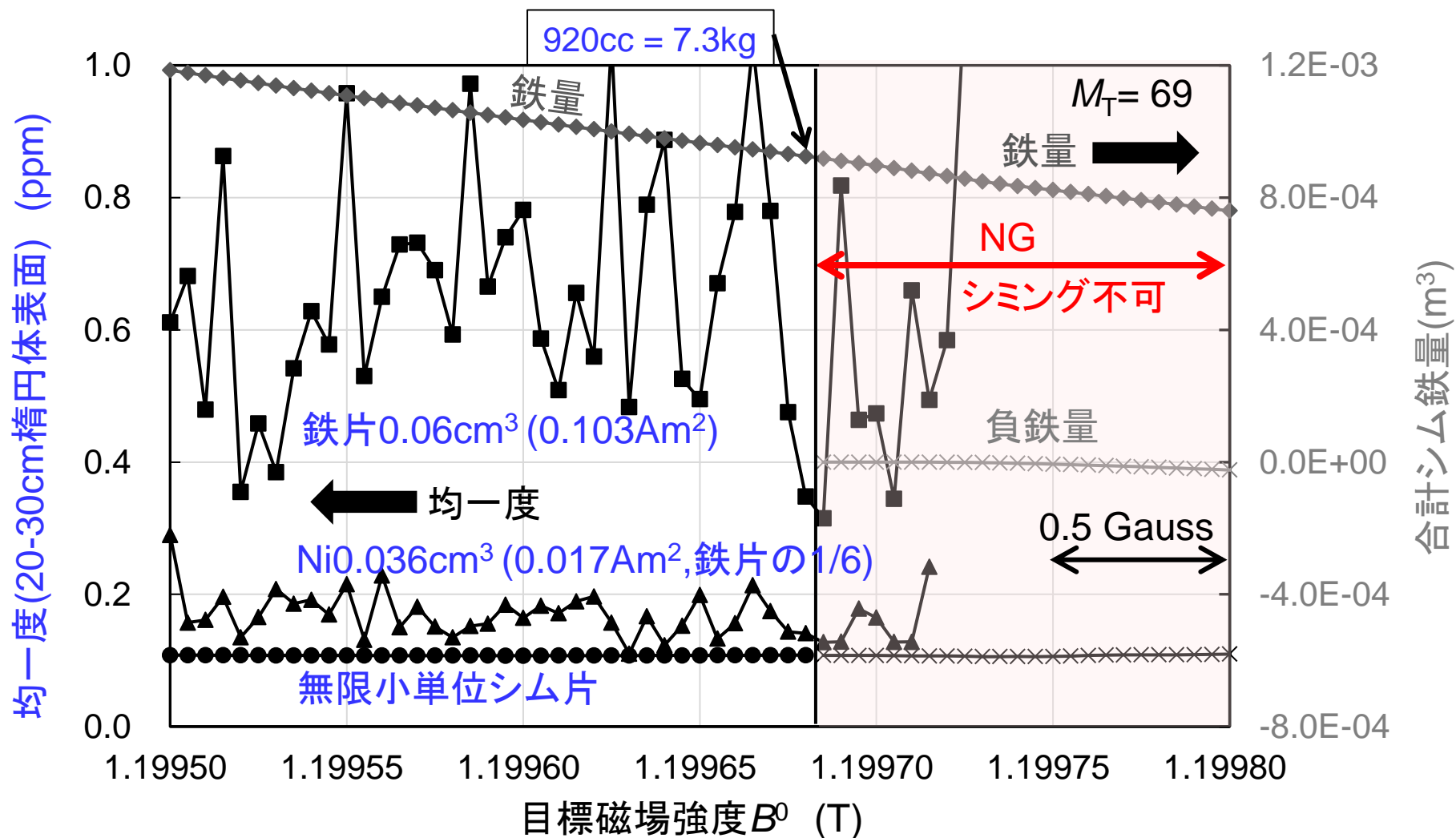
目標均一度を少ない鉄量(小 M_T)で実現できる打ち切り固有モード番号 M_T を選択



シミング計算($B^0 = B^{AV}$)で求めた残差磁場と打ち切り固有モード番号 M_T の関係
計測: 40cm-DSS (DSS: Diameter Spherical Surface)、磁場評価: 20-30-SPS (SPS: SPheroid Surface)

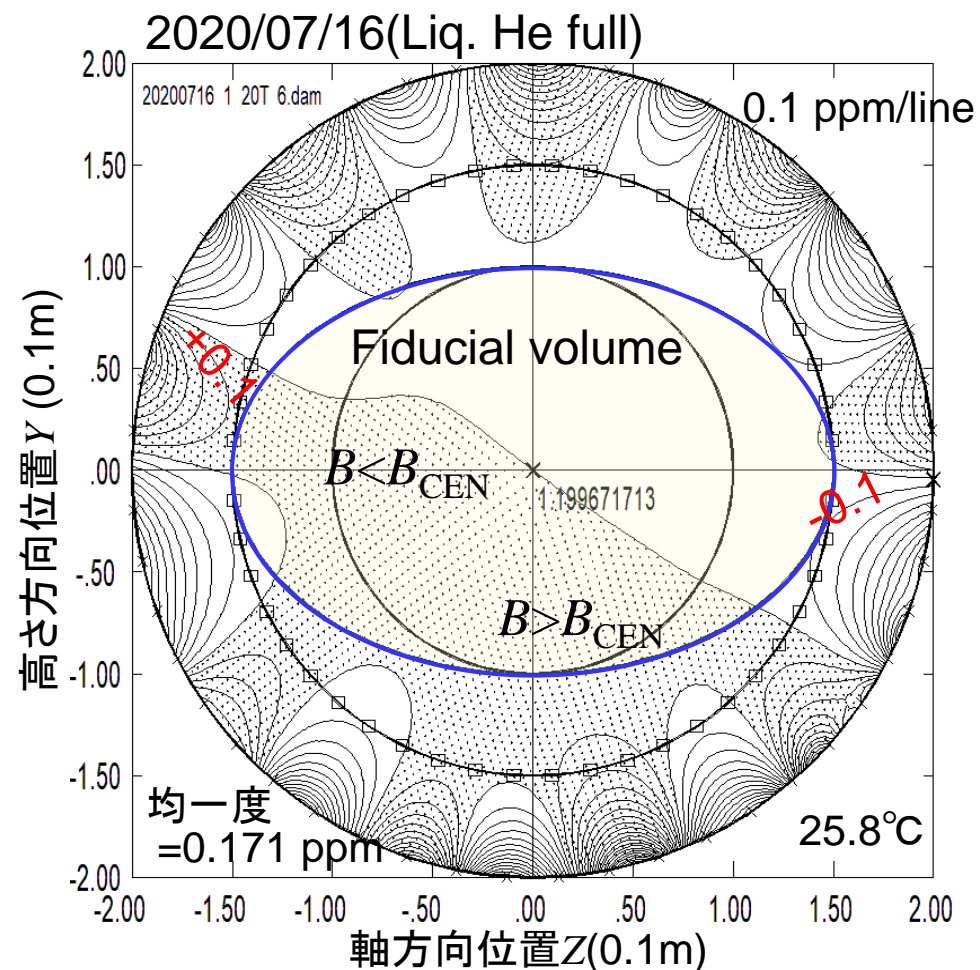
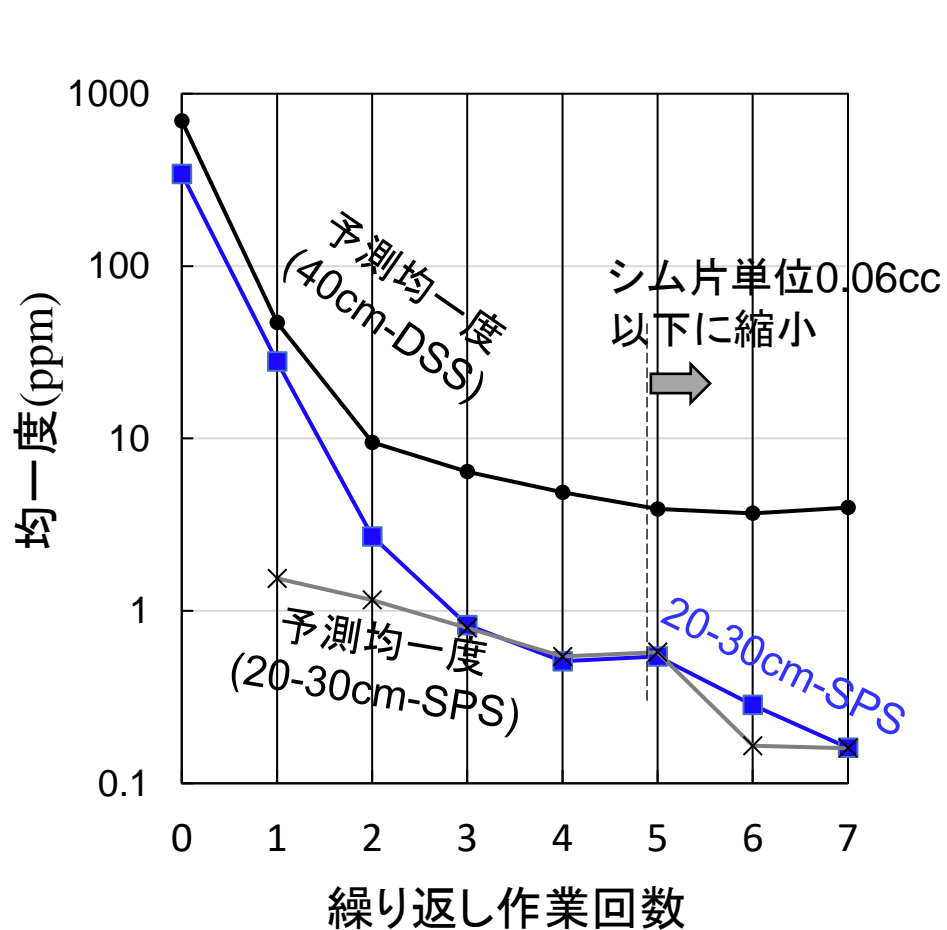
4.6.3. シミング計算 (4:シミング設計2.目標磁場とシム片最小単位)

MRI磁石シミングで使った最小単位の0.06cc鉄片(0.103Am²)では、均一度0.02ppmは不可、最小単位0.017Am²程度以下が必要。Ni (弱飽和磁化)や磁性パテ材(連続量)のシム材を用意。



$$B^{AV} = 1.19991006$$

4.6.4. シミング作業の実行



繰返しシミング作業(左)により得られたシミング後の内挿磁場分布(右)(磁場計測面: 40cm-DSS、磁場評価面: 20-30-SPS1.2T) 均一度 (MuSEUM実験領域表面=20-30cm-SPS、peak-to-peak):

4.6.5. 受動シミングの難しい磁場

計測磁場 $|\mathbf{B}|$ とシミング計算 B_Z の関係は

$$|\mathbf{B}| = B^{\text{MS}}$$

$$= \sqrt{B_{\perp}^2 + B_Z^2} \approx B_Z \left\{ 1 + 0.5 \left(\frac{B_{\perp}^2}{B_Z^2} \right) \right\},$$

$|\mathbf{B}|$, B_Z と B_{\perp} を区別した計測は困難。 B_{\perp} が5 Gaussでも、 $B_Z = 1.70\text{T}$ では $B^{\text{MS}} = 1.70 + 7.4\text{E-}8\text{T}$ で、影響は小さい($<0.1\text{ppm}$)。

シミング後でも、 Z に依存せず、 $\frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} = 0$,

$\frac{\partial B_Y}{\partial X} = \frac{\partial B_X}{\partial Y}$ を満たす磁場は残る。ベクトルポ

テンシャル A_{ϕ} で表すと、

$$A_{\phi} = \sum_n R^n (C_C \cos n\theta + C_S \sin n\theta),$$

のような磁場(下記)は残る。

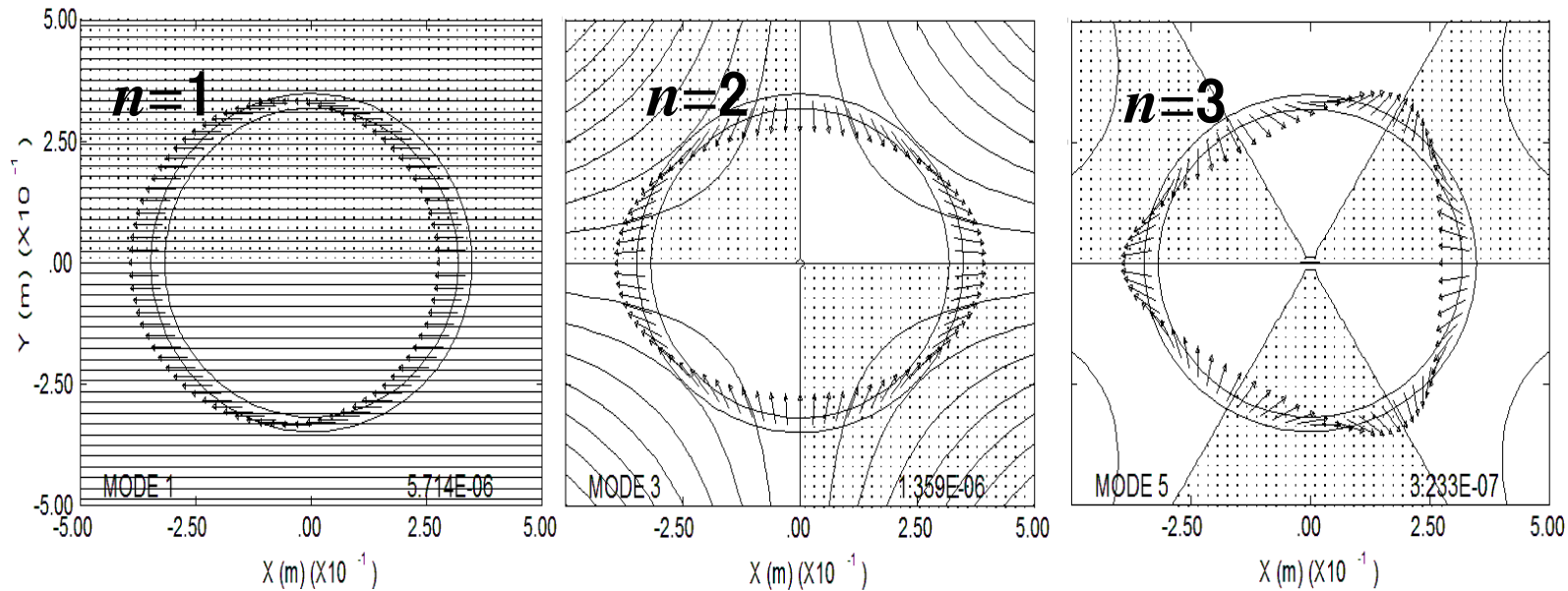


Fig. 4-24 B_X , B_Y 成分[式(4-21)]磁場の磁力線を左から $n=1, 2, 3$ で示す。矢印は磁場方向。

4.7. MRI磁石静磁場設計のまとめ

MRIの精密磁場設計について下記の項目に沿って説明しました。

4.1. MRI磁石磁場設計の磁場成分

4.2. 概念検討(Step-1)

(CB断面の積分について)

4.3. 起磁力配置の離散化(Step-2)

4.4. 巻き線数の離散化(Step-3)

4.5. 鉄芯型MRI磁石の場合

4.6. 磁場シミング

(シミング機構、繰り返しシミング作業、シミング計算、シミング計算の実行、受動シミングの難しい磁場)

Table 4-1 MRI磁石の試設計仕様
文献[10], Table 1より引用)

Parameter	Value
Number of MC-CBs (N_{MC})	6 (5 to 7)
Magnetic field at center (B^0)	3.00 T
Inner radius of coil blocks	0.500 m
Electrical length of MC (L_e)	1.520 m
Homogeneity in 40 cm DSV	< 1.00 ppm
Volume of interest (VOI)	0.40 m DSV
Radius of shield coil (R_{SC})	0.945 m
Current density, end-MC-CBs	150 A/mm ²
other CBs	180 A/mm ²
Max. magnetic field conductor	<6.20 T
Current drive mode	Persistent

40cm DSV: 40cm Diameter Spherical Volume
(40cm直径球体)

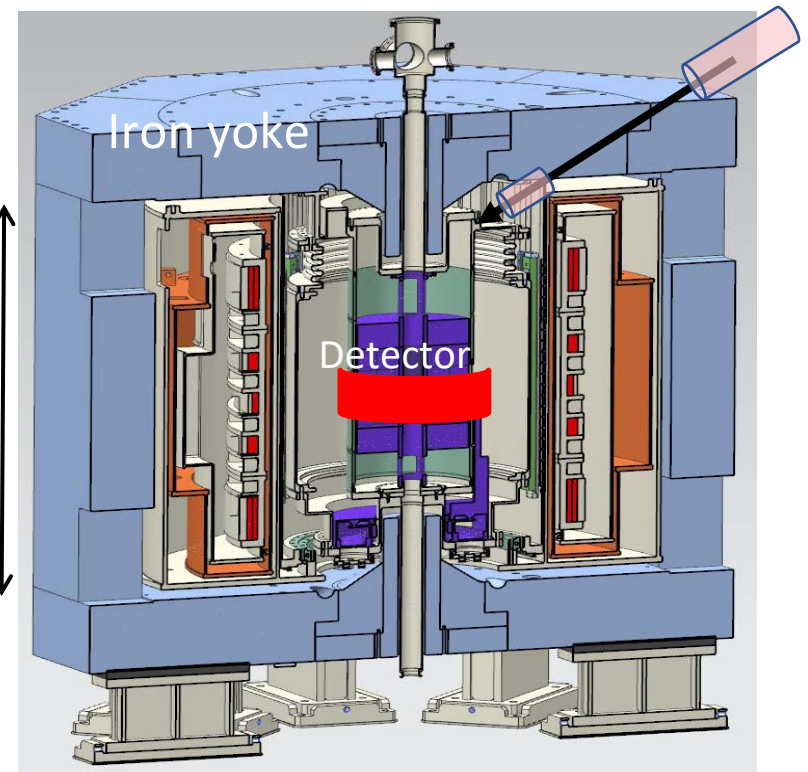
5. $g-2/EDM$ 磁石の磁場設計

Muonビームは

Linac→Transport line→Injection tunnel
を經由して、らせん入射軌道に入ってくる。

螺旋軌道は、基本的には主磁場により決まるが、下記の磁場も重要である。

- ・螺旋入射軌道微調整に2つの
ASSMs (inner-ASSM, outer-ASSM)
- ・らせん軌道で降りてくるMuonを止める
Kickerコイル
- ・Muonの上下位置を維持する
弱収束磁場コイル
を用意する計画で設計を進めている。



Muon Storage Magnet
(永久電流運転の超電導磁石)

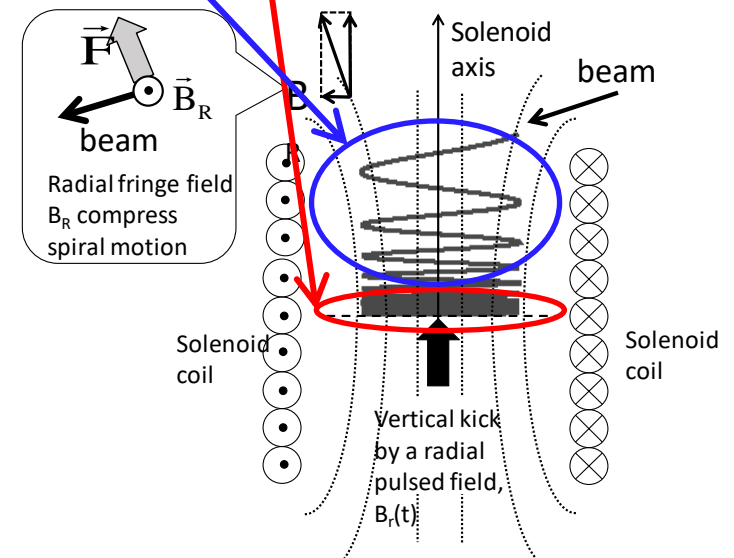


ビーム蓄積磁石内のコイル・磁石配置模式図

5.1. 主磁場

主磁場の使用は下表である。**ビーム蓄積領域**では、0.2ppmの均一度が重要で、**らせん軌道領域**では、半径方向成分が負($B_R < 0$)とならないような磁場設計が重要である。

Table 5-1 Muon 蓄積磁石(MSM)の仕様	
Parameters	Values
Magnetic field strength	3.0 T
Homogeneity (B_z)	< 0.2 ppm
Area with Homogeneous magnetic field	R: 0.318 m to 0.348m
	Z: -0.05 m to +0.05 m
n-index of weak focus field	0.0 to 3.0E-4
Radial magnetic field component B_R	$B_R > -1.0E-4$ T
Current drive	Persistent mode



5.1.1. Step-1 (概念検討)

仕様の磁場分布が可能なことを線輪(FL)電流の集合で確認

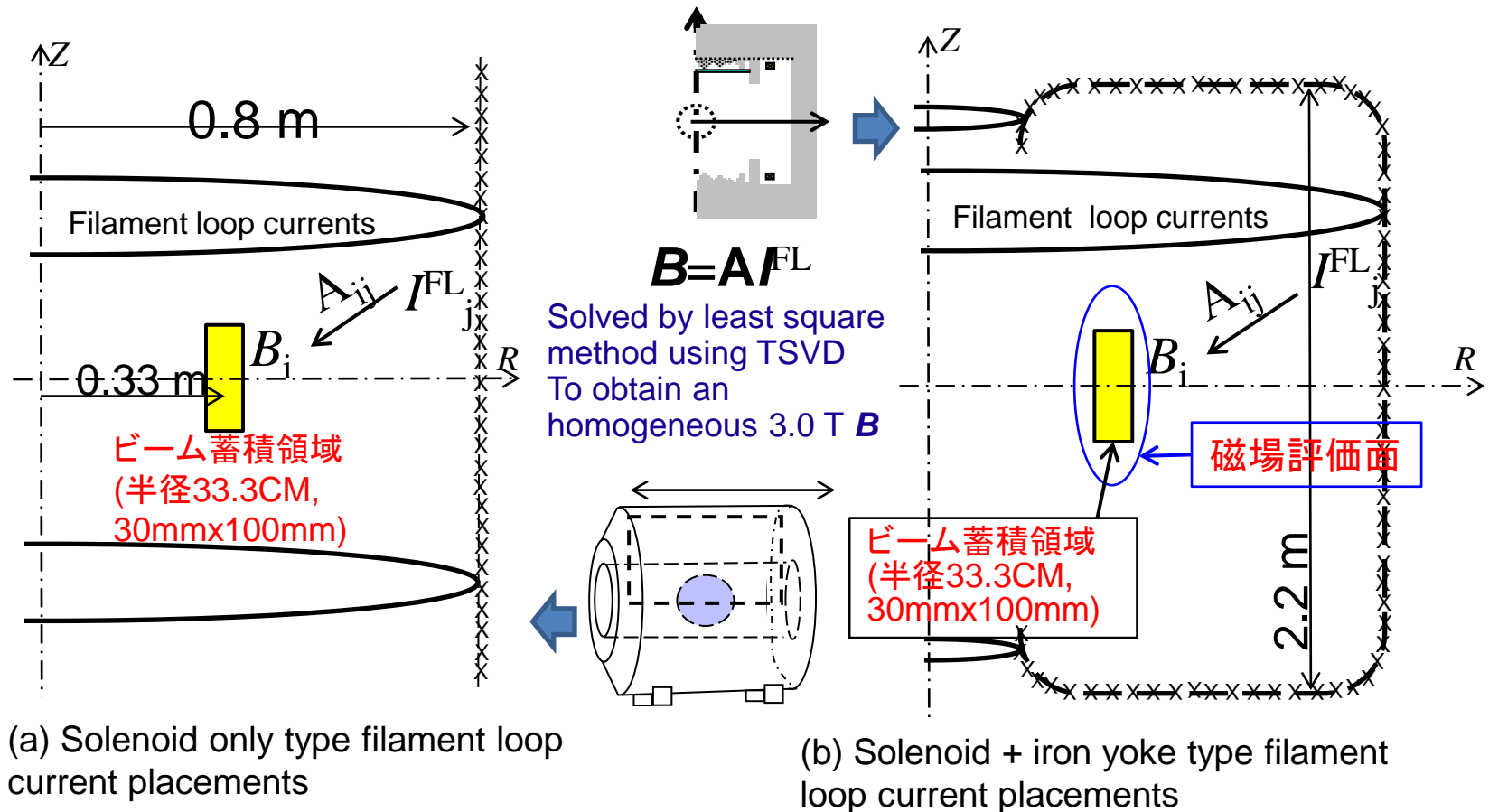


Fig. Computational models to discuss the concept of the g-2/EDM magnet with filament loop (FL) currents

5.1.1. Step-1 (2)

起磁力配置最適化に使用する固有モード

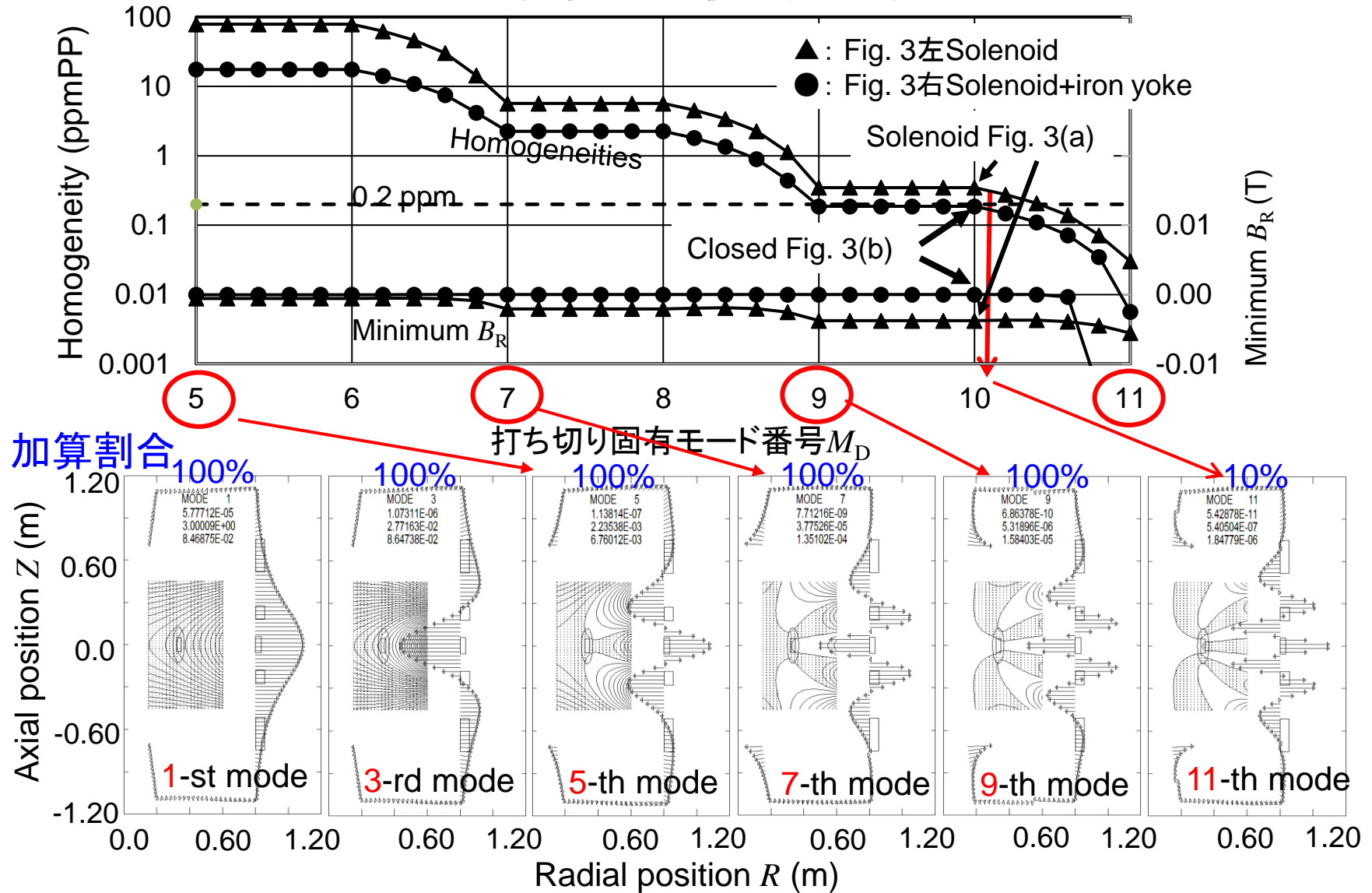


Fig. 4 Eigenmodes used for the magnet design

5.1.1. Step-1 (3)

No current area : $dB_Z/dR = dB_R/dZ$
 Inside strong B_Z causes negative B_R

Radial field on the muon orbit radius:

$$r = p/qB$$

$$= 300\text{MeV}/qBc = 1/B(R,Z)$$

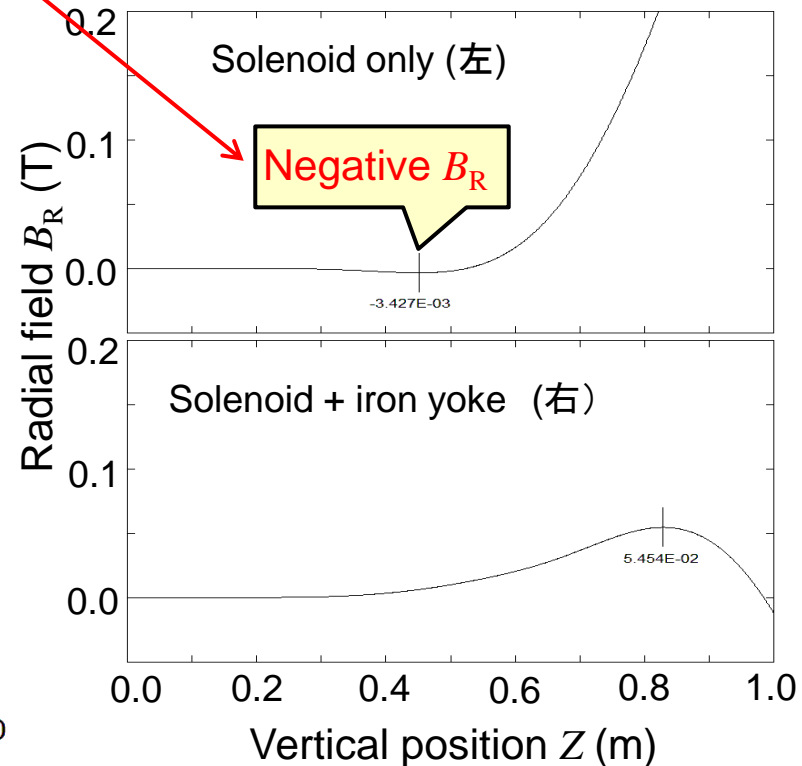
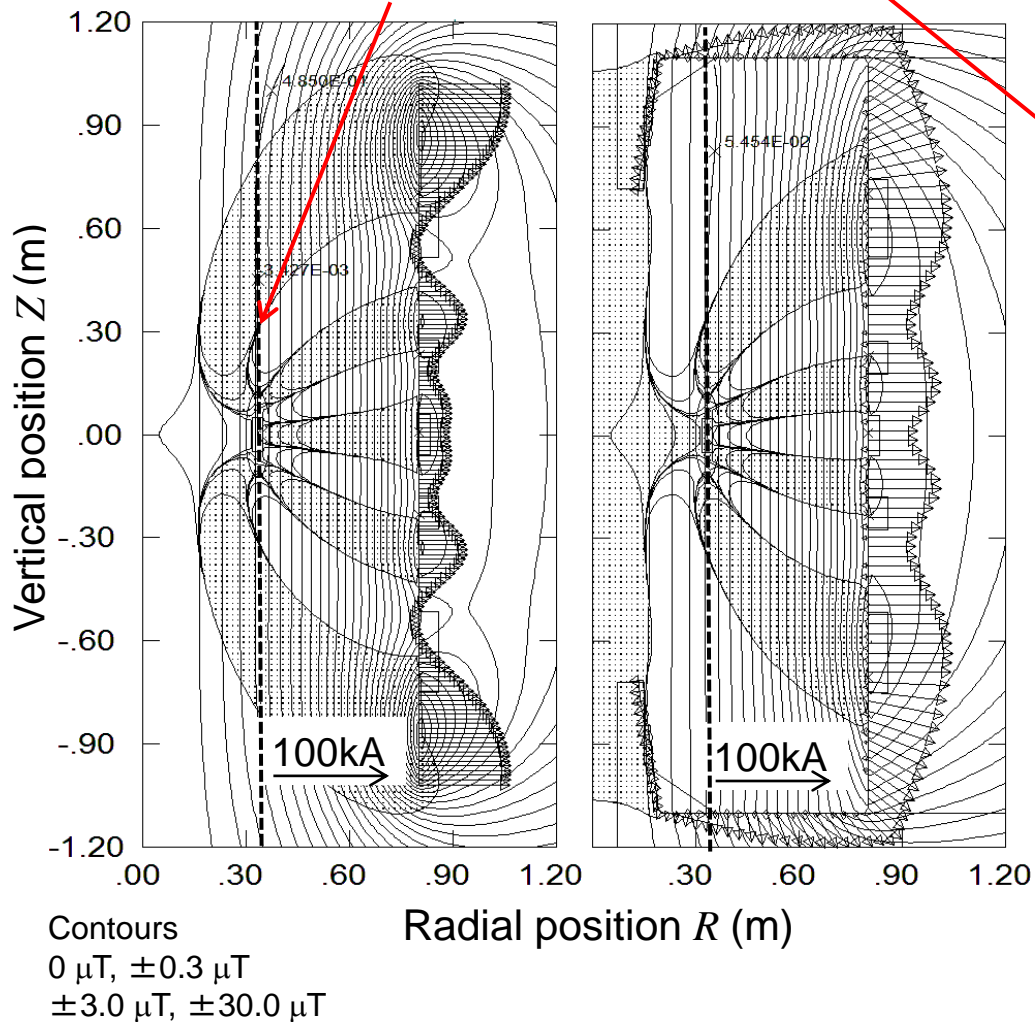


Fig. Candidates for the $g-2/\text{EDM}$ magnetic field
 (Solenoid + iron-yoke type is acceptable)

5.1.1. Step-1 (4)

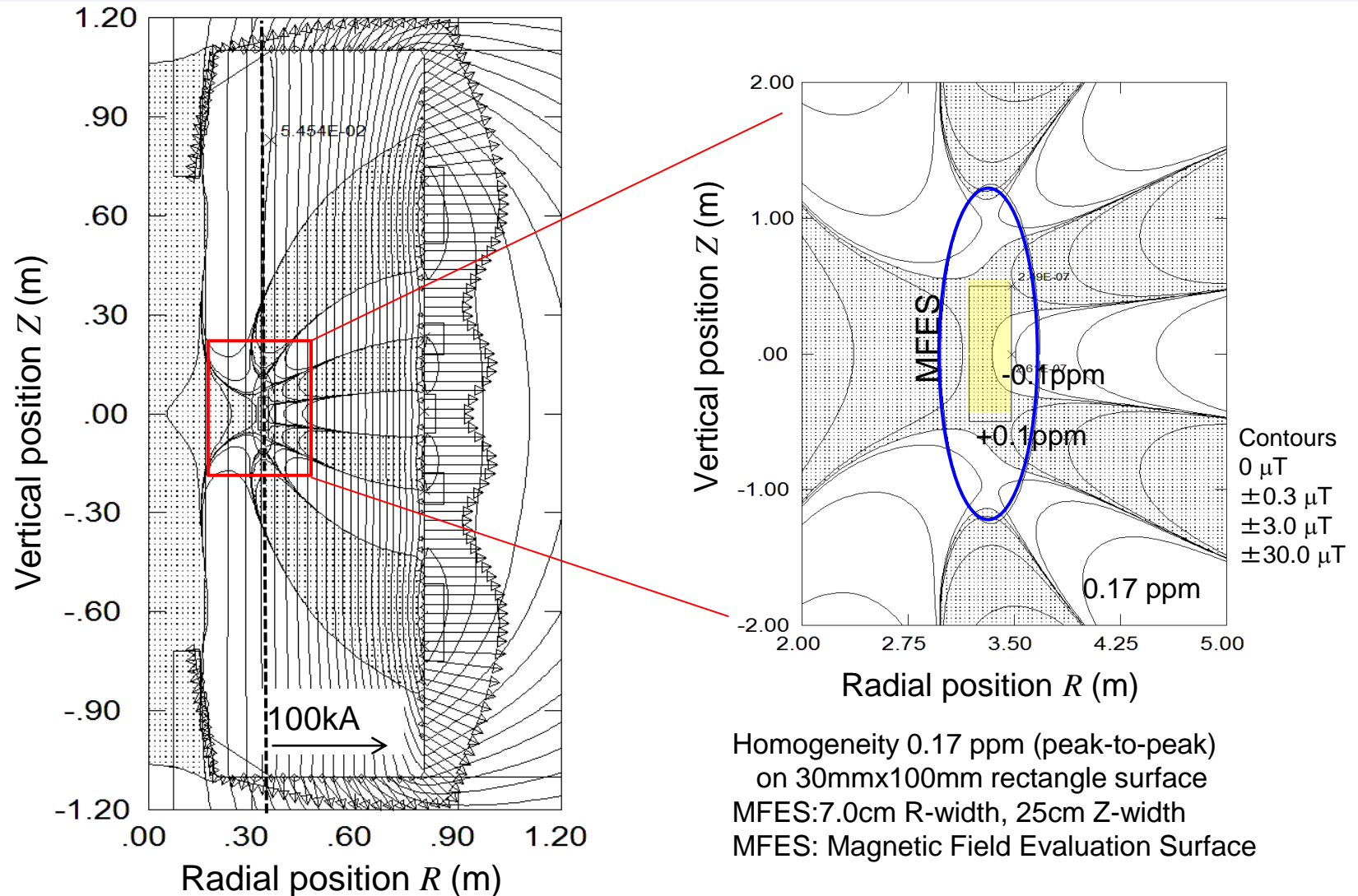


Fig. 5 Target magnetic field distribution for the g-2/EDM magnet
 $1.0 \times (\text{Eigenmodes 1 to 9}) + 0.1 \times (\text{11-th Eigenmodes for margin of homogeneity})$

5.1.2. Step-2およびStep-3

Step-1で求めた磁場分布・起磁力配置の概念を離散的に配置されたCBsと鉄yokeの起磁力で、正確(SVD固有モード強度を再現)に再現する。

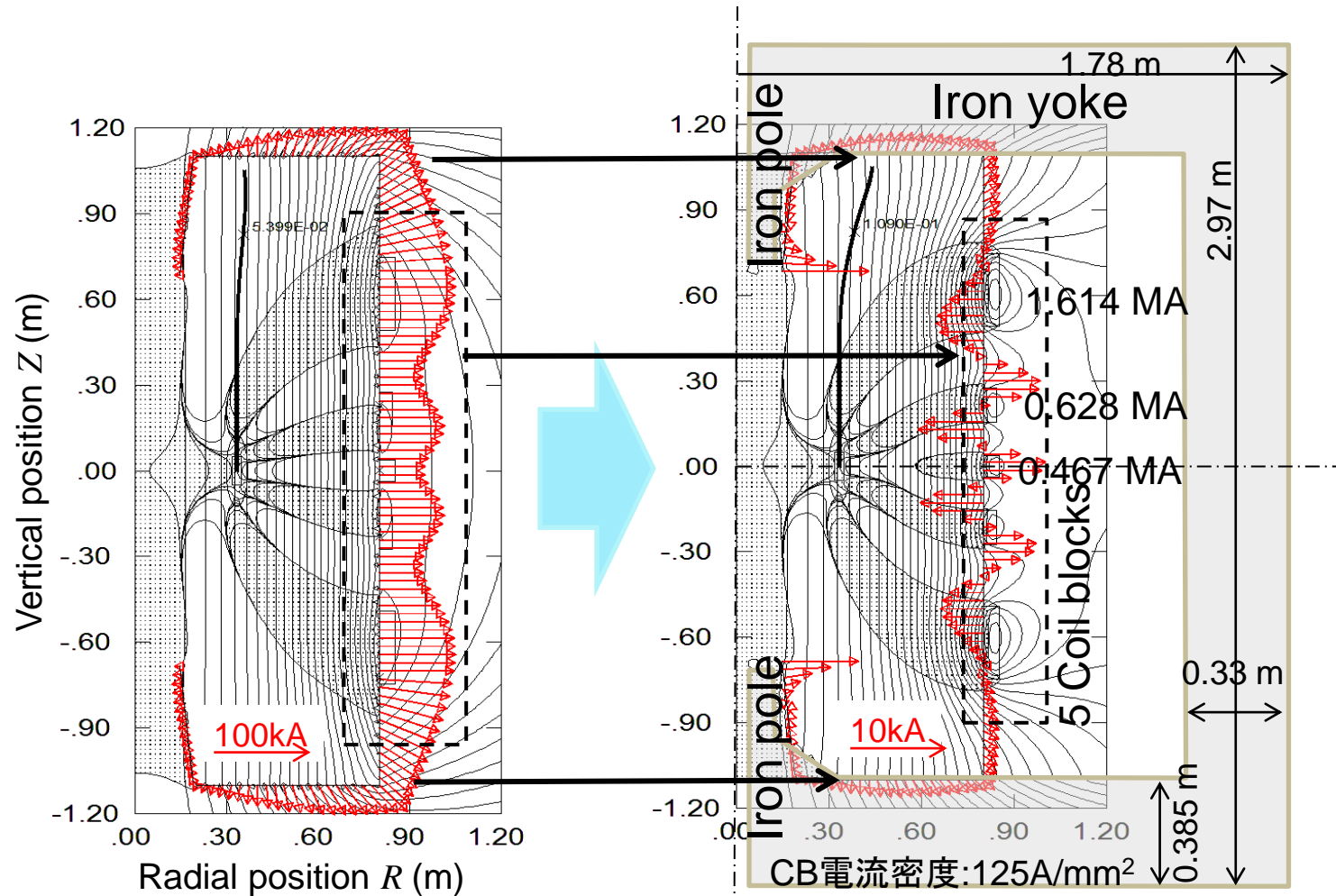


Fig. 磁場分布・起磁力配置の概念(左: Step-1)を手作業でCBsと鉄yokeに置き換えたStep-2初期値。

5.1.2. Step-2およびStep-3 (2)

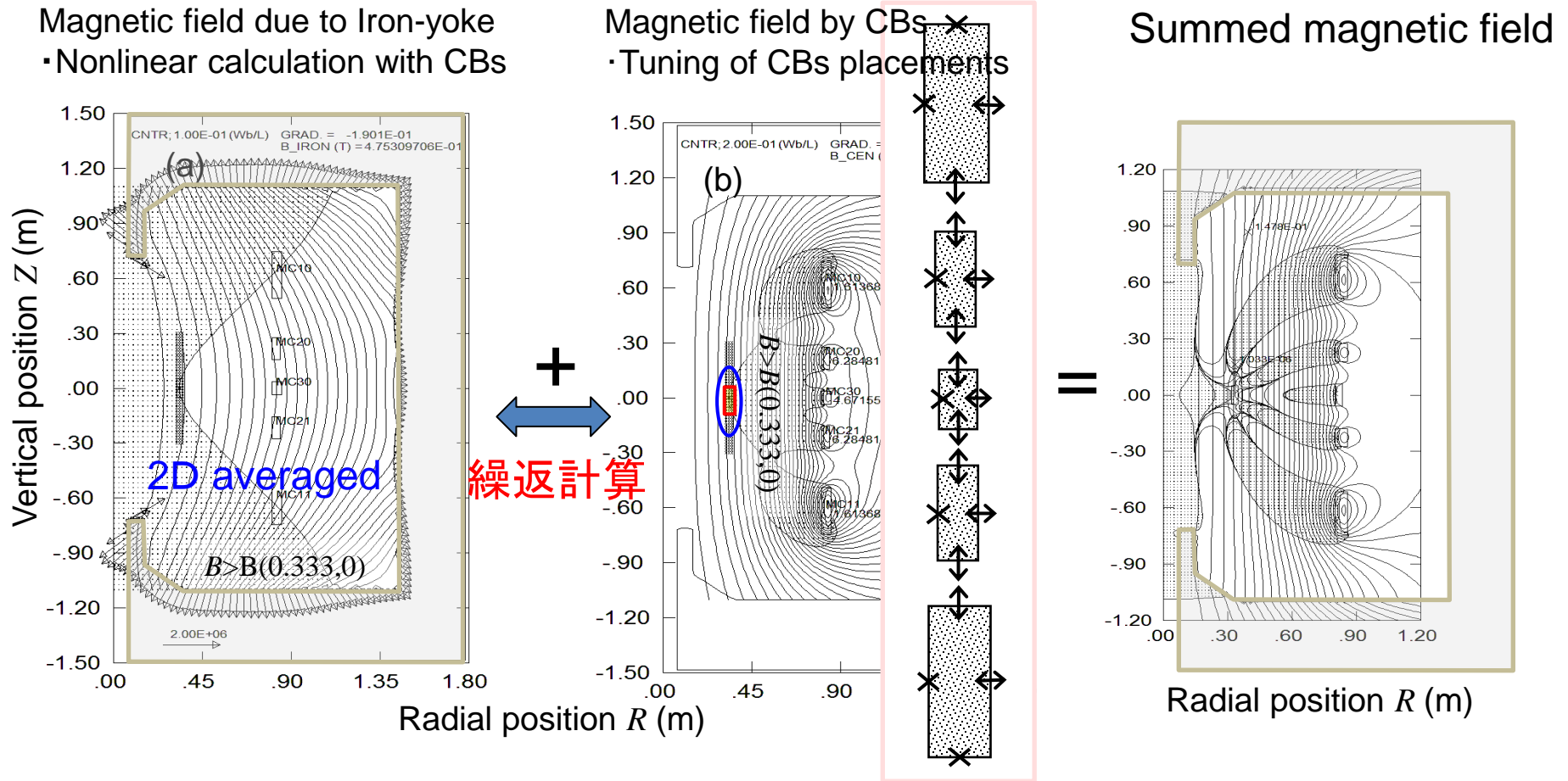


Fig. 6 コイルブロック(CB)配置を与えて鉄yokeの作る磁場計算と、鉄yoke磁場を与えて磁場分布を均一化するようにCB配置を最適化する計算を、交互に繰り返してビーム蓄積領域の磁場分布を均一化させる。

M. Abe, K. Shibata, "Coil Block Designs with Good Homogeneity for MRI Magnets Based on SVD Eigenmode strength", IEEE Trans. Magn., vol. 51, no. 10, P. 7002713, Oct. 2015.

5.1.2. Step-2およびStep-3 (3)

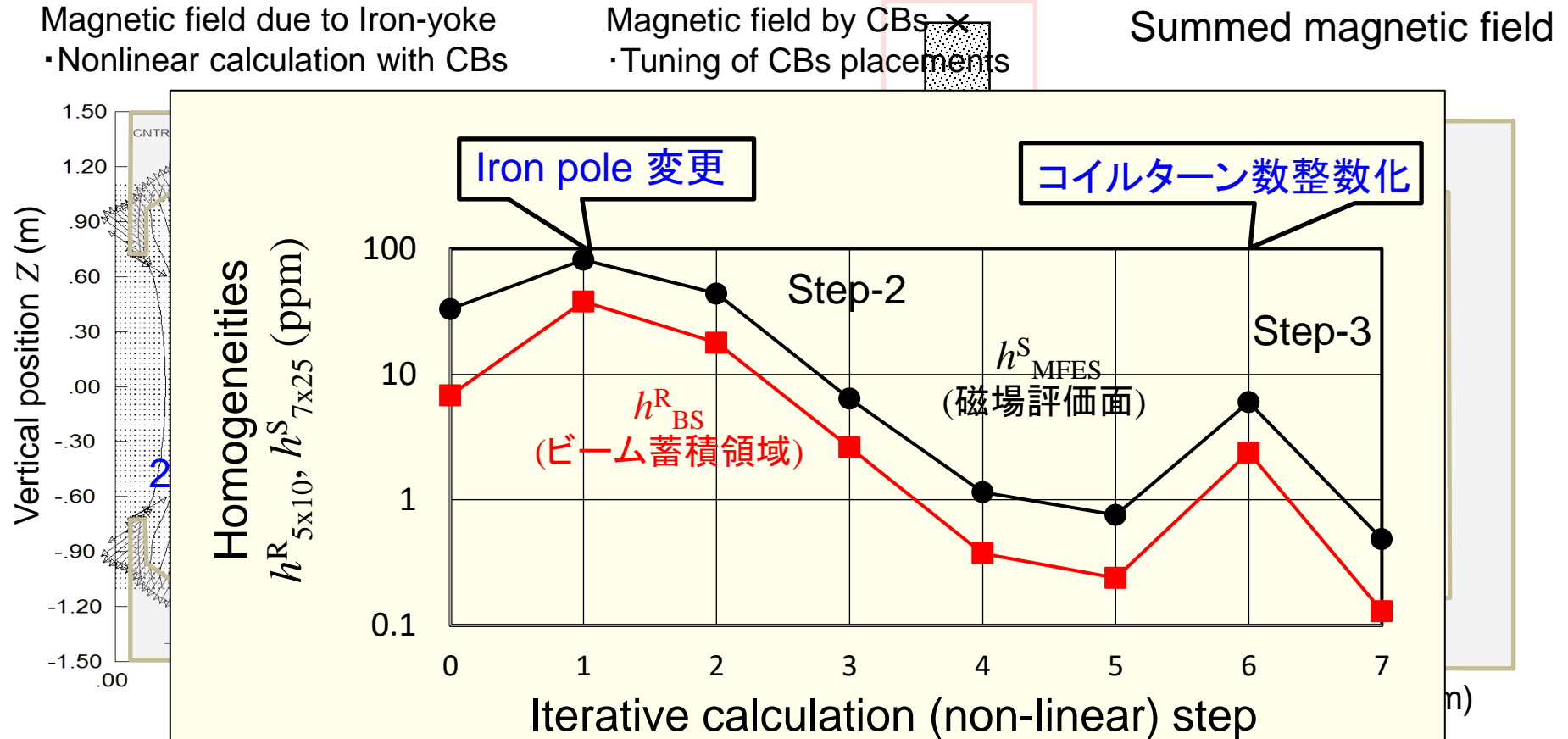
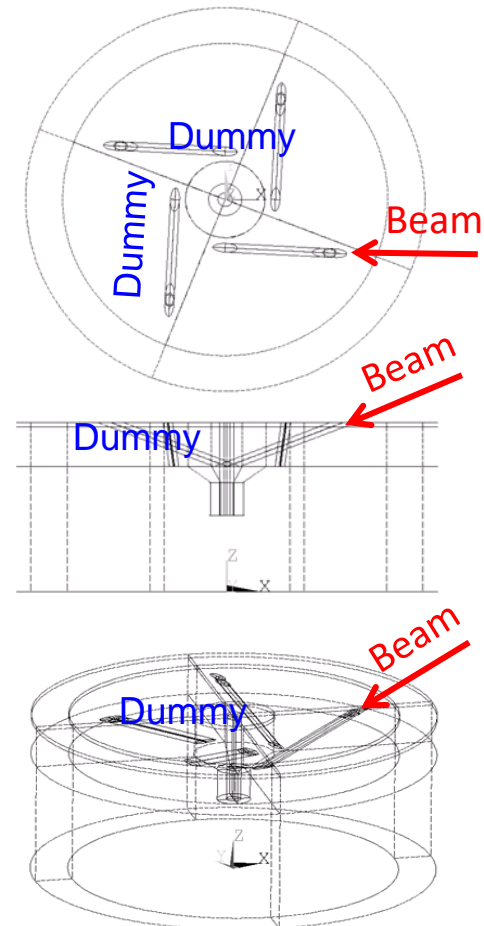
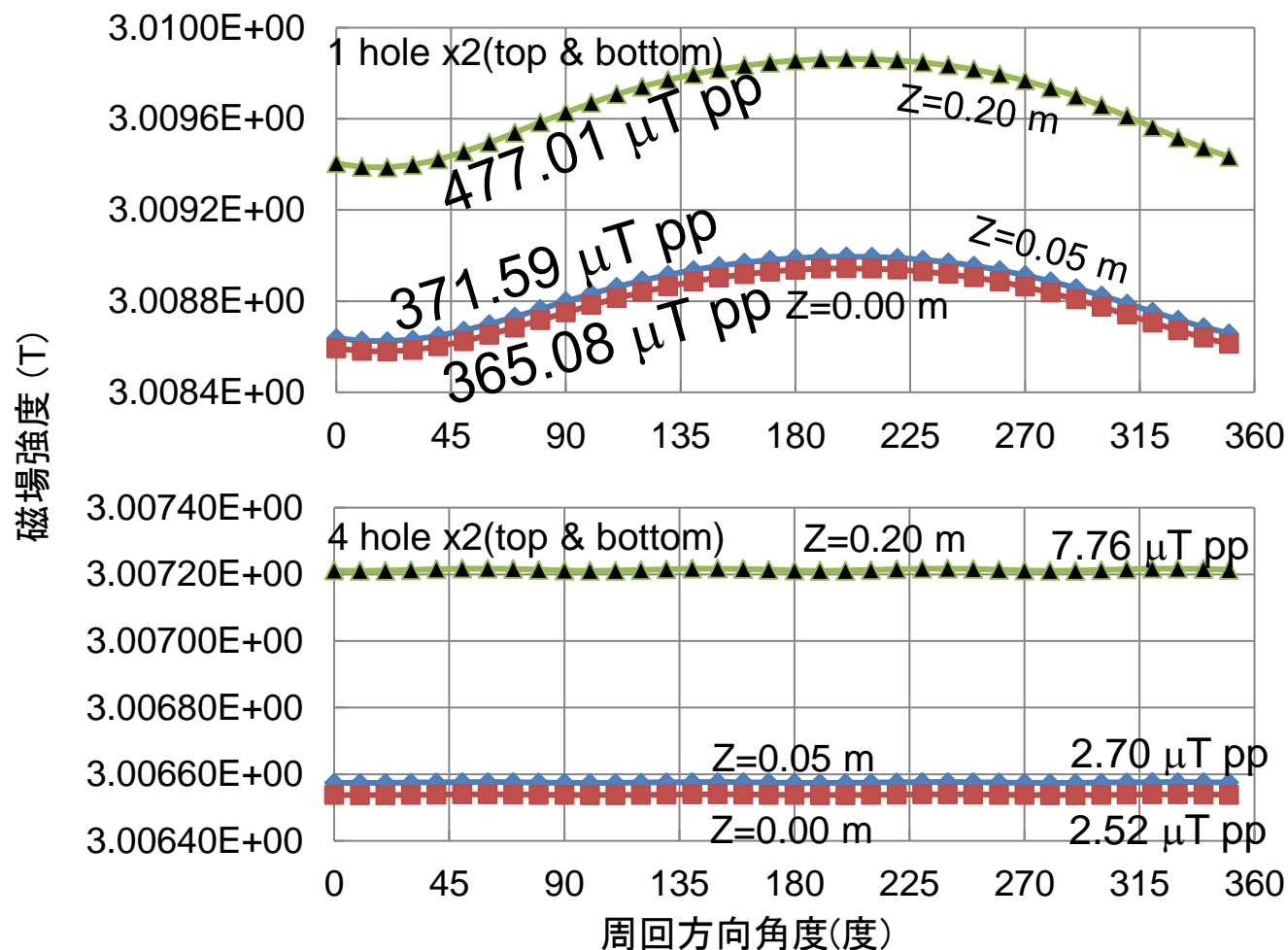


Fig. 6 コイルブロック(CB)配置を与えて鉄yokeの作る磁場計算と、鉄yoke磁場を与えて磁場分布を均一化するようにCB配置を最適化する計算を、交互に繰り返してビーム蓄積領域の磁場分布を均一化させる。

M. Abe, K. Shibata, "Coil Block Designs with Good Homogeneity for MRI Magnets Based on SVD Eigenmode strength", IEEE Trans. Magn., vol. 51, no. 10, P. 7002713, Oct. 2015.

5.1.2. Step-2およびStep-3 (4)

ミュオン入射: 実使用しないダミー穴を追加し、周回方向の磁場を平坦化
 周回方向磁場分布, 2D磁場分布には含まれないので、残った磁場はシミングで対応



Upper half of iron-yoke
(CM7, Dec. 2013)

Fig. 7 ビーム入射穴による周回方向の磁場リップル(< 1ppmPP)

5.1.2. Step-2およびStep-3 (5)

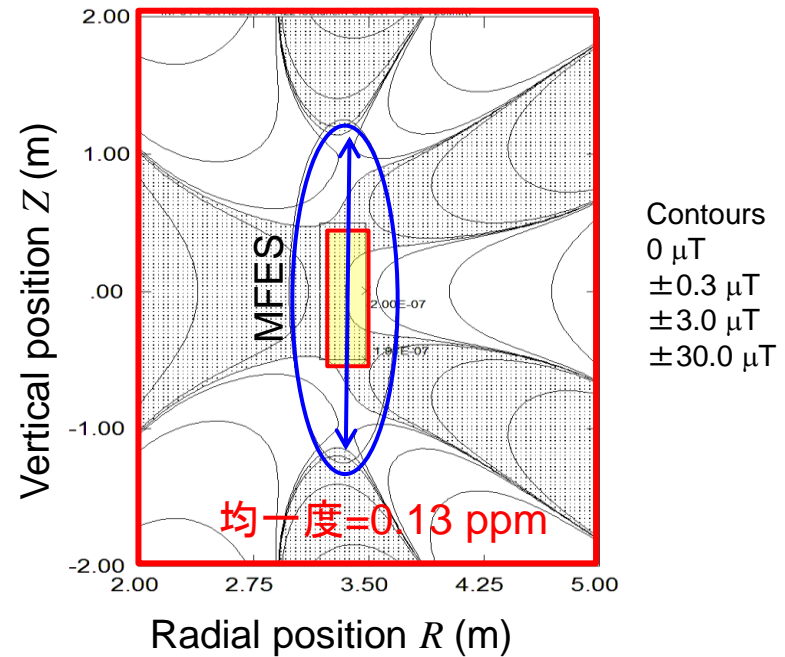
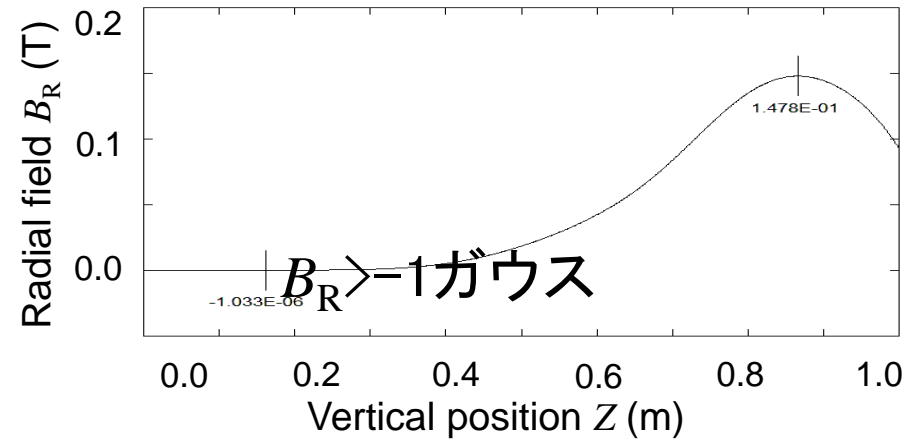
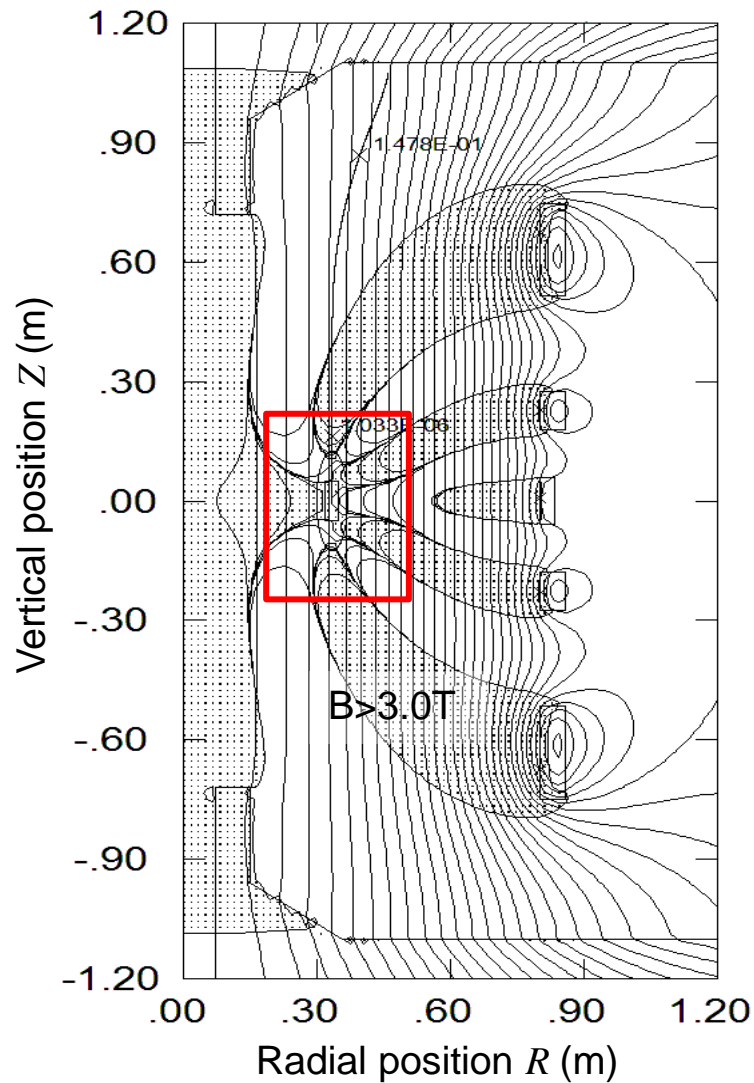


Fig.起磁力配置最適化手法の適用結果(5CBs:M20160422)

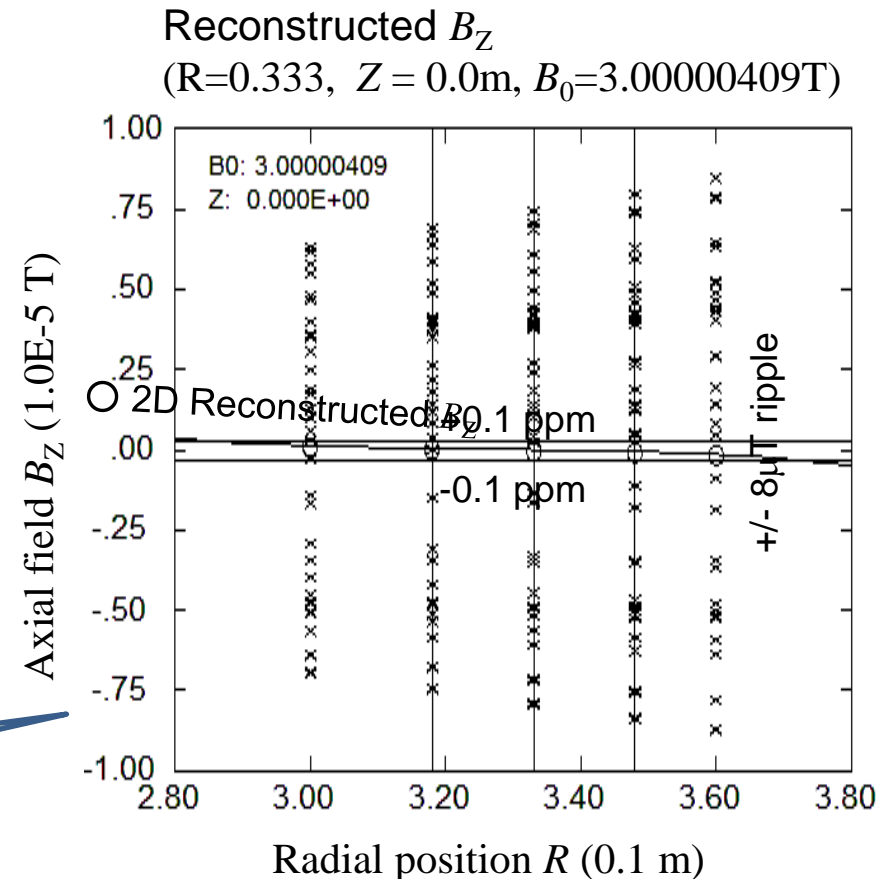
Left is the magnetic field with iron yoke and poles. Right is the zoomed magnetic field.

5.1.3. 鉄yoke磁場(3D)の扱い

- (1) 鉄yoke形状とCB配置を仮定。
- (2) 非線形3D磁場計算コードで磁場計算。
- (3) 磁場分布を周回方向に平均化して2D磁場。
- (4) 2D磁場の均一度を確認、良好で計算完了。
- (5) CB磁場 B_{CB} を計算(2D磁場)。
- (6) 鉄yoke磁場(2D) B^{IR} を(5)と(4)の差異で算出。
- (7) $B^{CB} + B^{IR}$ が2D一様磁場となるCB配置に調整
- (8) 調整CB配置で3D非線形場計算
- (9) CB配置可能性を確認→(3)or(1)へ戻。

鉄yokeの開口部が周回方向の磁場にリップルを作る。これは、設計時には可能な範囲で小さくしておくが、設置後のシミングにより、磁場を一様化する。

第5.2.4項でシミングの計算シミュレーション(仮想シミング)を示す。



CBsと鉄yokeがMuon蓄積領域に作る磁場分布。
 x:10毎の3D計算磁場、○:周回方向平均磁場、
 実線:2D再構成磁場。蓄積領域で $\pm 8\mu\text{T}$ のリップル磁場が存在するが、シミングは容易で有ることは確認済み。

5.1.4. 磁場設計のUpdate

Muonビーム入射口(4個x上下)常時開。7個はダミーで磁場分布調整用

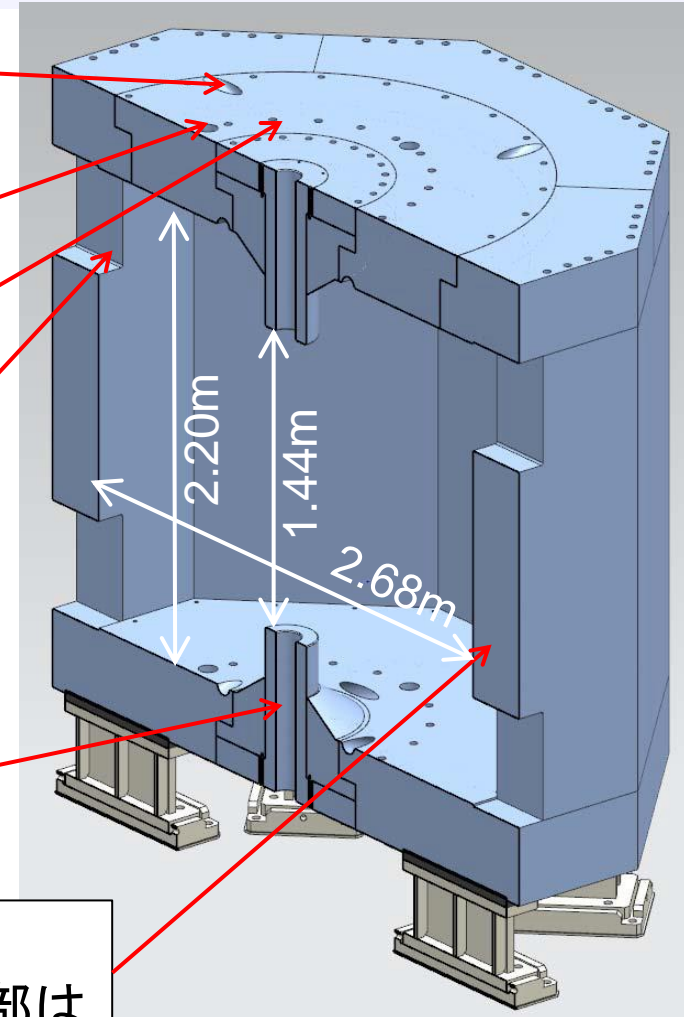
Coarseシムトレイ用引き出し穴(4個x上下)作業後に穴に閉止鉄栓

Fineシムトレイ用引き出し穴(20個x上下)閉止鉄栓無し

冷凍機からの液体He輸送管用(4個x上下)常時開。7個はダミーで磁場分布調整用。

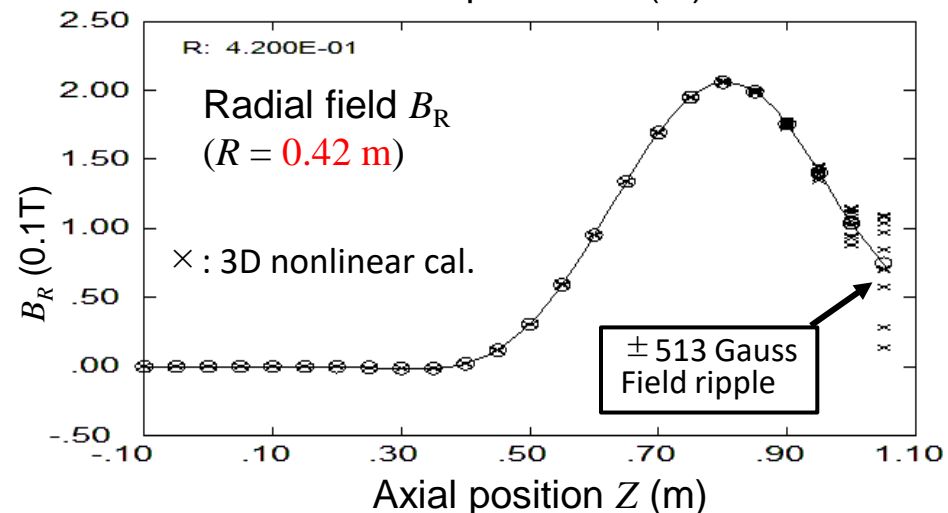
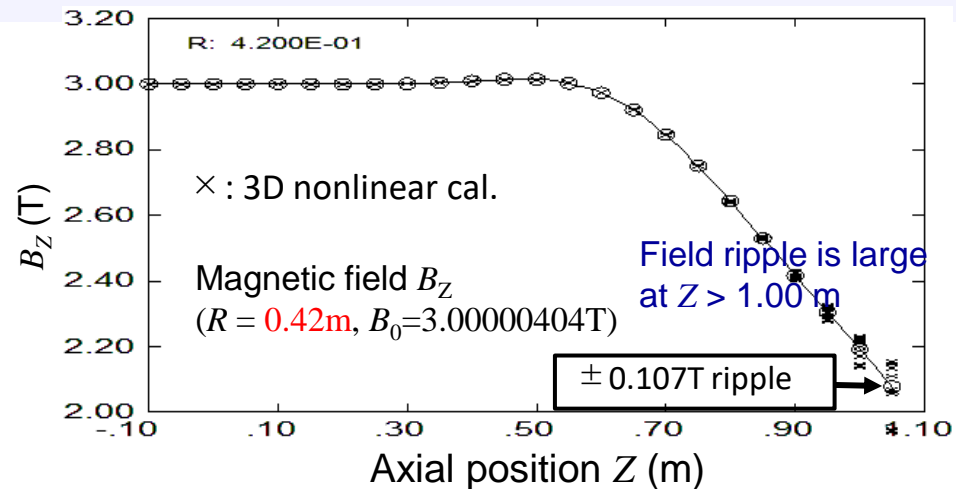
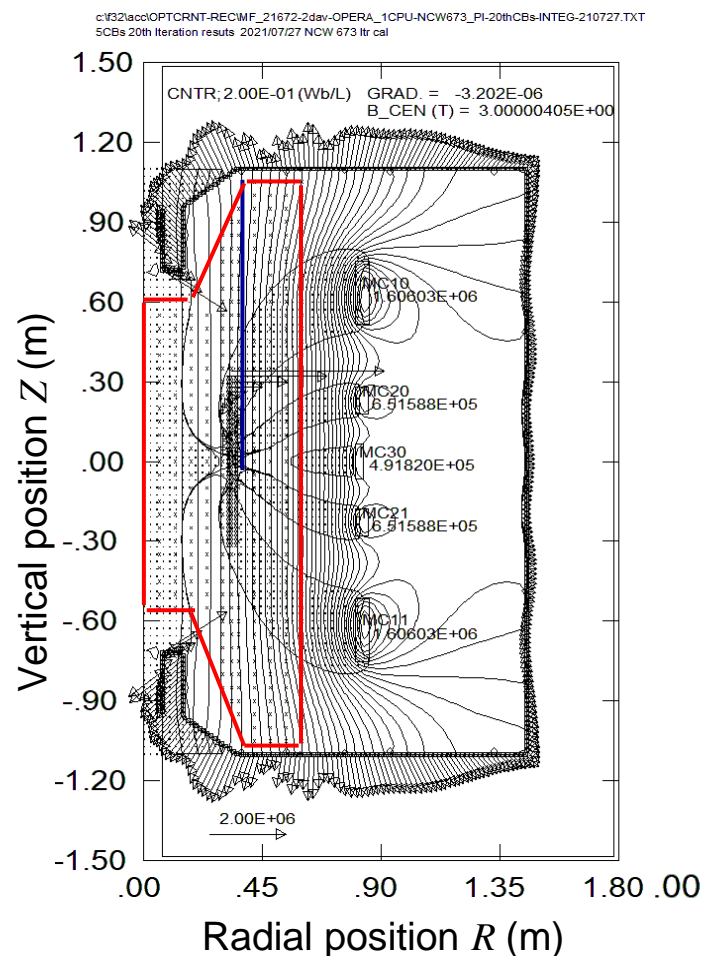
検出器配線、真空排気、キッカーコイル配線(1個x上下)

鉄yoke外形は、製作性を考慮して8角形。
 ・上下(天井・床)板は純鉄(385mm厚)、外周部はSS400(構造材、330mm→増加検討中)を検討中。



現在の鉄yoke設計形状。設計の進展に依って変化し、CBs位置も変更。
 (現在のCBsはM20210727.or.M20210604 導体の違い)

5.1.5. 2D再構成磁場と周回方向磁場変動



Muon入射シミュレーション用2D再構成磁場

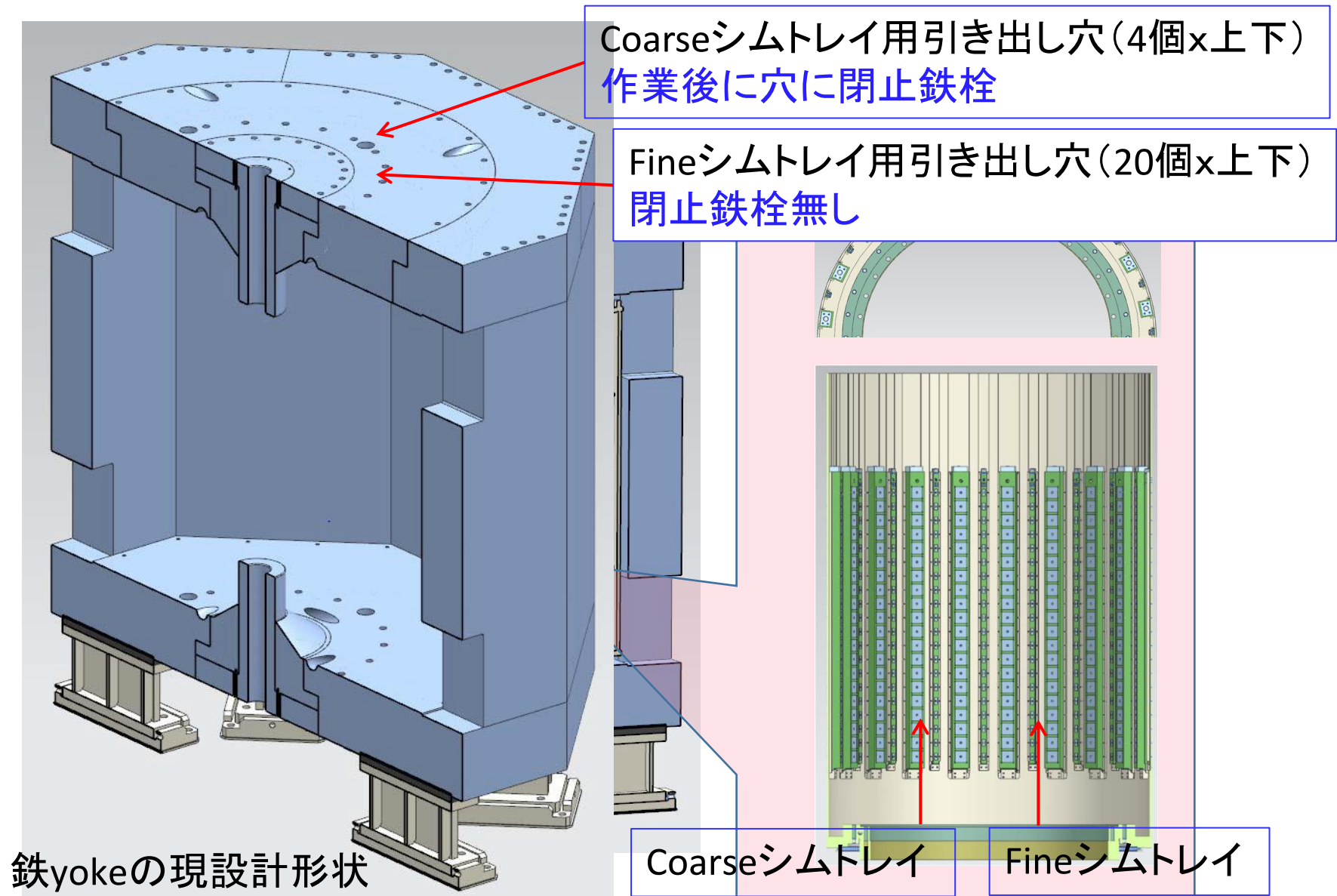
主磁場を含め、各種磁場の働き、設計の妥当性は、入射シミュレーションで検討中。 $Z < 0.95\text{m}$ では検討の高速化のため下図の2D平均化・再構成磁場で進めている。蓄積領域では、鉄yokeの穴に開けた貫通孔の影響で $\pm 1\mu\text{T}$ の磁場リップルがあるが、シミング可能であることは確認済み。

5.2. 調整装置

正確な磁場分布で設計しても、実際に設置された磁石には、種々の原因で誤差磁場が混入する。そのため、MRI用磁石と同様に、磁場調整(シミング)を行う。そのために、下表の装置を用意をしている。

受動的(Passive)シミング機構		能動的(Active)シミング機構	
磁化鉄片の磁気モーメント利用(飽和磁化: 1.711Am ² /1cc)、配置位置・量を調整		小コイルによる磁場を利用、電源電流を調整	
Coarse用	Fine用	B _Z タイプシムトレイ	B _R タイプシムトレイ
粗いシミングに利用	最終的な精度良いシミング	軸方向成分B _Z 用	直交磁場成分(B _X , B _Y)用
鉄容量<37000 cc <6000ccを目指す	鉄容量<2016 cc <100ccを目指す	±3ガウス以内(1.0kAT)	±6ガウス以内(1.0kAT)
20本x20ポケット(92.5cc)	20本x20ポケット(5.0cc)	周回方向にSCコイル6個	周回方向にSCコイル6個
消磁必要	励磁を保つ	実験中でも操作可能	実験中でも操作可能
鉄yoke天井の4個のシムトレイ取り出し穴。シミング終了後に閉止。実験開始後ではCoarseシミング無し	鉄yoke天井の20個のシムトレイ取り出し穴。シミング終了後でも開継続、鉄yokeの変化無し	6個の小コイルを独立に通電できる電流導入	6個の小コイルを独立に通電できる電流導入

5.2.1. 受動磁場シミング

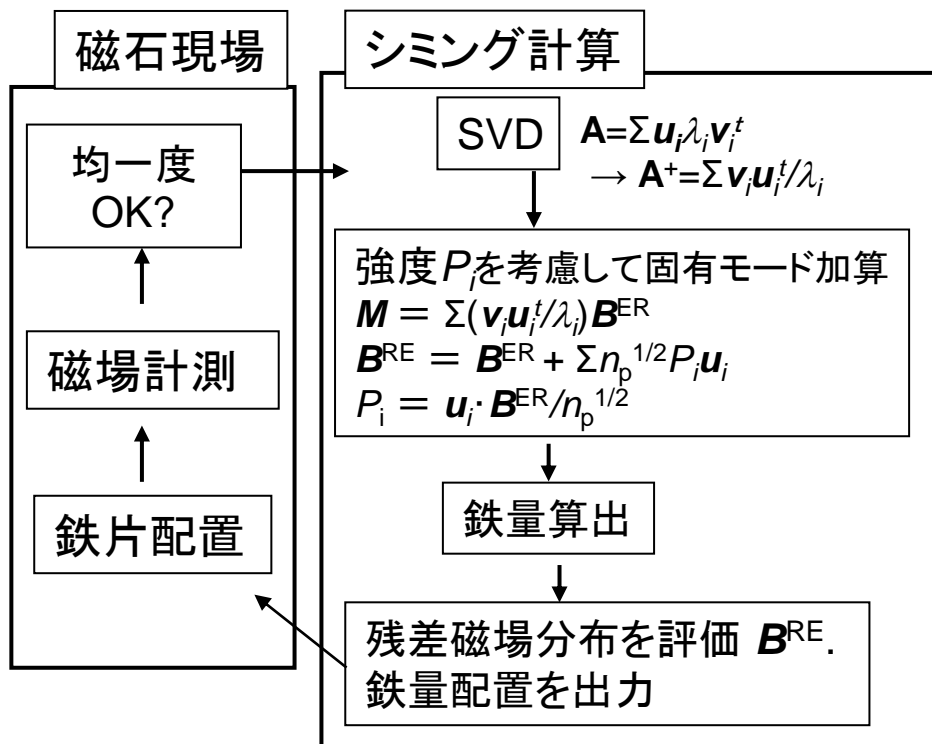


5.2.1. 受動磁場シミング (2)

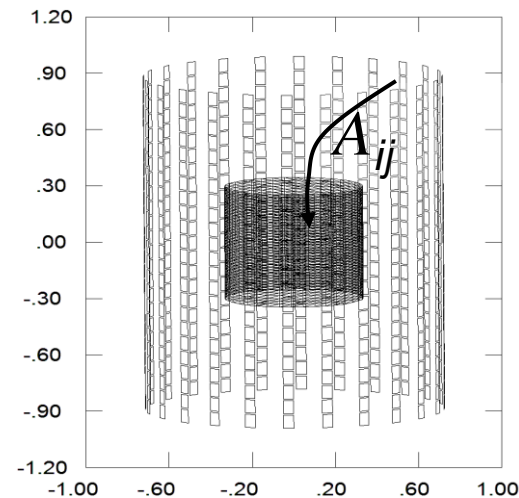
鉄片配置は($E_r = |\mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{MS}|^2$) を小さくする,
 $\mathbf{B}^{err} = (\mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{MS}) \doteq \mathbf{A}\mathbf{M}$ (\mathbf{M} ; 純鉄 $1.7\text{Am}^2/\text{cc}$ で鉄量換算)
 $\rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{A}^* \mathbf{B}^{err}$ (\mathbf{A} ; 応答行列, 例えば 1404×400)
 一般逆行列 \mathbf{A}^* はTSVD (Truncated SVD)利用。

磁気モーメント分布(鉄量に比例) $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_i, \dots)$ (i-th シムポケット)
 $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_j, \dots)$ (j-th MFEP: Magnetic Field Evaluation Point)

M. Abe, et al., IEEE Trans. Appl. Supercond.,
 27, Art. no. 4400812 (2017).

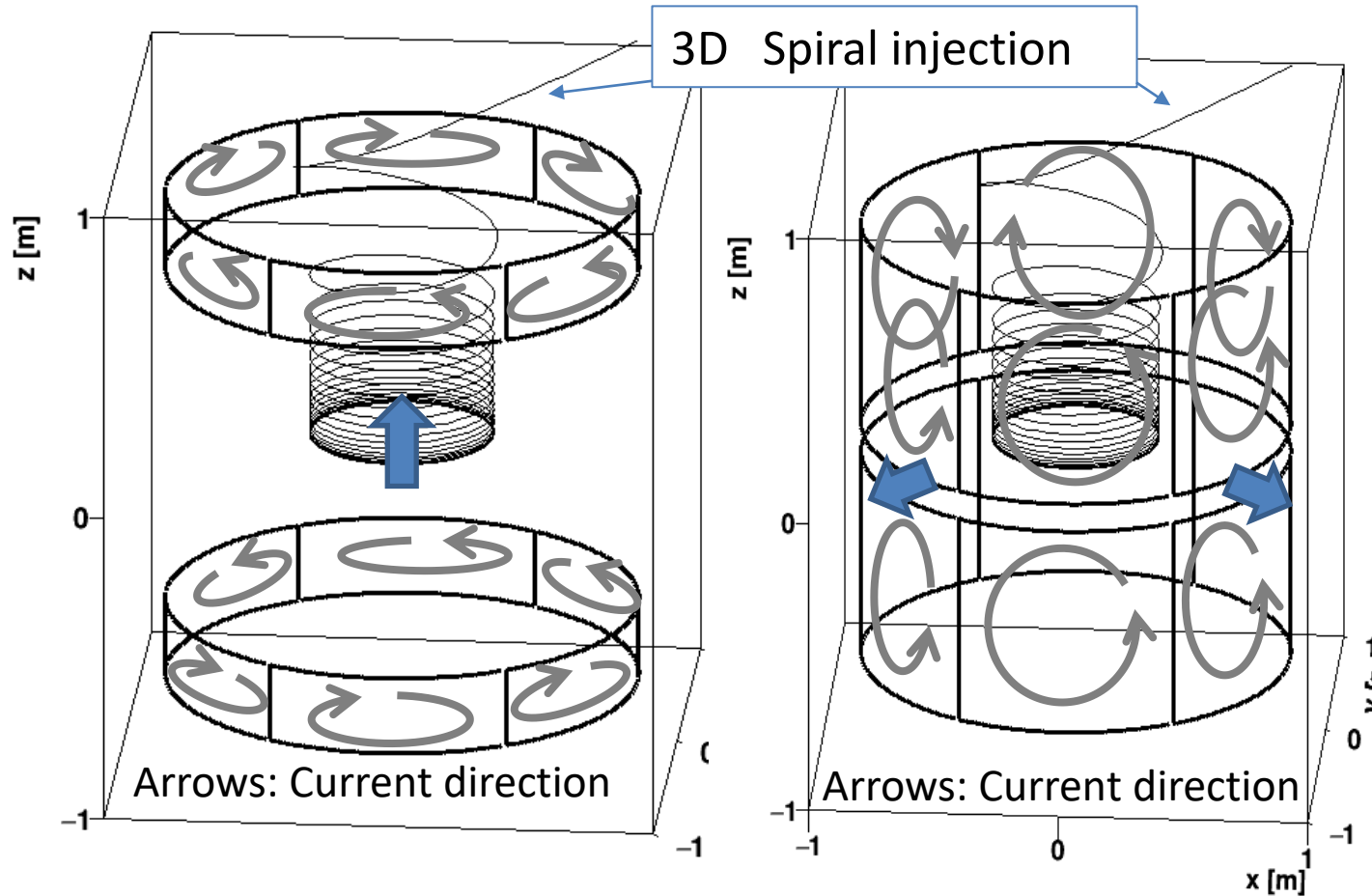


磁場シミング作業



Coarse用シムポケット
 (1.50mLx1.34mΦ, 20(z)x20(rot.) pockets)

5.2.2. 能動的磁場シミング

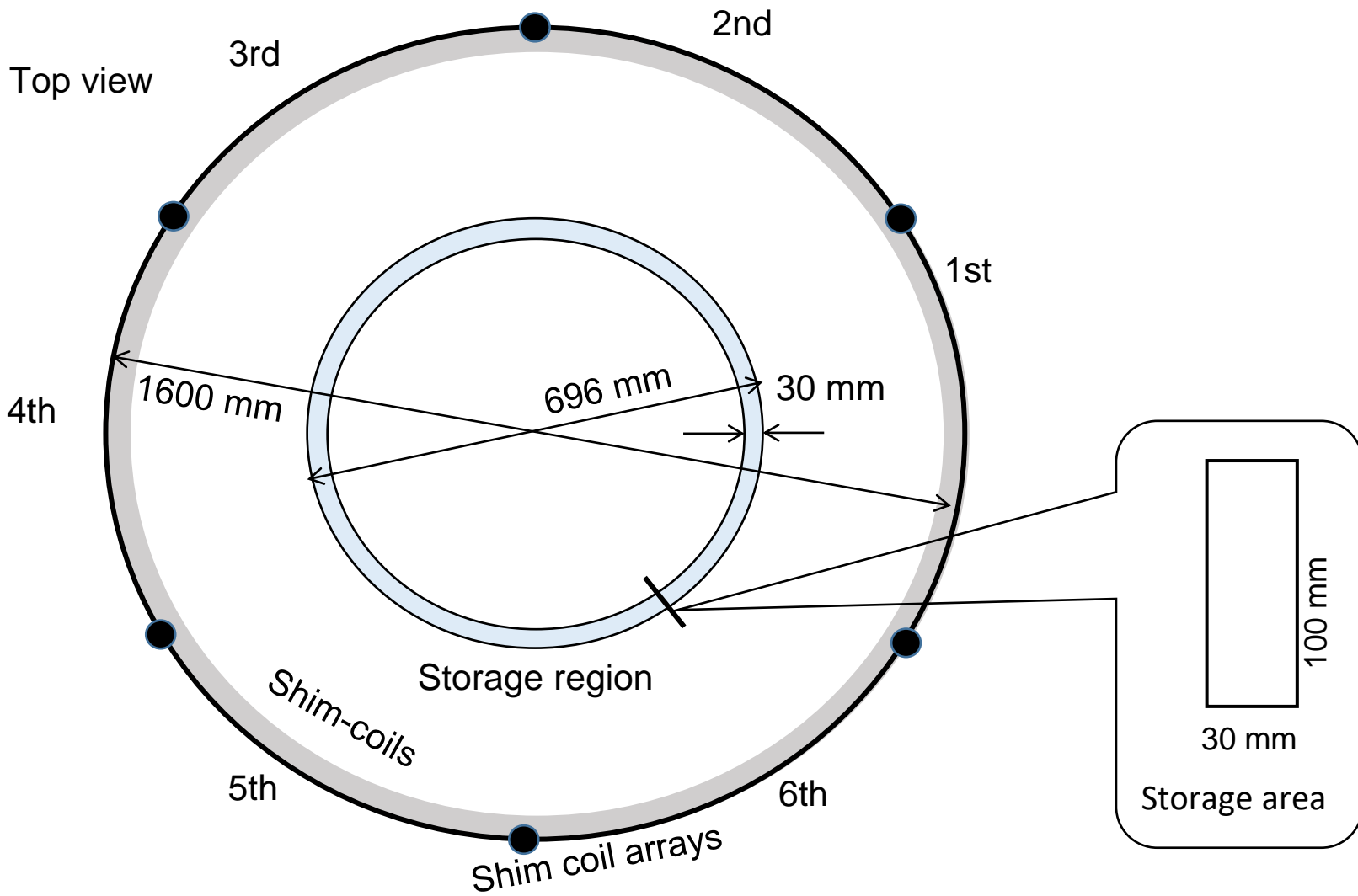


B_Z タイプシムコイル

B_R タイプシムコイル

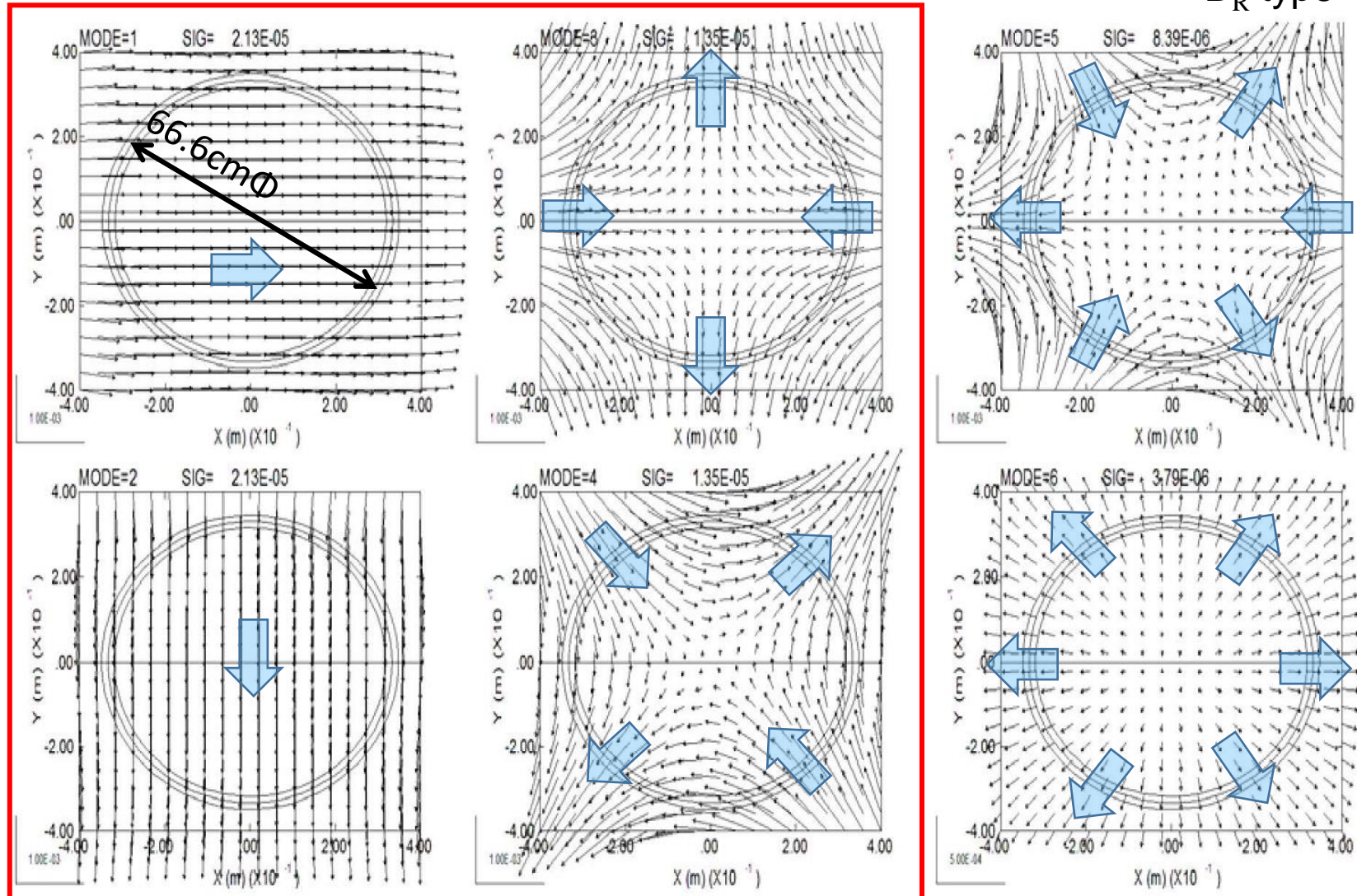
シムコイルアレイ

5.2.2. 能動的磁場シミング (2)



シムコイルアレイの配置図(上面図)

5.2.2. 能動的磁場シミング (3)



B_R タイプシムコイルが $Z=0$ 面上に発生する磁場

5.2.2. 能動的磁場シミング (4)

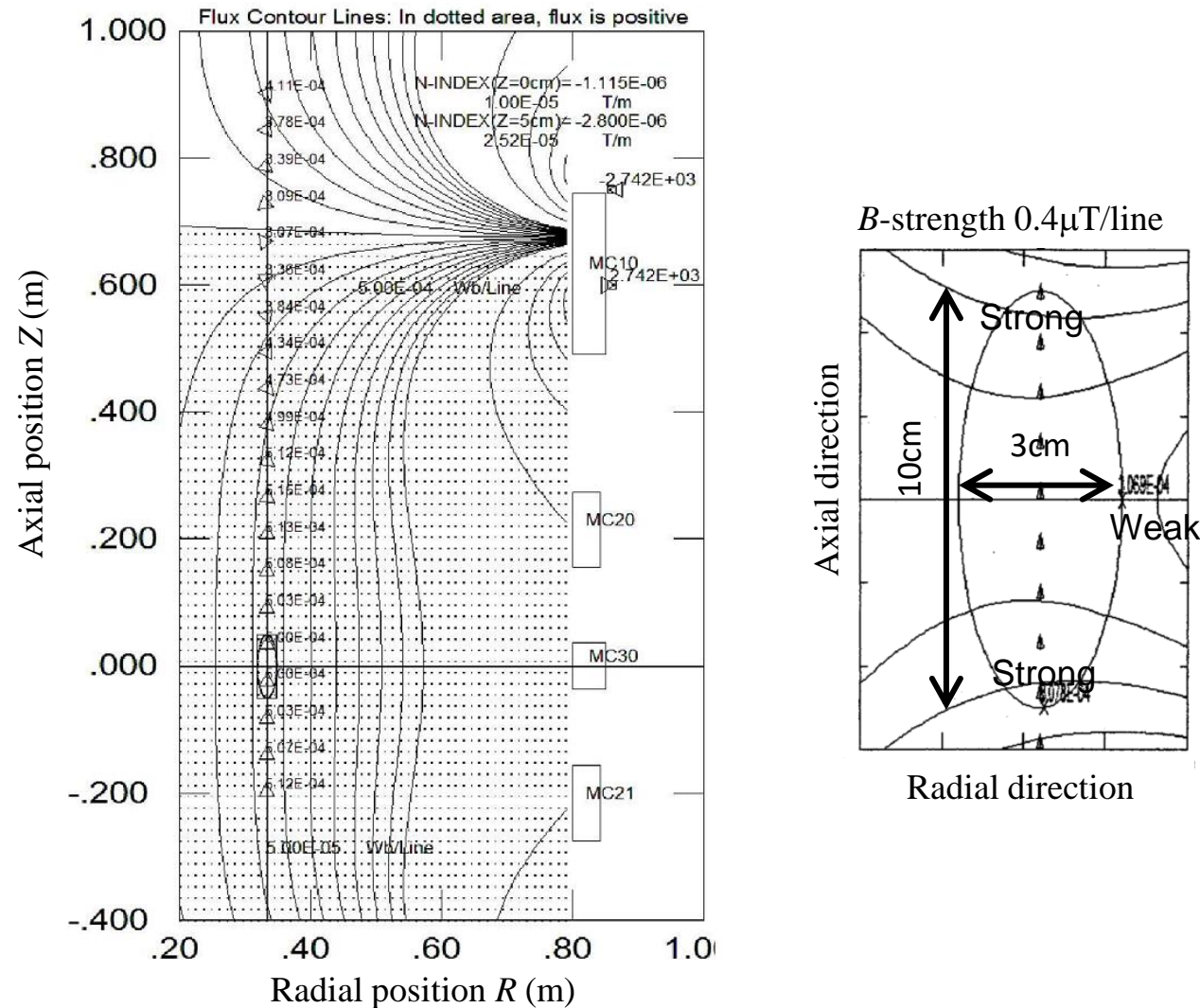
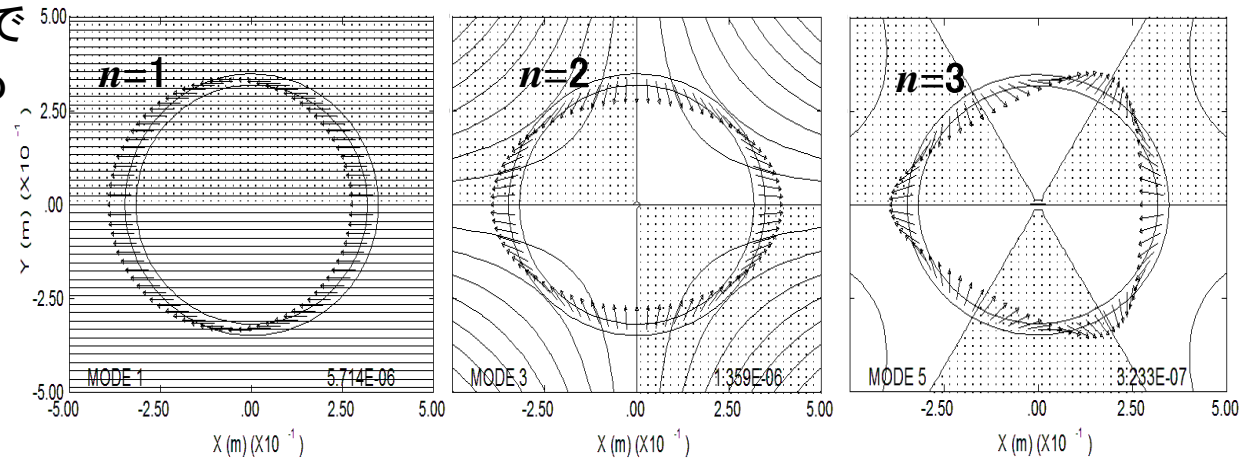


Fig. B_Z typeシムコイルの作る磁場(6個 \times 1.0kA電流)。 B_Z 強度の微調調整に使うことも出来る。

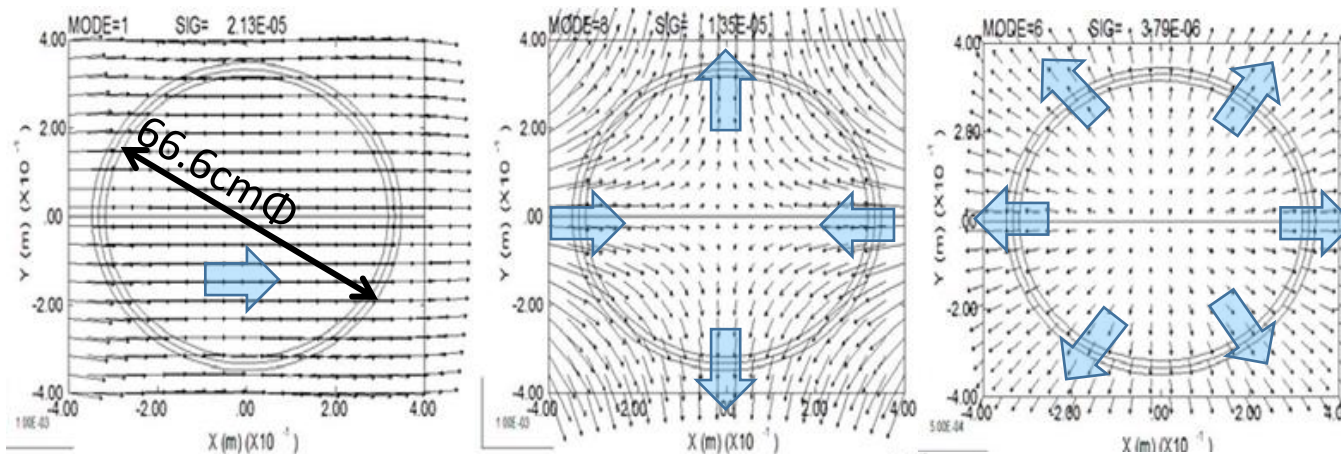
5.2.3. 受動シミングの難しい磁場との関連

第4.6.5項で示したシミングの難しい磁場は B_{\perp} であり、下右の軸に垂直な面上を向いた成分の磁場であるが、これは計画してる B_R タイプシムコイルと一致した磁場分布である。

そのため、何らかの方向で検出できが、補正することは可能であると考える。



第4.6.5項で示したシミングの難しい磁場 (Fig. 4-24より)

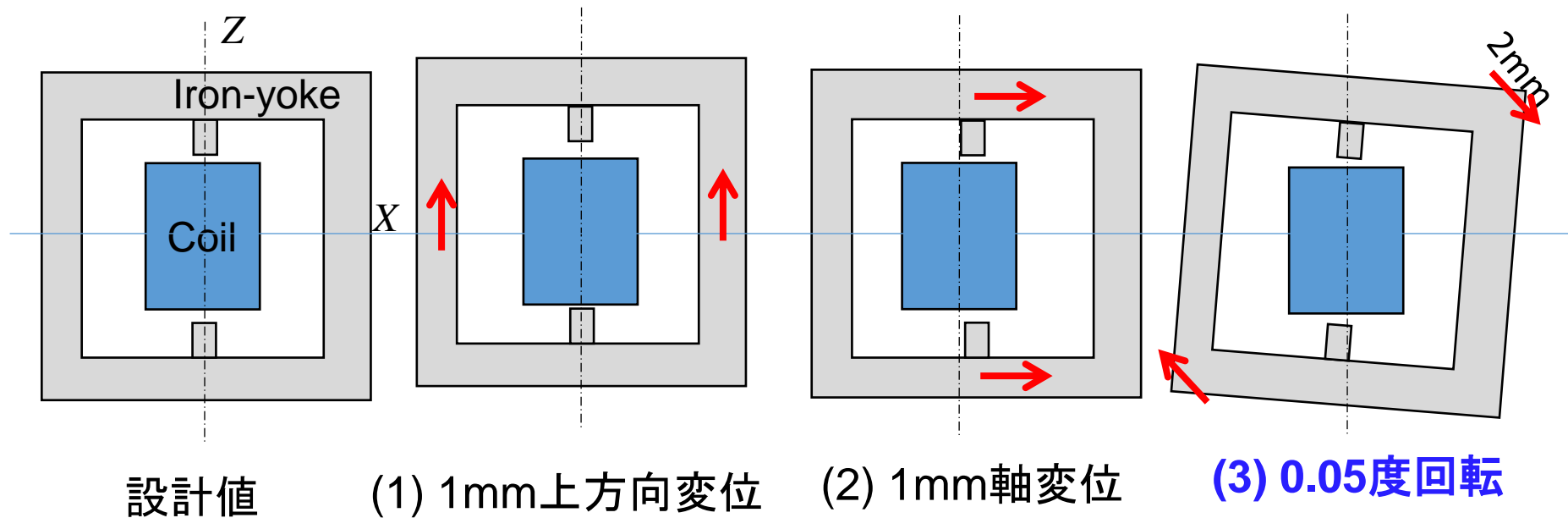


B_R タイプシムコイルによる $Z=0$ の磁場 (Fig. 5-14)

5.2.4. 受動的磁場シミングと残差磁場

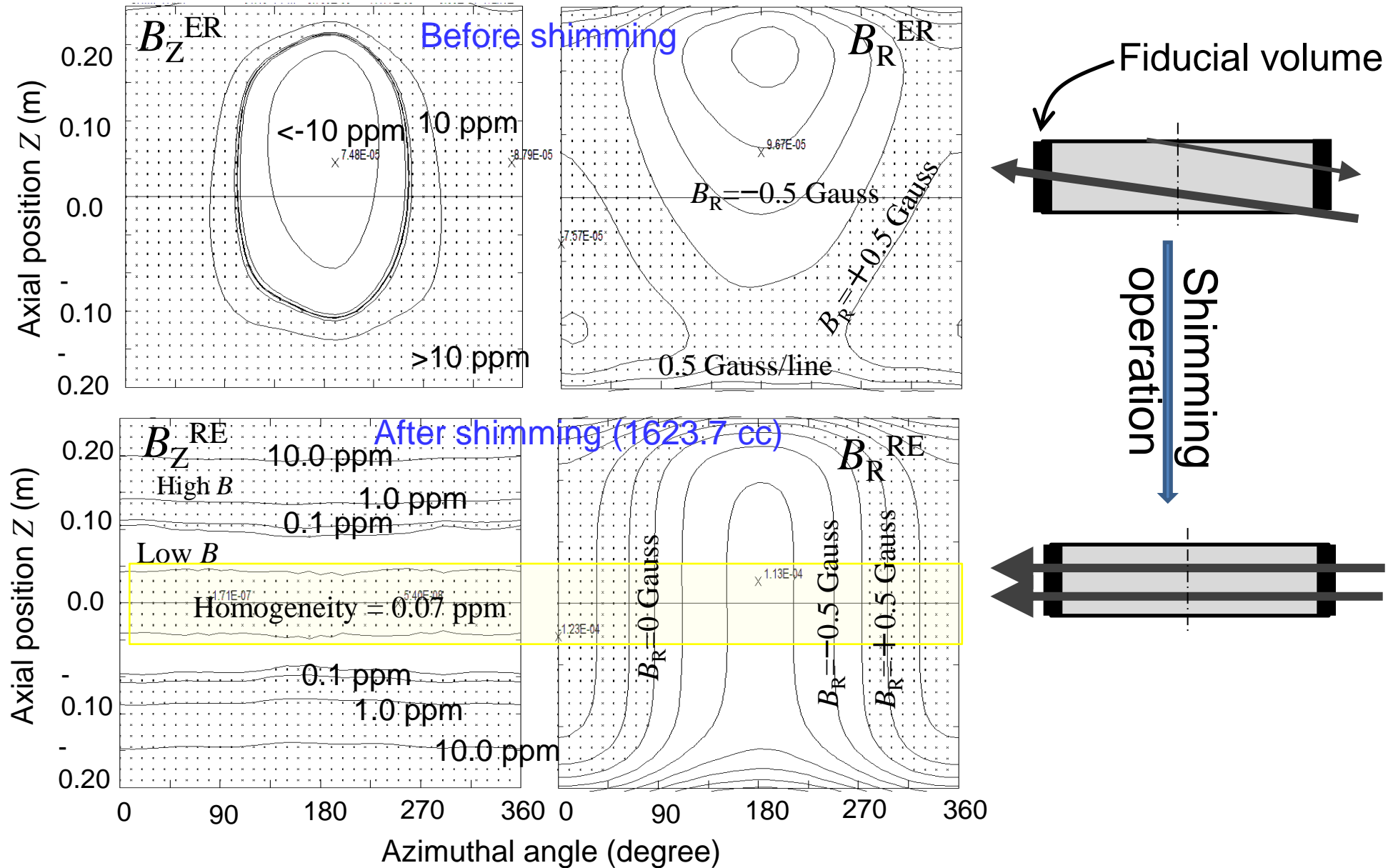
シミングのシミュレーション鉄yoke設置誤差による誤差磁場のシミング
誤差磁場原因として鉄yokeの設置誤差のみを考える。

目標磁場 B^0 はミュオン蓄積領域で一様であり、 B_i^0 は全ての3.0T、
ビーム蓄積領域で B_z の磁場振幅は3.0Tを中心に、
-0.1ppm~+0.1ppm (-0.3 μ T~+0.3 μ T)であることがシミング後の目標



シミング計算例に使用した鉄yoke変位例

5.2.4. 受動的磁場シミングと残差磁場 (2)

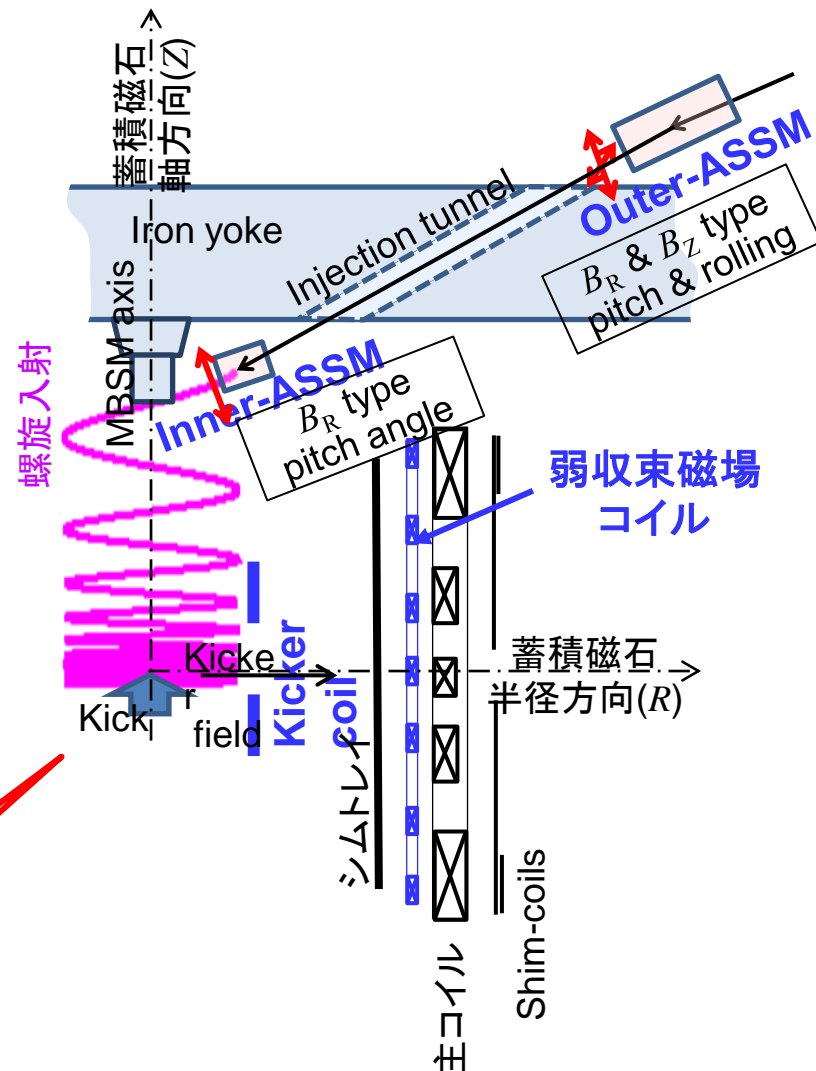
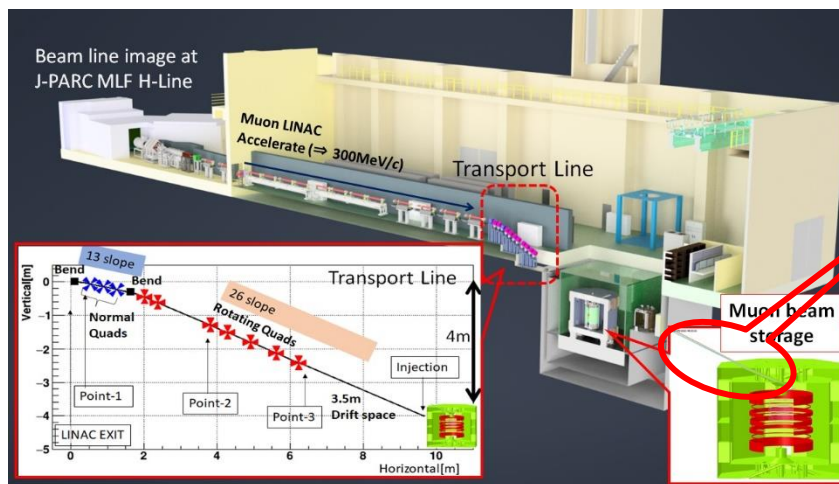


5.3. Muon入射&蓄積関係の磁場発生機器

Muonビームは

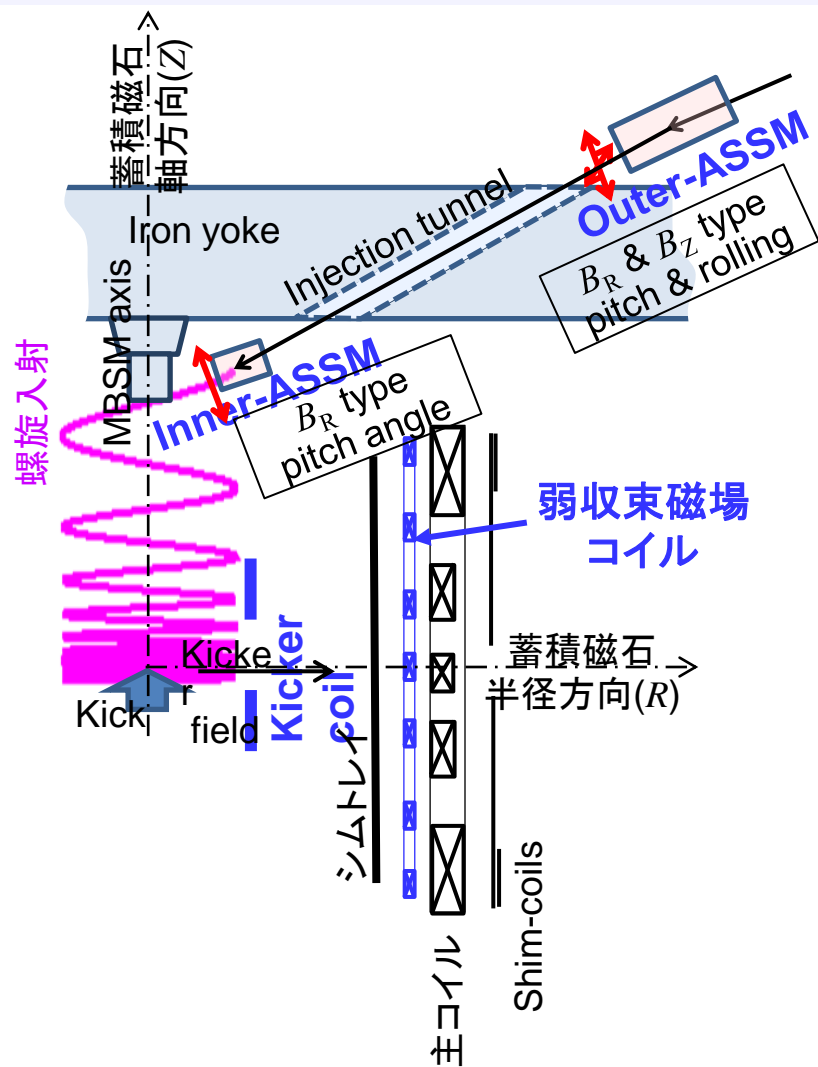
Linac→Transport line→Injection tunnel
を經由して、らせん入射軌道に入ってくる。

- ・螺旋入射軌道微調整に2つの
ASSMs (inner-ASSM, outer-ASSM)
 - ・らせん軌道で降りてくるMuonを止める
Kickerコイル
 - ・Muonの上下位置を維持する
弱収束磁場コイル
- を用意する計画で設計を進めている。



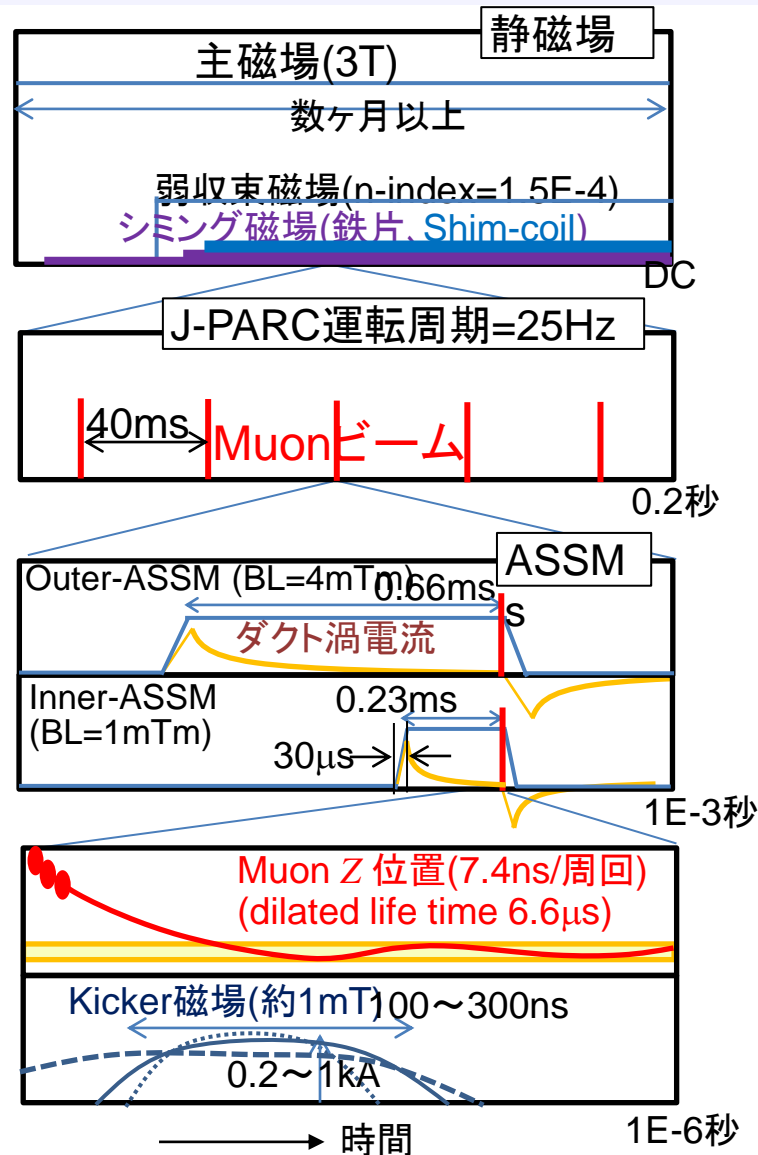
ビーム蓄積磁石内のコイル・磁石配置模式図

5.3. Muon入射&蓄積関係の磁場発生機器 (2)



ビーム蓄積磁石内のコイル・磁石配置模式図

ASSM: Active Shield Steering Magnet



各磁場の動作タイミング概念図

5.3. Muon入射&蓄積関係の磁場発生機器 (3)

Muon螺旋入射関連磁石(コイル)の仕様

Muon蓄積磁石内で磁場をつくる磁石・コイルは下記のものであるが、**青色文字**は直接に螺旋入射に関連しMuon軌道を調整。以下では順次説明する。

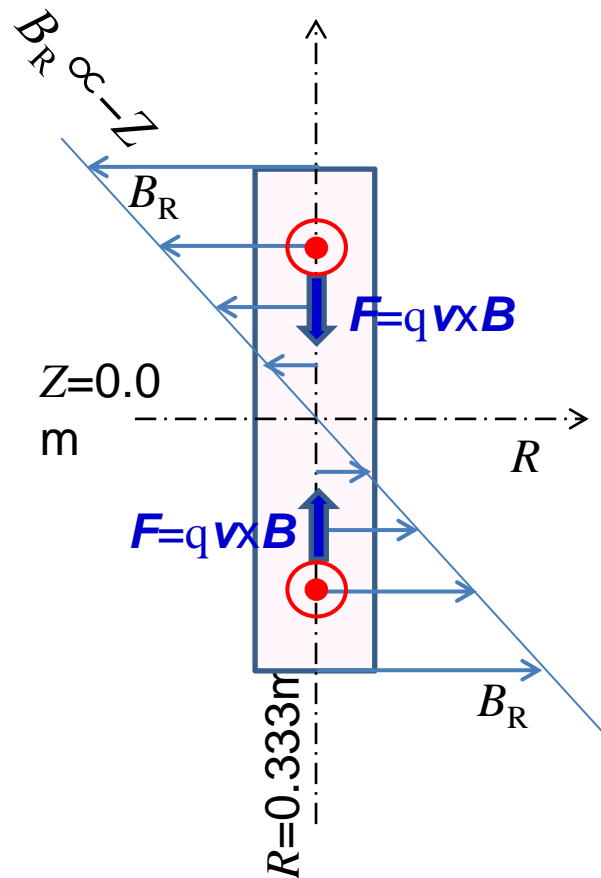
表 静磁場関係

コイル・磁石	機能	仕様
主磁場コイル (超電導、永久電流)	(i) Muon蓄積領域一様強磁場 (ii) Muon軸方向移動を減速	(i) $3.0\text{ T} \pm 0.3\mu\text{T}$ (ii) $B_R \geq 0$
受動的シミング (強磁性体、鉄片など)	Coarseシミング	10ガウス程度の磁場調整可能、 $<6000\text{cc}$, Max.35000cc、トレイ操作に上蓋の開閉有り
	Fineシミング	0.1ガウスレベルの磁場調整、 $<100\text{cc}$, Max.2000cc 常時開口のシムトレイ操作作用穴を持つ
シムコイル (超電導、電源駆動)	B_R -type: B_R 周回方向分布補正	一様、1回・2回対称、最大7ガウス
	B_Z -type: B_Z 周回方向分布補正	一様、1回・2回対称、最大3ガウス
弱収束磁場コイル (WFFC)(超電導、電源駆動)	$(B_R \propto Z)$ の収束磁場を発生	$B_R = -n(B_Z^0/R_0)Z$ $B_Z = -n\frac{B_Z^0}{R_0}\{(R - R^0) + \frac{Z^2}{2R^0}\} \pm 0.3\mu\text{T}$

表 25Hzパルス磁場関係

コイル・磁石	機能	仕様
Outer-ASSM	muon軌道角(2D)・入射穴出口位置調整	$200\text{mm}\Phi$ - 400mm 長以内、 $<10.0\text{W}$, $BL=4.0\text{mTm}$
Inner-ASSM	muon軌道上下角・軸方向移動速度調整	$100\text{mm}\Phi$ - 200mm 長以内、 $<1.0\text{W}$, $BL=1.0\text{mTm}$
Kickerコイル	B_R パルス磁場でmuon軸方向移動を停止	± 1 ターン、薄板円筒導体、放射冷却のみ

5.3.1. 弱収束磁場



弱収束磁場とMuonの運動
蓄積領域

WFFC: $B_R \propto Z$ の半径方向磁場の磁場を発生し, Muonを蓄積領域に閉じ込める。超電導の主コイルの内側に配置し、超電導+電源給電で動作する。

起磁力源の無いところでは、

$$\frac{\partial B_R}{\partial Z} = \frac{\partial B_Z}{\partial R}$$

であり、近似的に、

$$B_Z(R) \propto R^{n-index},$$

$$n-index = -\frac{R_0}{B_{Z0}} \frac{\partial B_Z}{\partial R}$$

とし、WFFCが作る磁場の目標磁場を、

$$B_R^{TG} = -\frac{B_{Z0}}{R_0} Z(n-index)$$

$$B_Z^{TG} = (n-index) \left\{ \frac{B_Z^0}{R^0} (R^0 - R) + \frac{B_Z^0}{R^0} \frac{Z^2}{2R^0} \right\},$$

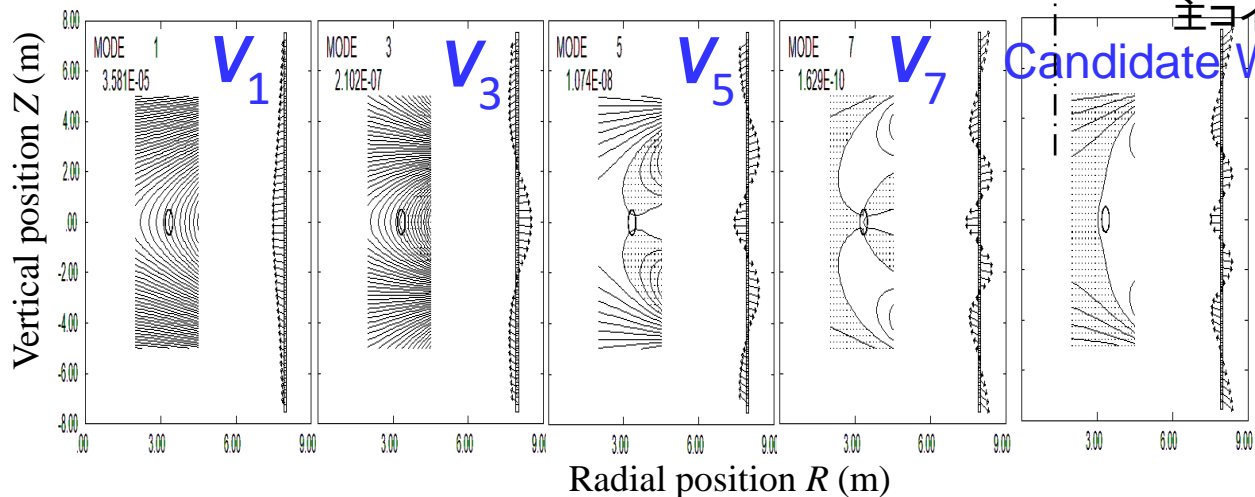
として起磁力配置を決める(円筒座標)。

弱収束磁場コイル(WFFC)の磁場

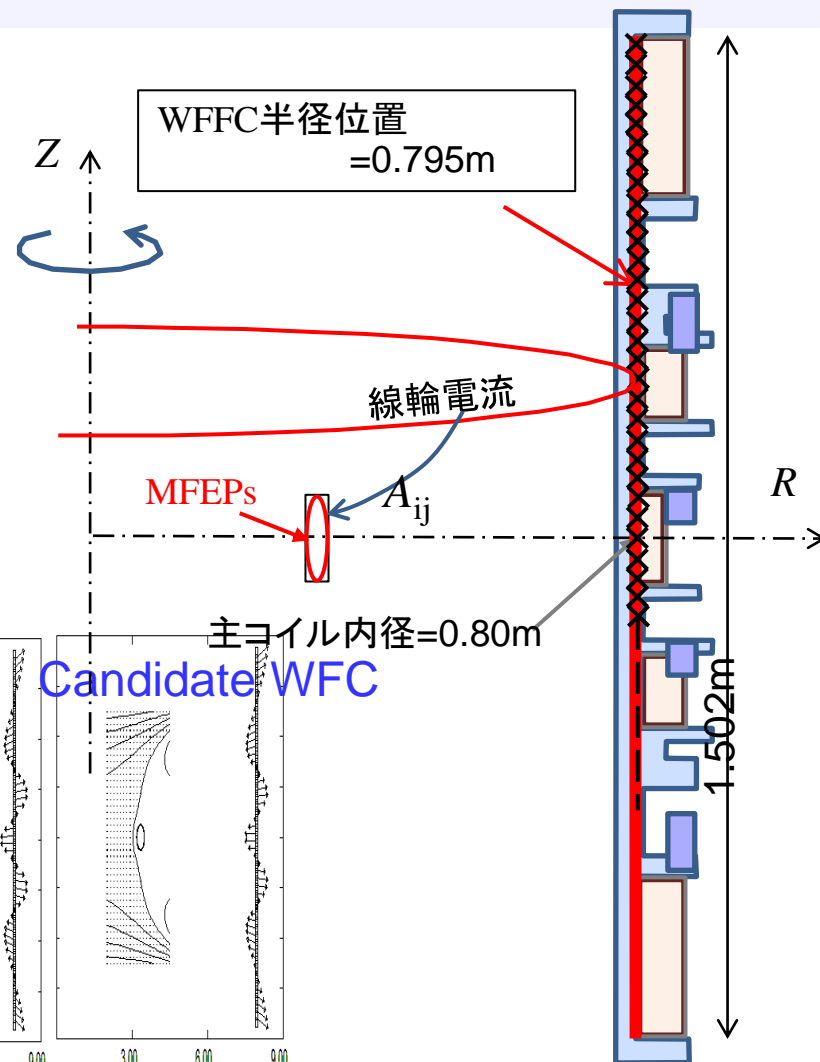
5.3.1. 弱収束磁場 (2)

1. 応答行列 \mathbf{A} を右体系で計算
 B_Z 成分に対する行列で設計している
2. 特異値分解 $\mathbf{A} = \sum \mathbf{u}_k \lambda_k \mathbf{v}_k^t$ 実行
3. 逆行列は $\mathbf{A}^{-1} = \sum \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t / \lambda_k$,
4. $\mathbf{I}_k = \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG} / \lambda_k$,
5. 固有モードの加算で WFFC 候補案

$$\mathbf{I} = \sum_1^{M_T} \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^t \mathbf{B}^{TG}}{\lambda_k}$$



WFFC用磁場のSVD固有モード(CBs数50個)



Candidate WFC

WFFC-CBs(Coil Blocks)配置

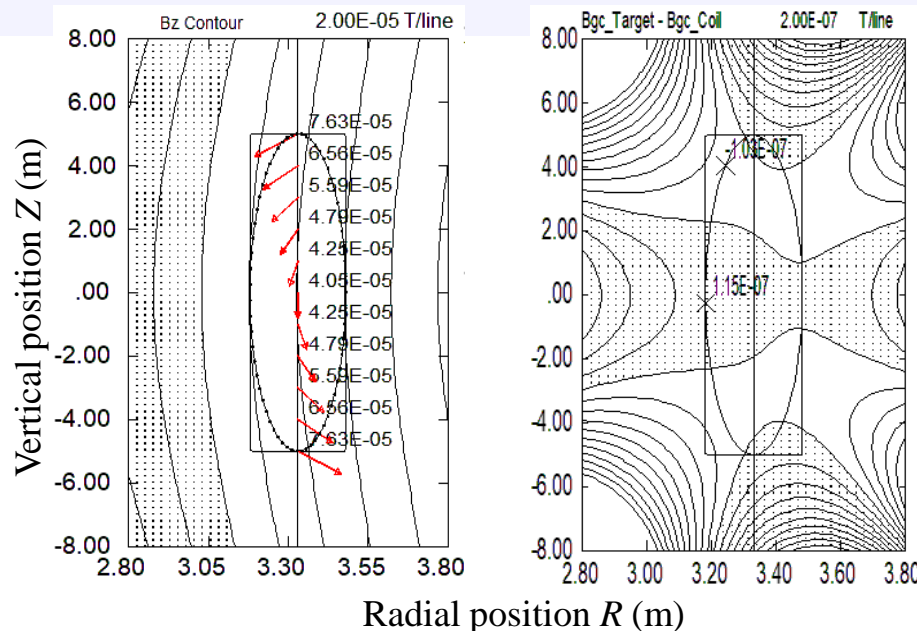
弱収束磁場コイル(WFFC)配置検討

5.3.1. 弱収束磁場 (3)

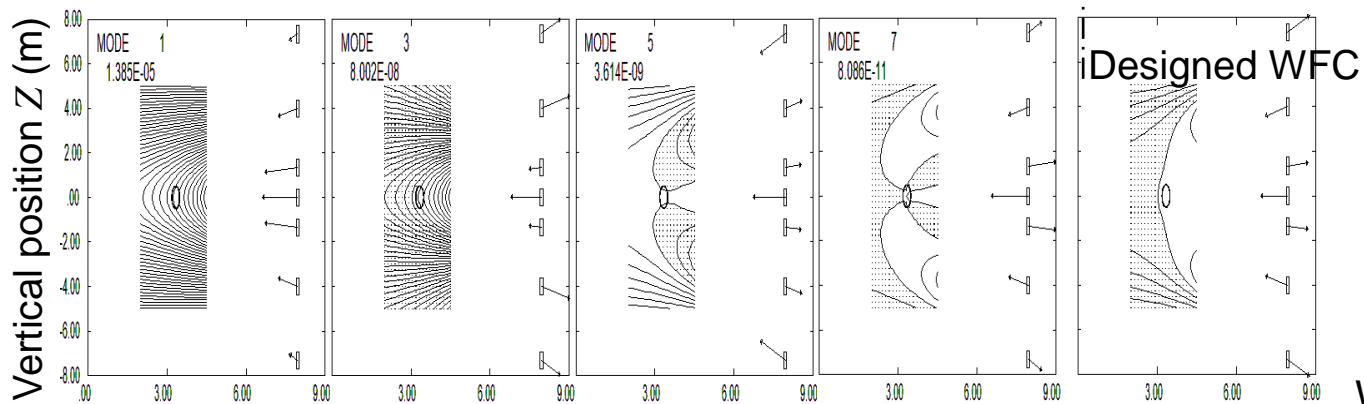
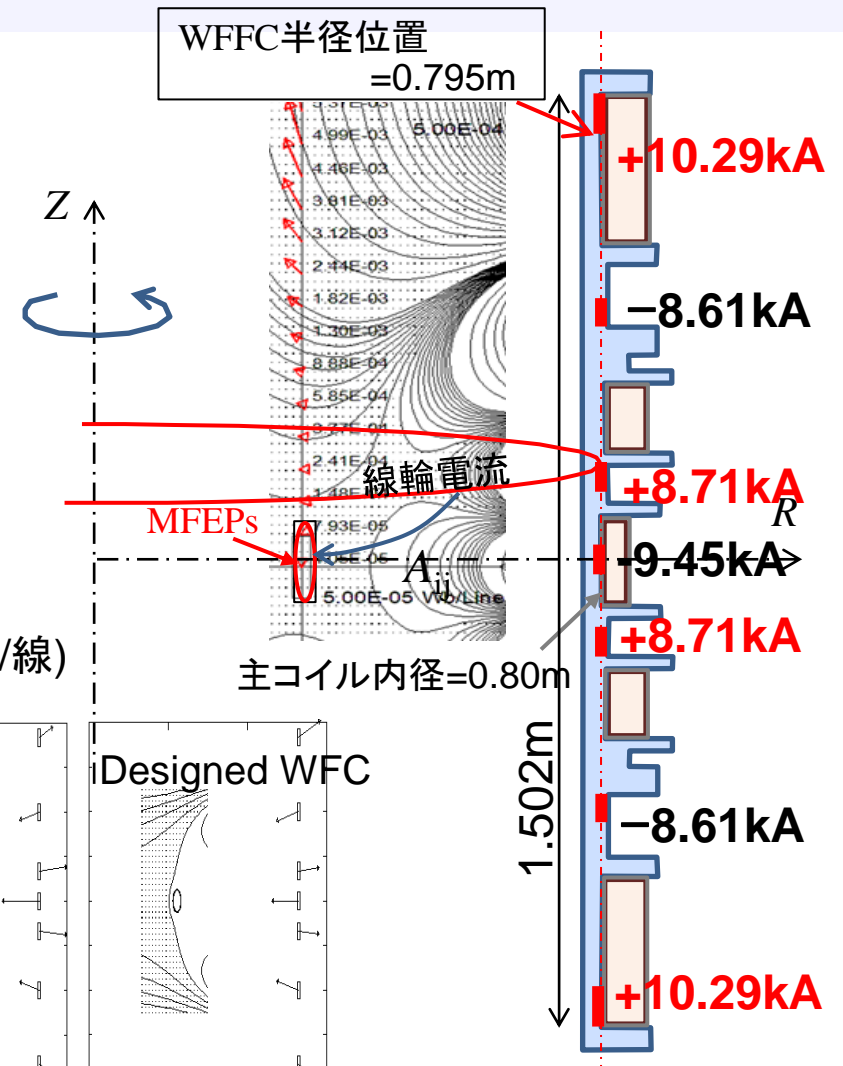
Table WFFCの使用固有モード検討

ケース	加算割合					線輪電流50本		線輪電流7本	
	固有mode番号					残差 B_Z^{RE} (0.1 μ T)	合計 電流 (kA)	残差 B_Z^{RE} (0.1 μ T)	合計 電流 (kA)
	1	3	5	7	9				
1	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-44.3 ~ +57.2	3.43	-44.5 ~ +57.5	3.47
2	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	-22.0 ~ +30.2	8.12	-22.3 ~ +30.6	8.71
3	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	-4.11 ~ +3.90	15.49	-3.85 ~ +3.66	17.74
4	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	-2.18 ~ +2.38	42.50	-2.08 ~ +2.26	36.32
5	1.0	1.0	1.0	0.9	0.0	-1.04~+1.16	74.96	-1.03~+1.15	62.02
5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	-0.856~+0.825	83.16	-0.838~+0.872	68.51
7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	-0.112~+0.125	699.5	No.	No.

5.3.1. 弱収束磁場 (4)



Radial position R (m)
 B_z 等高線(20 μ T/線) 残差磁場等高線(0.2 μ T/線)

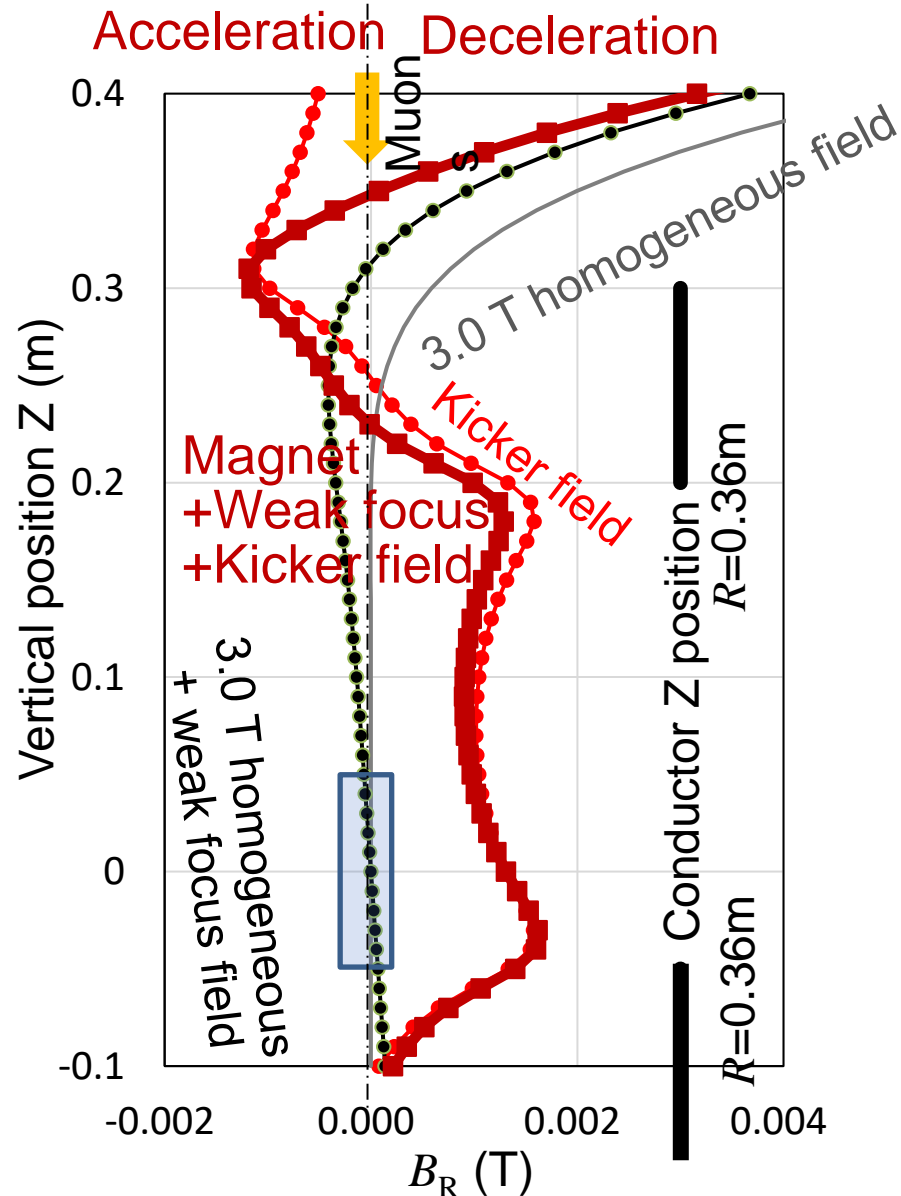


Radial position R (m)
 WFFC用磁場のSVD固有モード(CBs数7個)

WFFC-CBs(Coil Blocks)配置。
 0.2mm設置誤差($Z=0$ のCB)
 は $\pm 3.5\mu$ Tの誤差磁場

弱収束磁場コイル(WFFC)配置検討: 現在案

5.3.2. キッカーコイル

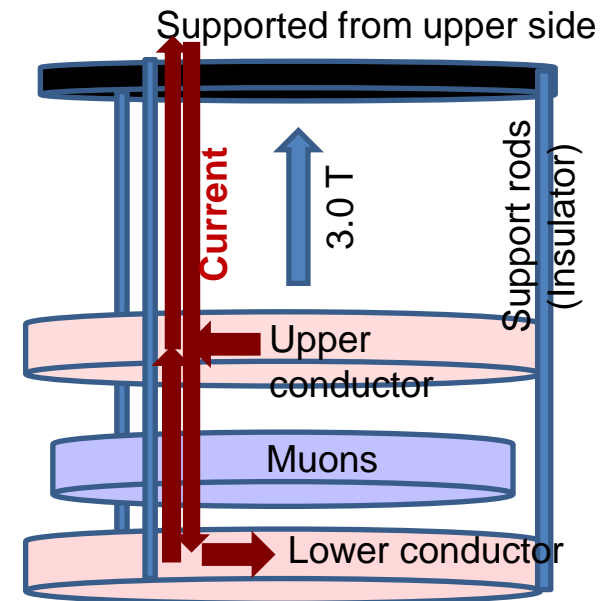


常伝導 + 高圧電源 (~25kV)

Type-11 Kicker

0.2 ~ 1.0 kA, $R=0.333\text{m}$

(Current is not yet fixed)



合計磁力: <100g程度

インダクタンス = $2.02\mu\text{H}$

発熱量: 0.17W (1kA, $200\text{ns} \times 25\text{Hz}$)

温度上昇 < 0.3K 、 $\epsilon=0.1$ の輻射のみ

5.3.3. 能動磁気遮蔽型ステアリング磁石

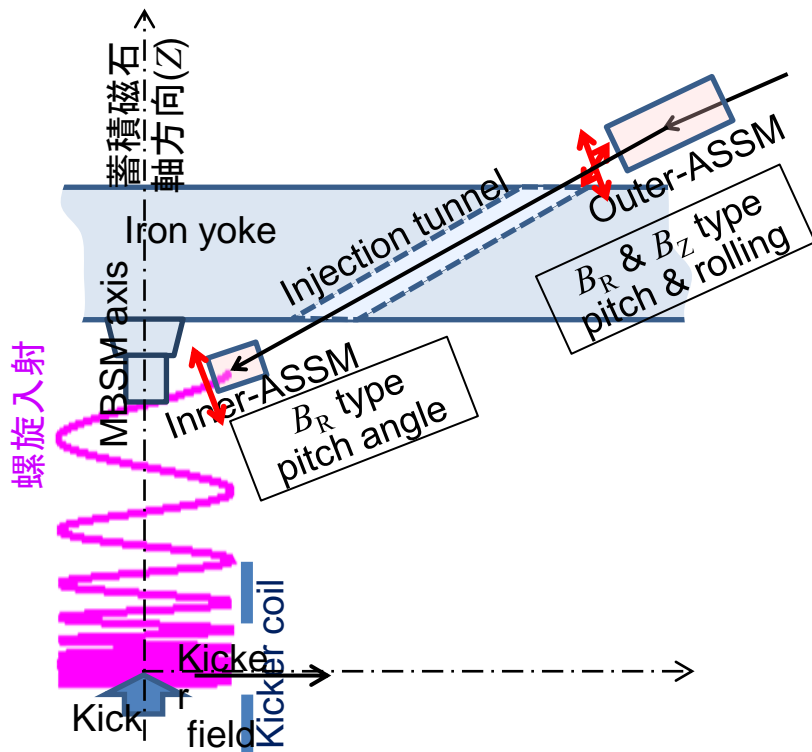
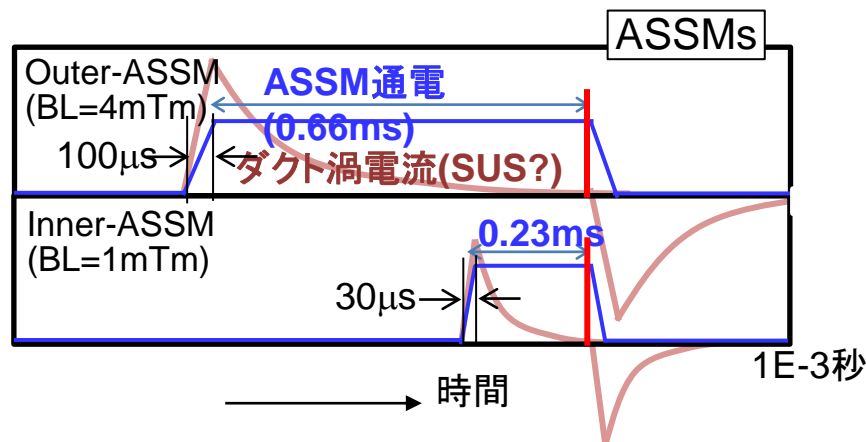
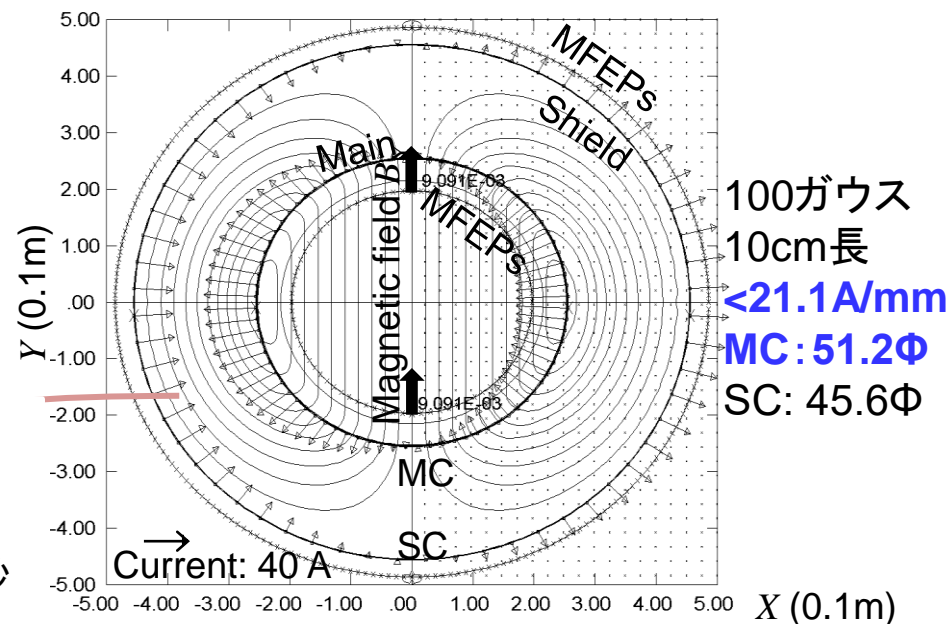


Table ASSMの目標設計仕様(常伝導)

パラメータ		Inner-ASSM	Outer-ASSM
BL積 (Tm)		1.0E-3	4.0E-3
調整方向		Pitch	Pitch, rolling
磁気シールド (μT)		< 1.0 at 0.2m	< 1.0 at 0.3m
抵抗発熱 (W)		<1.0	<10.0
Beam ダクト	外径 (mmΦ)	42.7	89.1
	壁厚 (mm)	1.5	2.1
	材質	TBD (Temporary SUS)	
	渦電流減衰時間	0.0575 ms	0.166 ms
許容サイズ (mm)		<100Φx200L	<200Φx400L



ASSM: Active Shield Steering Magnet



Inner-ASSMの2D設計結果(磁力線分布)

5.3.3. 能動磁気遮蔽型ステアリング磁石 (2)

2D設計結果を受けて、3D磁場設計

電流ポテンシャル T と三角要素で、曲面上の電流分布を表現する。

$$\mathbf{J} = \{T_1(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) + T_2(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) + T_3(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)\} / (2S)$$

For CCS1(主コイル)

$$T = T_0 \sum_{l=1}^{l=4} C_l \sin\{(2l-1)\theta\} \quad [A],$$

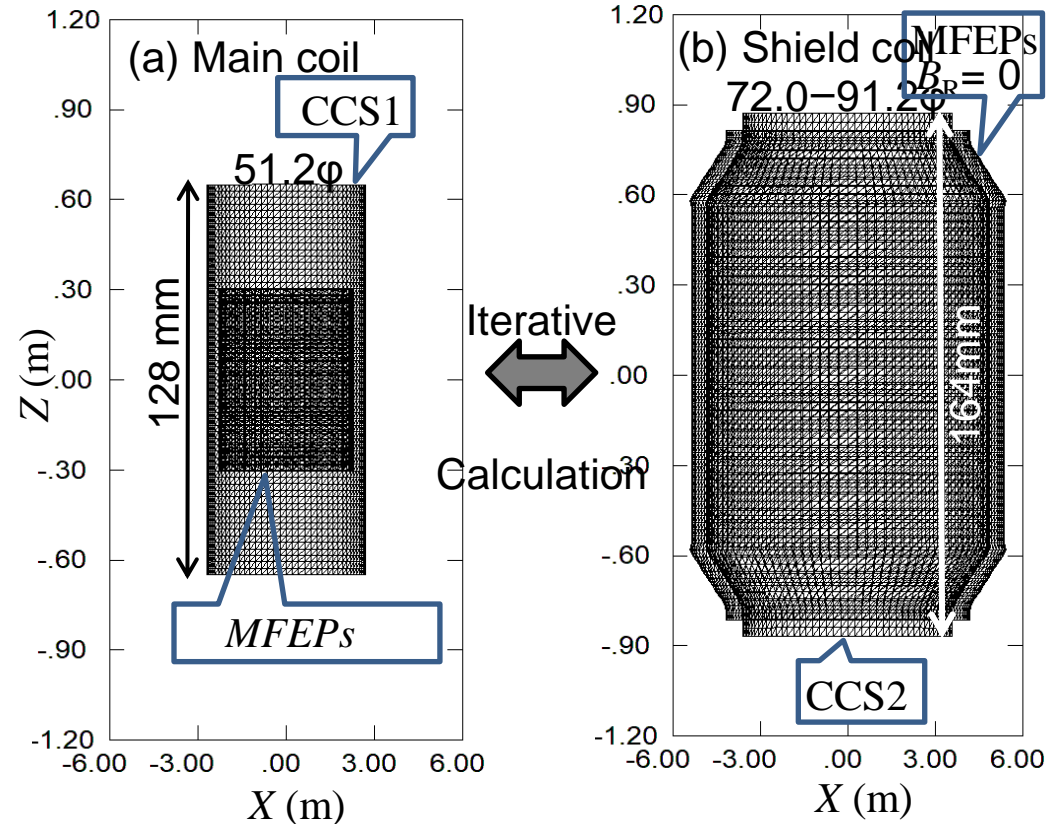
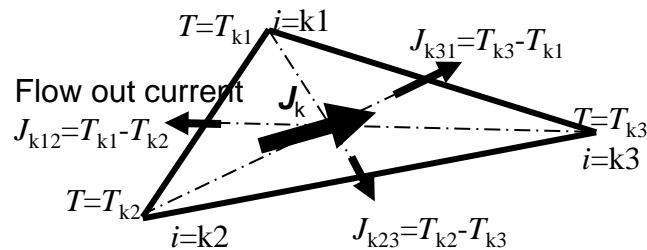
$$\left| \frac{dT}{dz} \right| = 20.8 \text{ (kA/m)},$$

目標磁場 $B=0.01\text{T} \rightarrow BL=1.0\text{mTm}$

$$BL = \int_{-0.2}^{+0.2} B_y dl \quad (\text{T}\cdot\text{m})$$

For CCS2(シールドコイル)

$$B_R = 0,$$

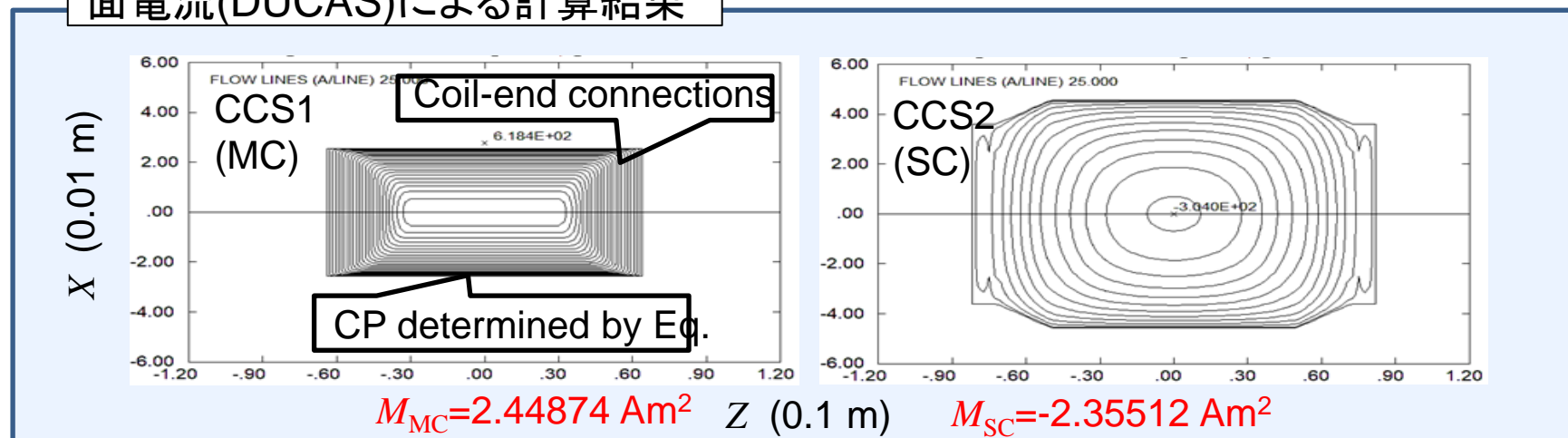


DUCAS利用: M. Abe, et. Al, "A new technique to optimize coil winding path for the arbitrarily distributed magnetic field and application to a helical confinement system", Phys. Plasmas. Vol.10, No.4, pp. 1022-1033, (2003).

Figure: Computational model for inside-ASSM 3D magnetic design. Numbers are diameters of current carrying surfaces (CCS). Shield CCS is squeezed at edge to reduce leak field.

5.3.3. 能動磁気遮蔽型ステアリング磁石 (3)

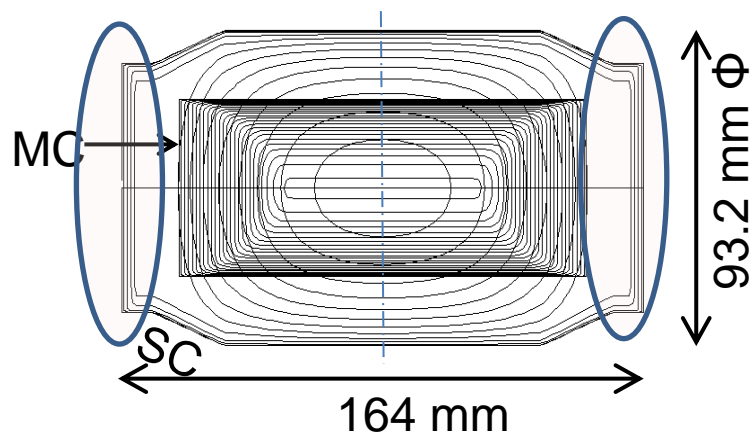
面電流(DUCAS)による計算結果



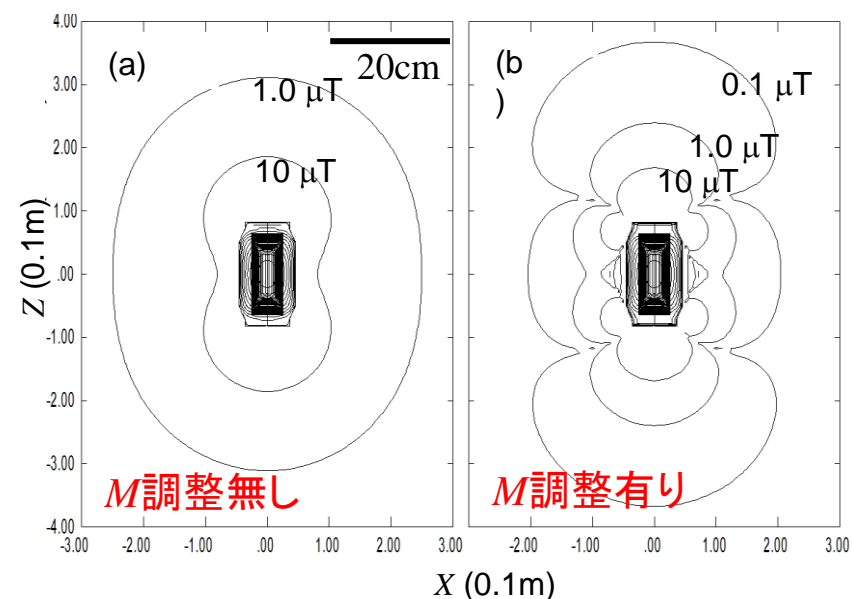
25A毎に等高線を抽出,線電流/導体配置。

$$T_n = 25.0 \times (n - 0.5) \text{ (A)},$$

ただし、SC端部を利用し、 $M_{SC} = -M_{MC}$ に調整

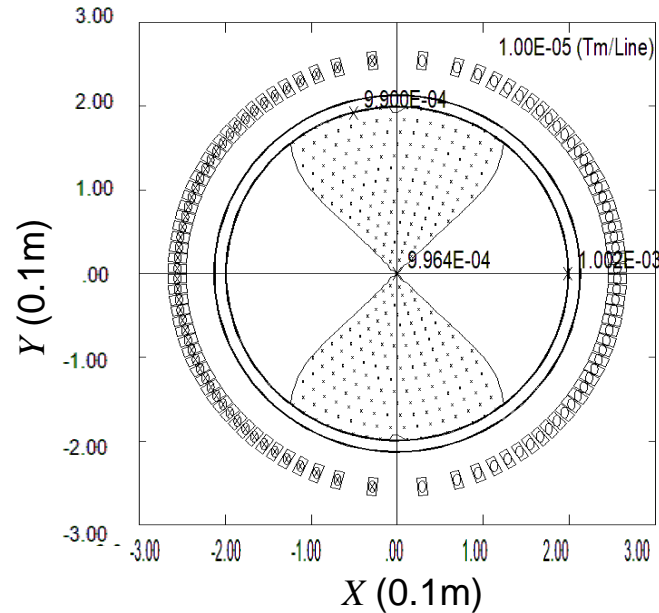


Inner-ASSMの3D磁場設計結果(導体配置)



磁気モーメント(M)を調整して漏れ磁場低減

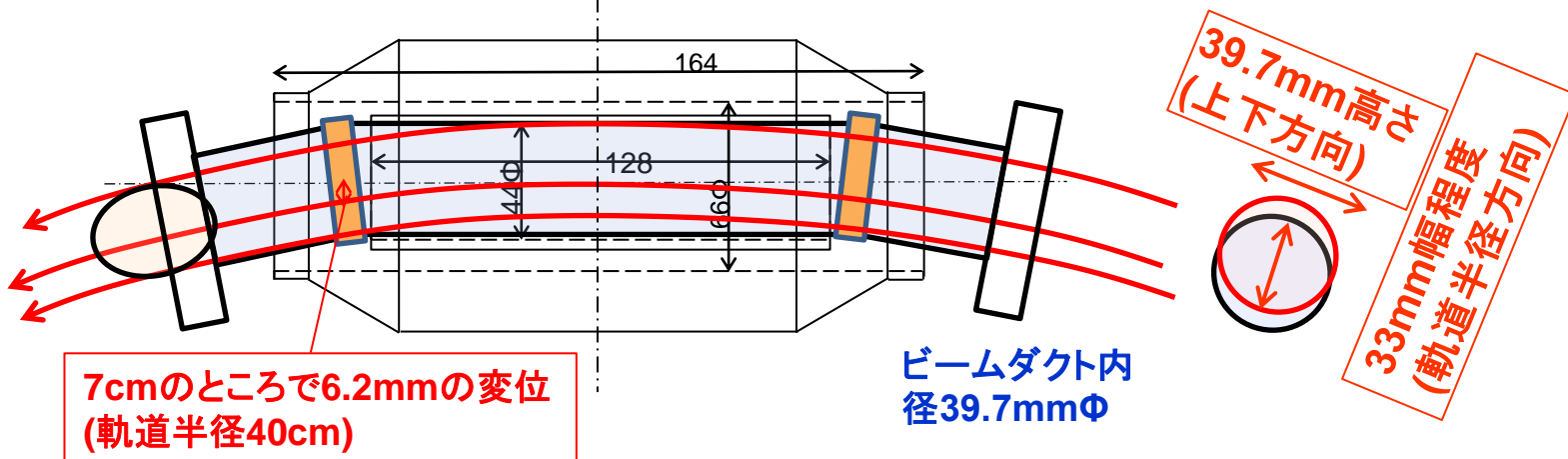
5.3.3. 能動磁気遮蔽型ステアリング磁石 (4)



ASSM断面内のBL積分布
(中心: 0.996mT, 等高線: 0.1mTM/線)

Table. Magnetic parameters of inner-ASSM

Parameter		2D design	3D design
Conductor current (A)		25.0	25.0
Number of turns		±22/12	±25/12
Conductor (mm)		Cu 1.0x2.0	Cu 1.0x2.0
Max. current density (A/mm)		21.1	20.8
BL product (T·m)		1.0E-3	0.996E-3
EM Induction	Magnetic energy (J)	0.0189	0.0322
	Inductance (μH)	60.4	100.3
	Inductive voltage (V)	50.3	86.0
Joule loss (25Hz pulse)	Resistance (W)	0.153	0.222
	Resistive voltage (V)	3.83	5.55
	Joule heat (W)	0.60	0.87
Duct Joule loss (W)		1.0 (rough estimation)	
Current x Voltage		25A x 64.1V	25A x 91.6V



ASSMポアを通過するビームダクトの配置

ビーム通過可能幅

5.4. g-2/EDM磁石磁場設計のまとめ

g-2/EDM磁石の磁場設計について下記の内容・磁場設計状況を説明しました。

5.1. 主磁場 35

(Step-1、Step-2およびStep-3、鉄yoke磁場(3D)の扱い、磁場設計のUpdate、2D再構成磁場と周回方向磁場変動)

5.2. 調整装置 41

(受動磁場シミング、能動的磁場シミング、受動シミングの難しい磁場との関連、受動的磁場シミングと残差磁場)

5.3. Muon入射&蓄積関係の磁場発生機器

(弱収束磁場、キッカーコイル、能動磁気遮蔽型ステアリング磁石)

6. まとめ

g -2/EDM磁石の磁場設計を目標として、下記の項目を説明してきました。

- ・打ち切り特異値分解正則化(TSVD正則化)の計算法
- ・TSVD正則化を利用した例題、
- ・MRI用磁石の設計と設置後の精密磁場調整(シミング)
- ・ g -2/EDM磁石の設計について
TSVD正則化を用いた主磁場(3.0T)起磁力配置設計
鉄yokeのUpdateと磁場設計時の扱い
調整装置として、静磁場のシミング機構、及び、
螺旋入射軌道の調整磁場装置について説明した。

おわり