

超伝導の基礎 II

有本 靖

高エネルギー加速器研究機構

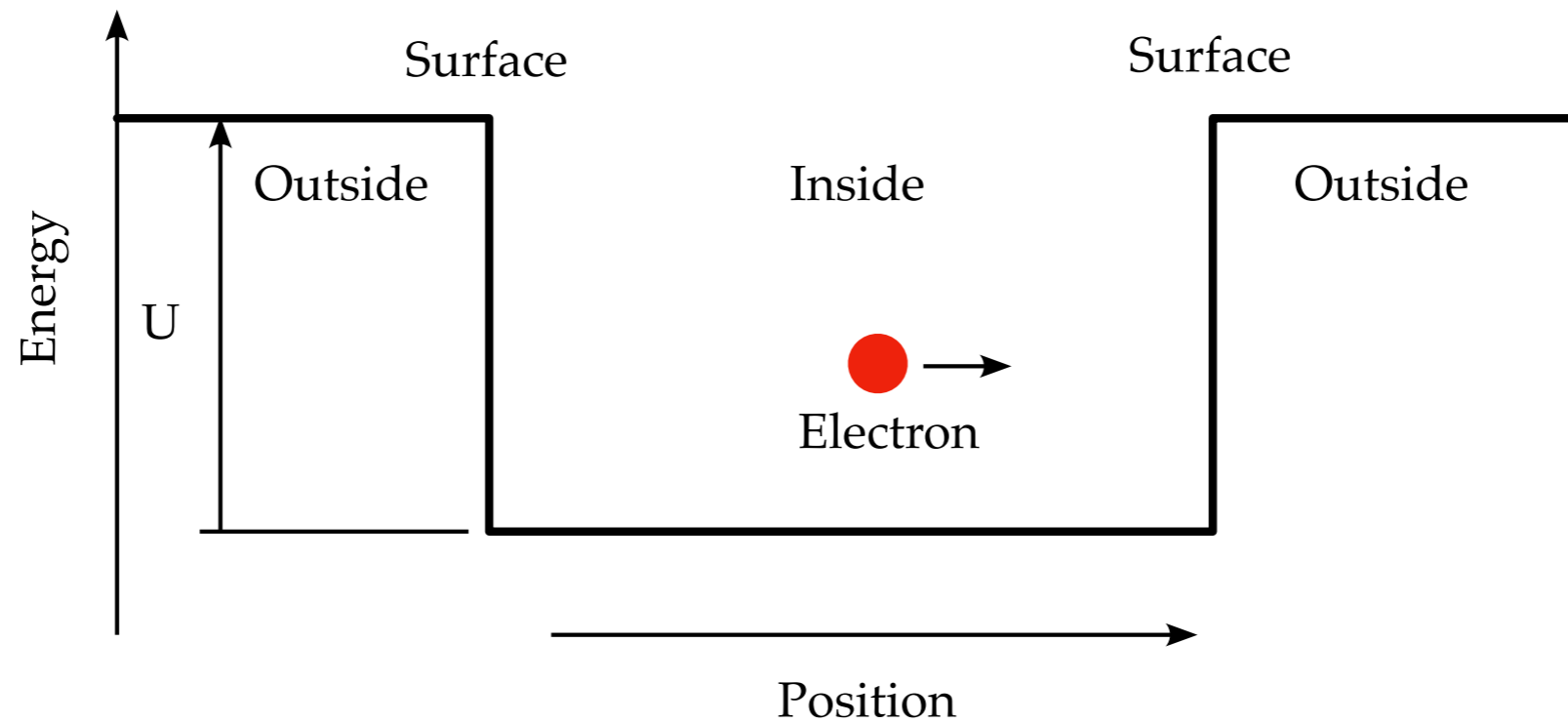
2022-09-06 OHO'22 加速器セミナー

目次

- BCSの基礎概念
- 磁束の量子化
- Josephson効果

BCS理論の基礎概念

金属自由電子ガス



▶ シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

▶ 周期的境界条件：一辺の長さLの立方体結晶. 表面で完全に反射

金属自由電子ガス

▶ シュレディンガー方程式の解

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

$$k_x = \frac{2\pi l_x}{L} \quad (l_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$k_y = \frac{2\pi l_y}{L} \quad (l_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$k_z = \frac{2\pi l_z}{L} \quad (l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

▶ エネルギー固有値

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ &= \frac{h^2}{2m_e L^2} (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) \end{aligned}$$

フェルミ球

- ▶ 電子は1つの状態に最大2つしか入れない
＜パウリの排他律＞

- ▶ エネルギー準位の低い順に電子を詰めていった時の系の電子の最大エネルギー

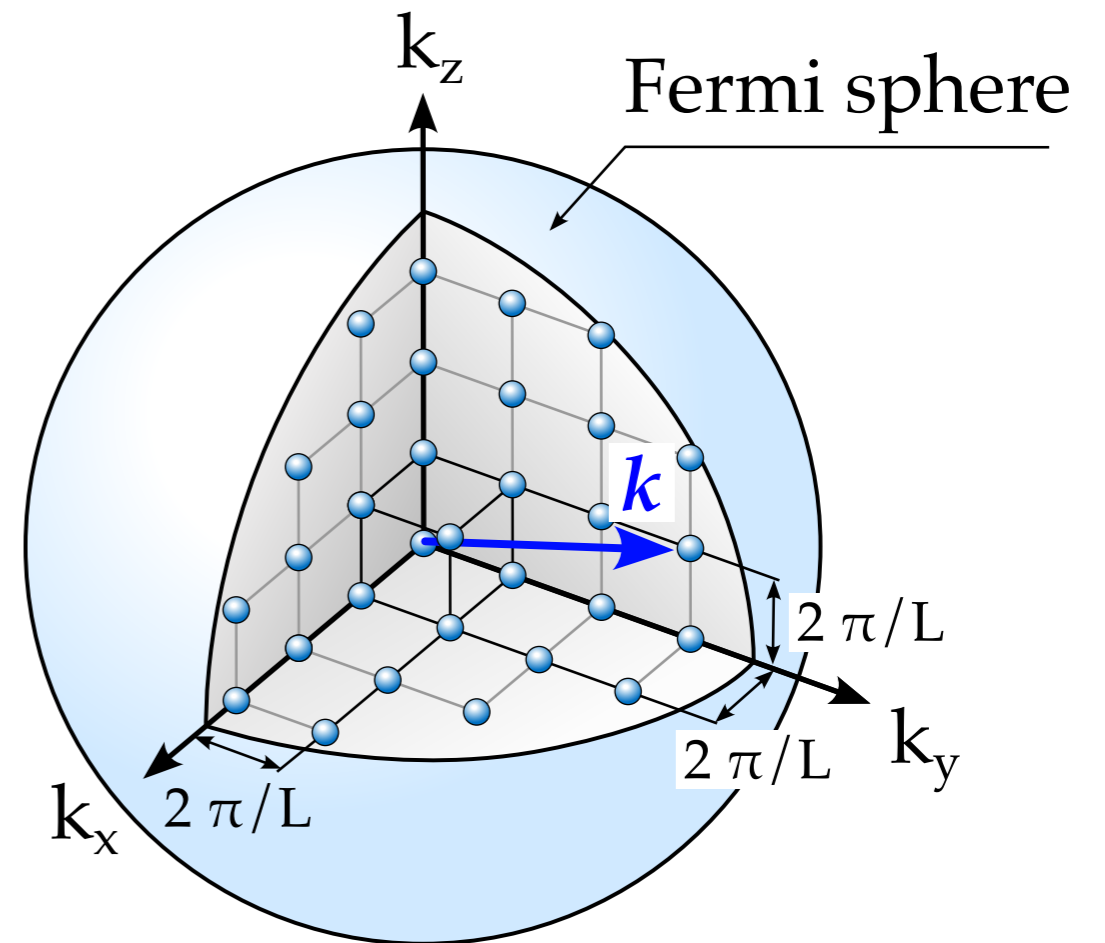
$$\begin{aligned} E_F^0 &= \frac{\hbar^2}{2m_e} k_F^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} \end{aligned}$$

- ▶ Fermi運動量 $p_F = \sqrt{2m_e E_F^0}$

- ▶ 銅の場合のFermi エネルギー

- ▶ $E_F^0 = 1.1 \times 10^{-18} \text{ J}$,

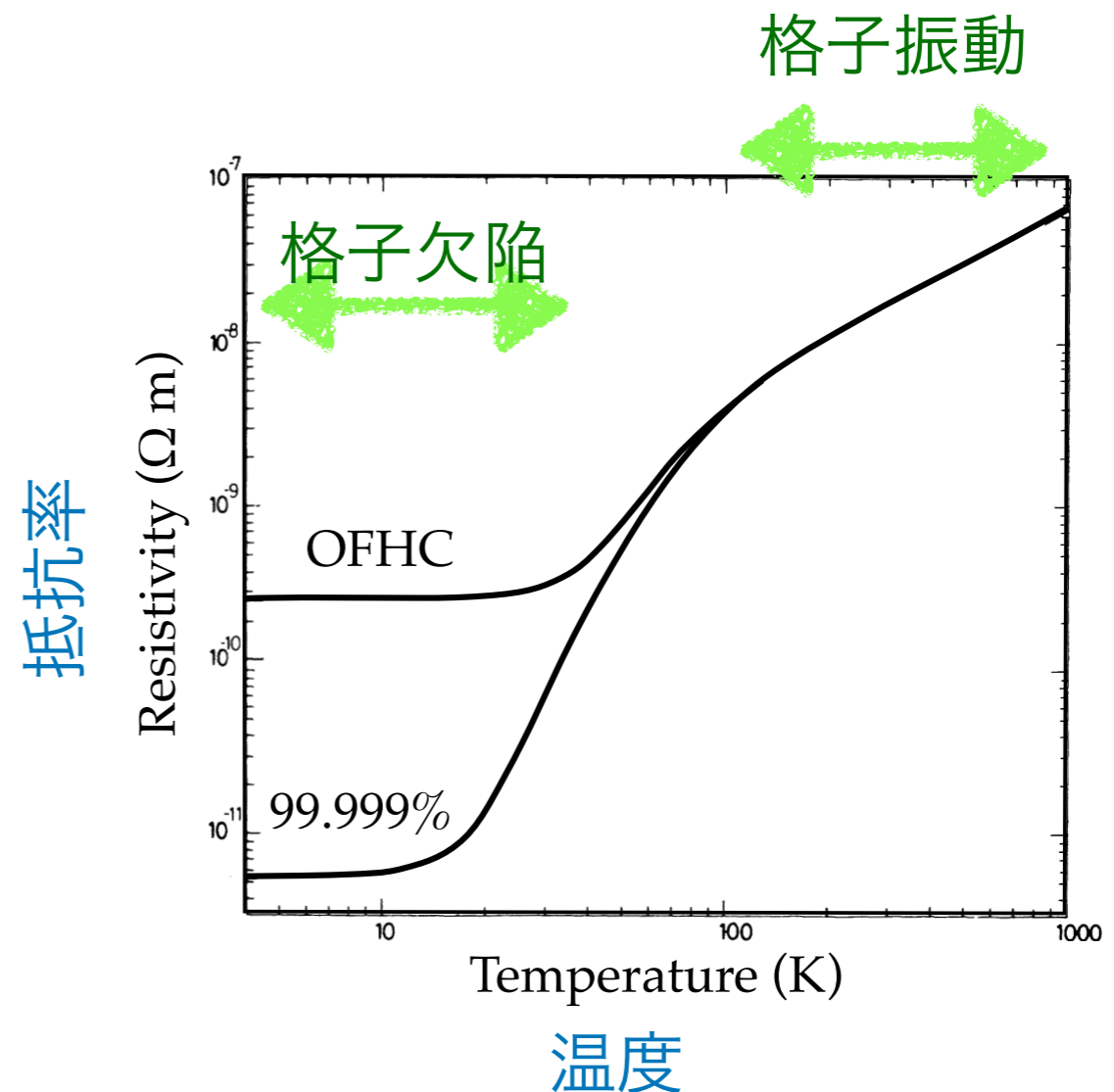
- ▶ $T_F = E_F^0 / k_B = 80,000 \text{ K}$



電気抵抗の起源

- 結晶格子が完全な周期性を持つ場合電気抵抗は零. (量子力学)
- 周期性を乱す要因
 - 格子振動 → 温度を下げると減少
 - * 原理的には $T=0K$ で抵抗は0に
 - 格子欠陥, 不純物等 → 温度を下げても変化しない (常伝導の限界)

銅の抵抗率の温度依存性

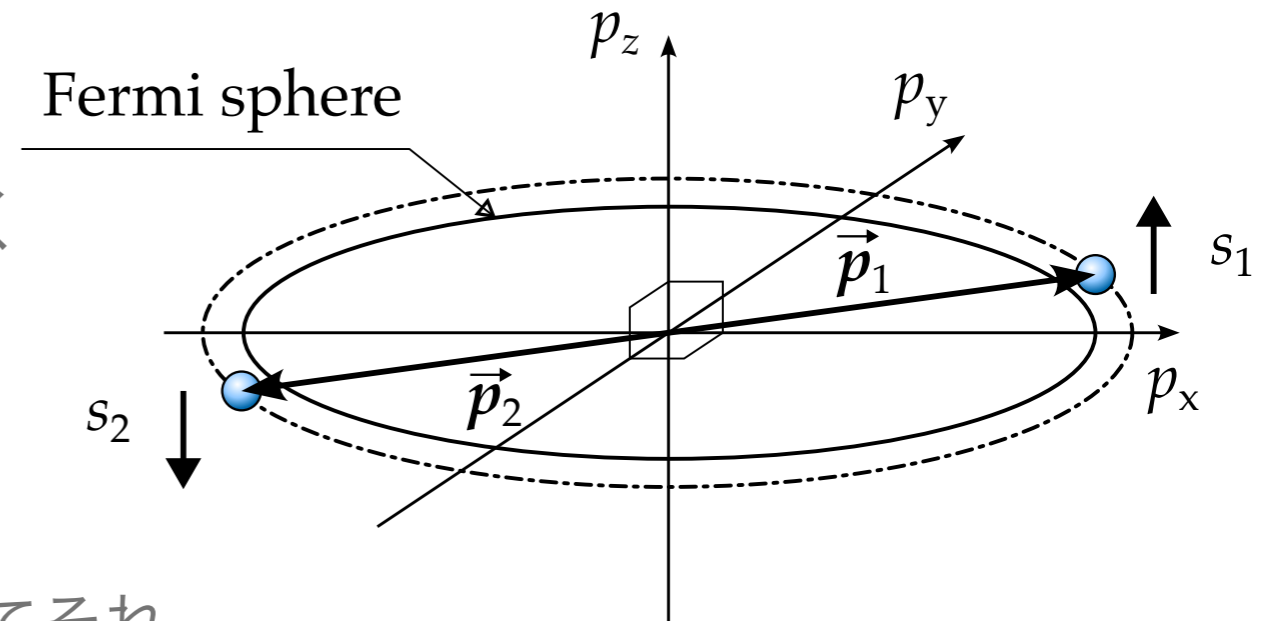


Cooper対

- Cooperのモデル (1956年)
 - $T=0K$
 - Fermi球の内側はすべて電子が占有
 - Fermi球の少し外側に2つの電子をおく

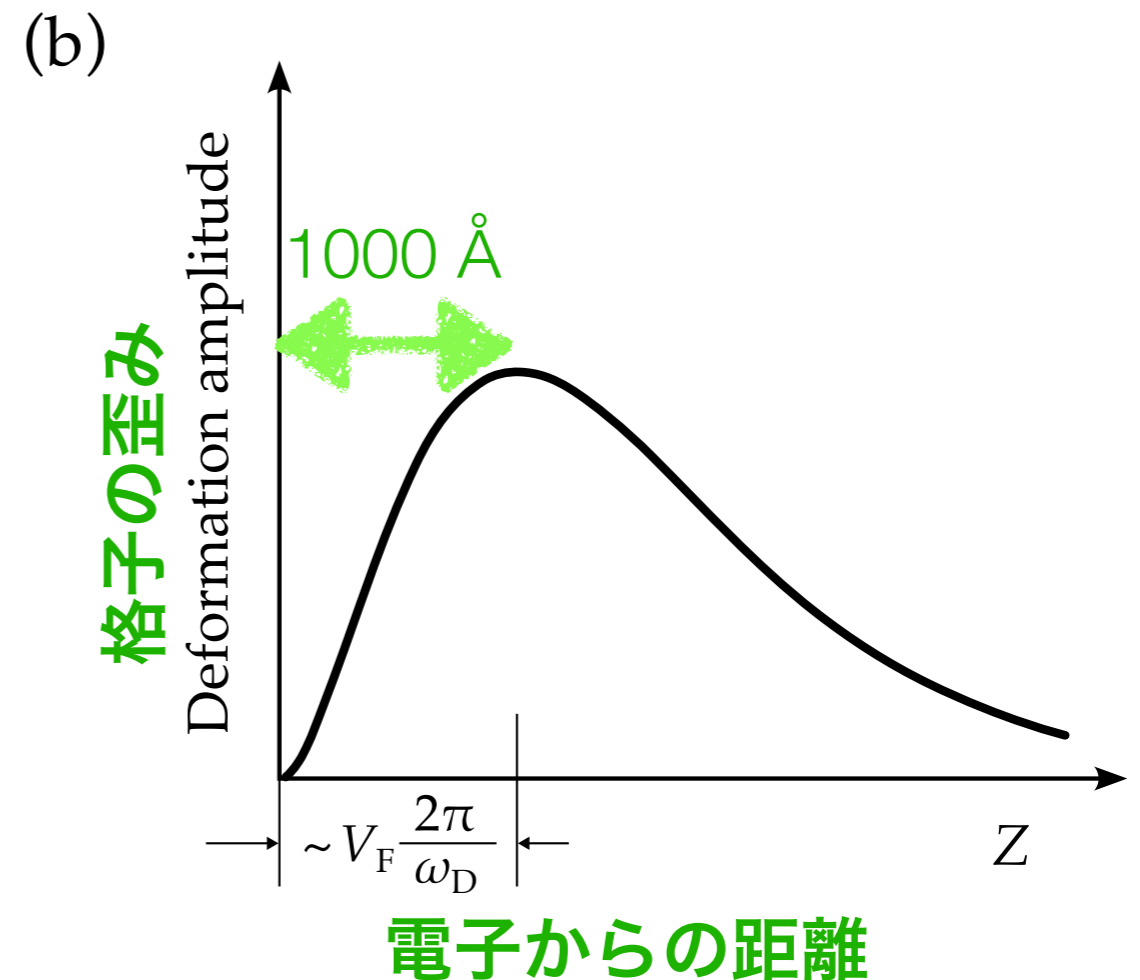
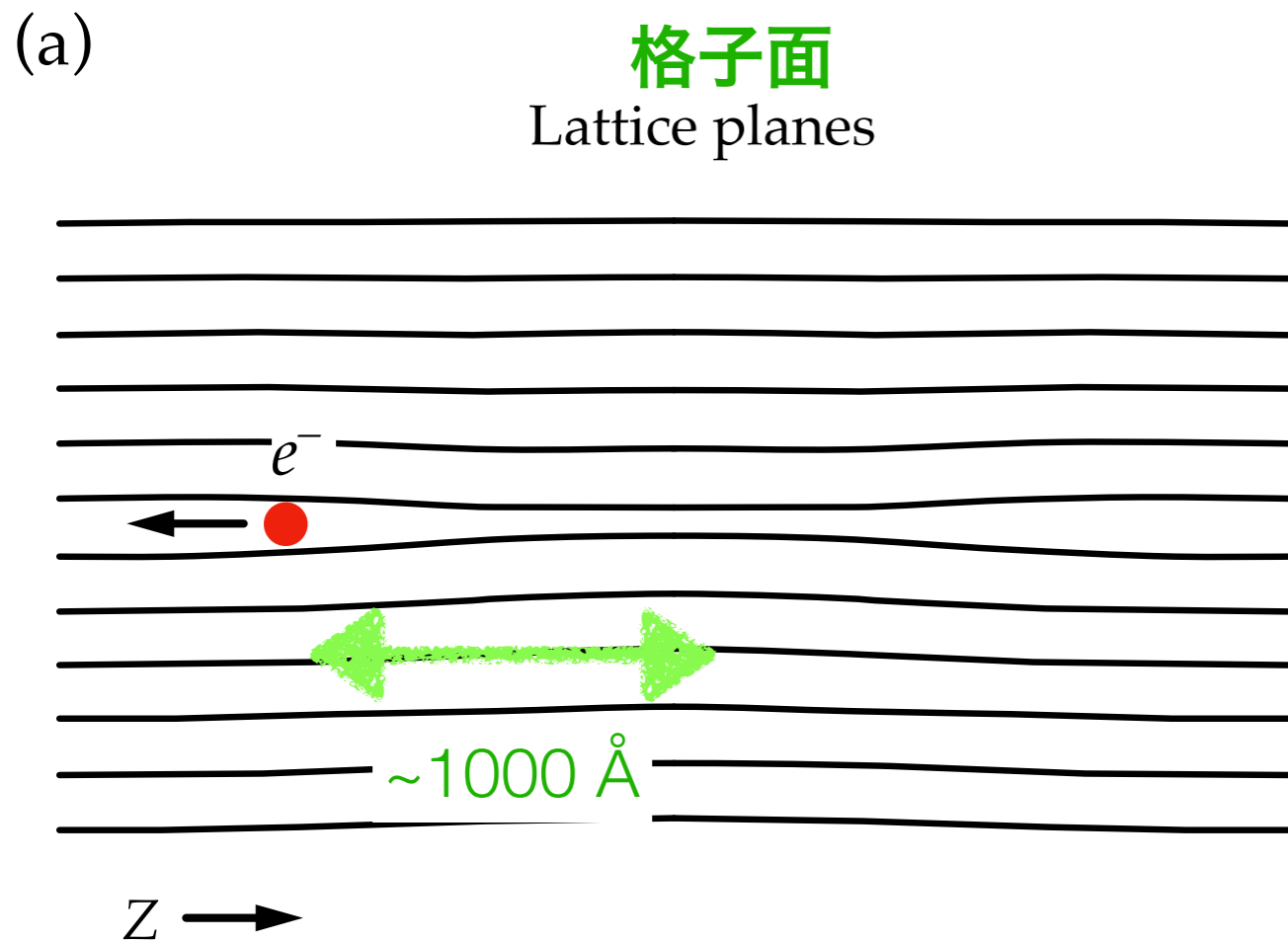
$$* \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

- クーパー問題
 - Fermi面の真上にある2つの電子を考えてそれらの間に相互作用が働くとしたとき, この電子対が束縛状態をつくるか?
 - (答) Yes

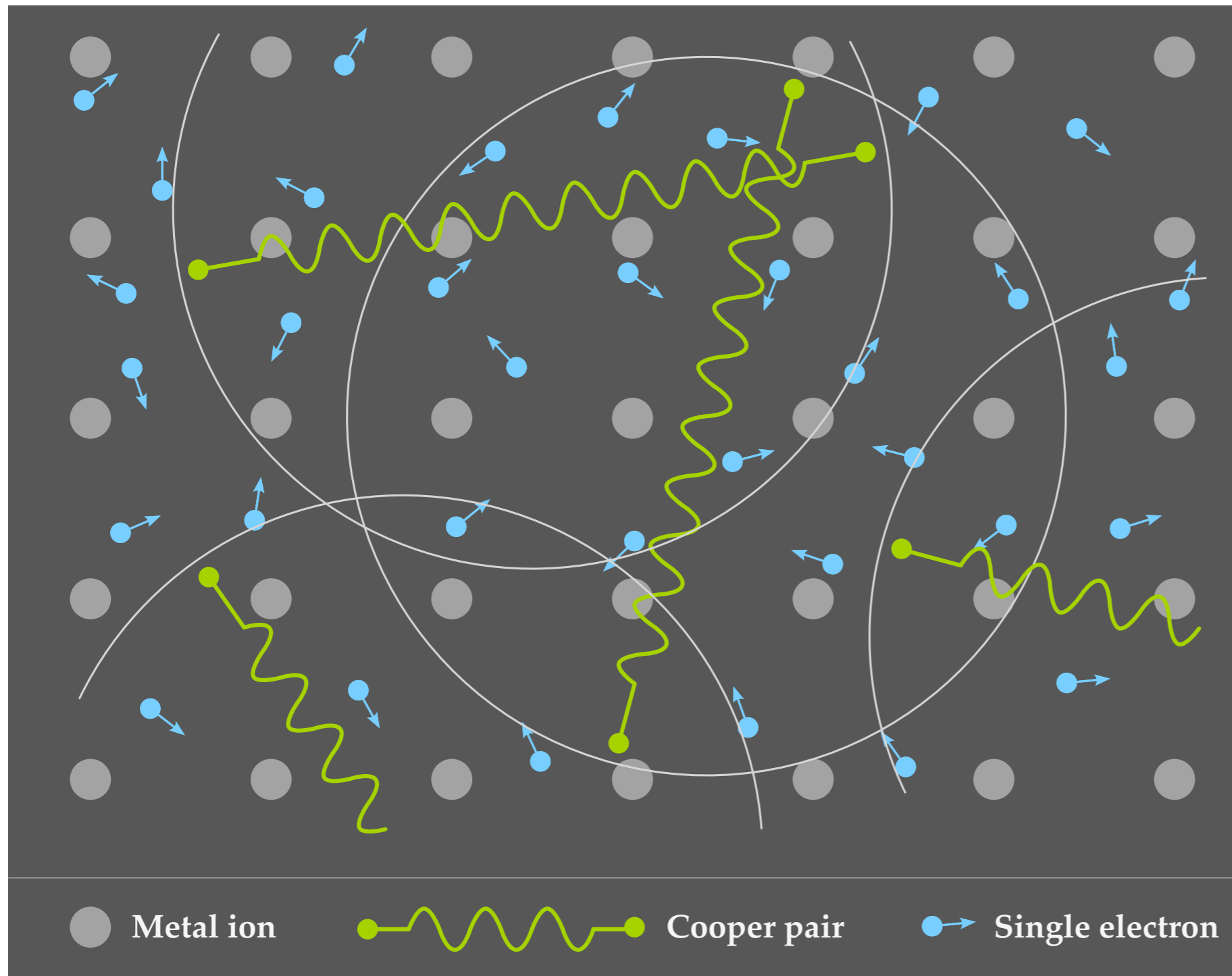


Cooper対

- 電子が固体中を進むと結晶格子のイオンが影響を受ける
- 電子通過後 イオン同士が近づき正の電荷密度が増える.
- 2つ目の電子が引力を受ける



結晶内のCooper対

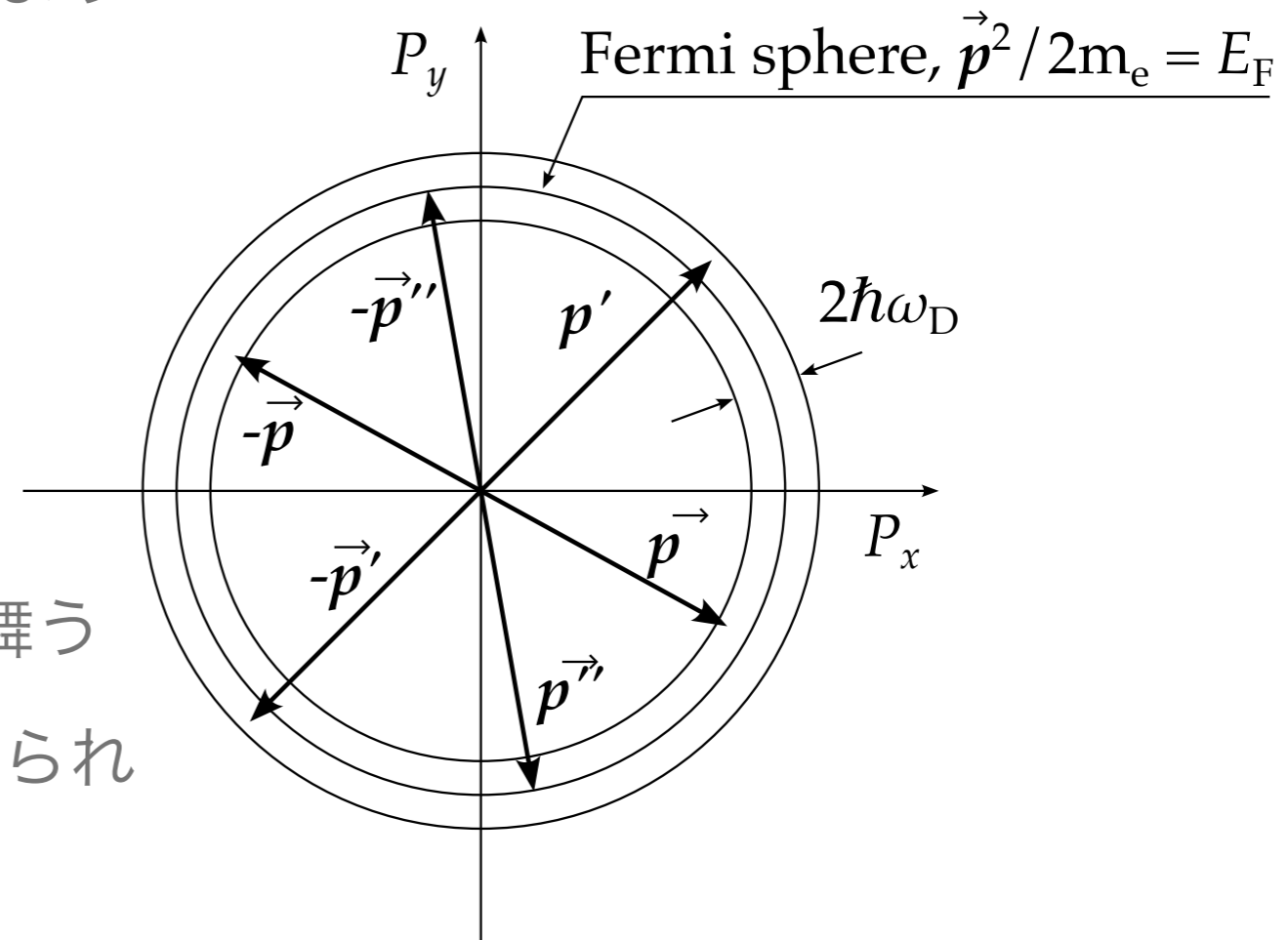


Cooper対は長い距離で結合しており、Cooper対同士は重なり合っている。

Cooper対の結合エネルギーは **$10^{-4} \sim 10^{-3} \text{ eV}$** と非常に低いので熱運動で分解しないように低温を維持する必要がある。

BCSの初歩

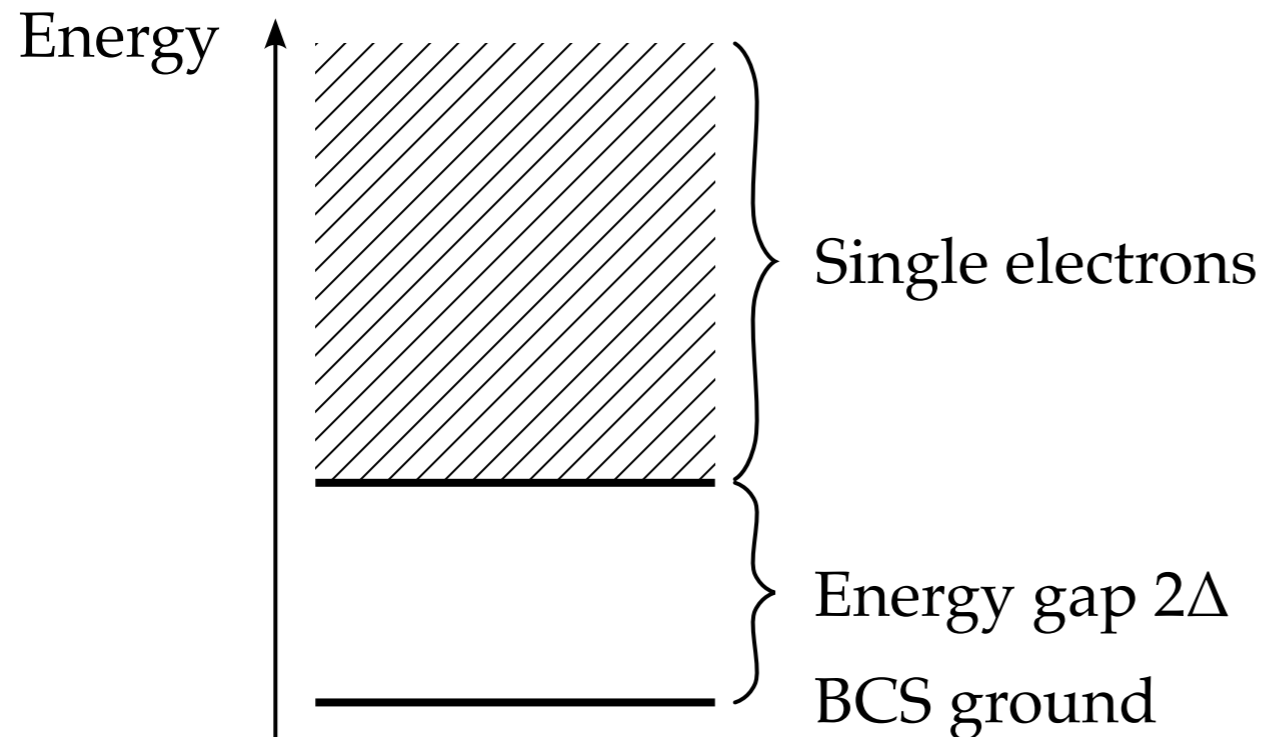
- Bardeen, Cooper, Schrieffer
 - Fermi球内の電子も対になる
- このときの引力は格子振動(フォノン)により与えられる.
- Fermiエネルギー近傍 $\pm 2\hbar\omega_d$
- クーパー対は同じ運動量 $P=0$ を持つ
 - 同じ量子状態に入っている.
 - クーパー対はボーズ粒子として振る舞う
- エネルギーギャップ Δ によって特徴付けられる



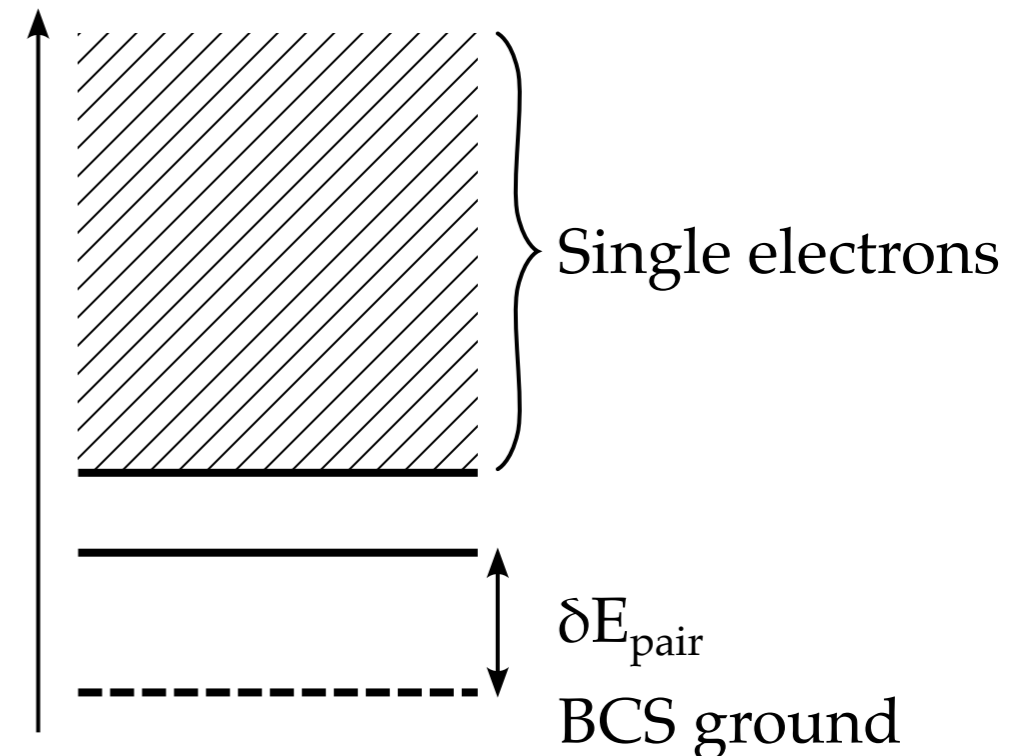
BCSの初歩

- BCS基底状態: エネルギーギャップ(Δ)によって不対電子とエネルギー準位は分離されている.
- クーパー対を分解するには 2Δ が必要.

(a)

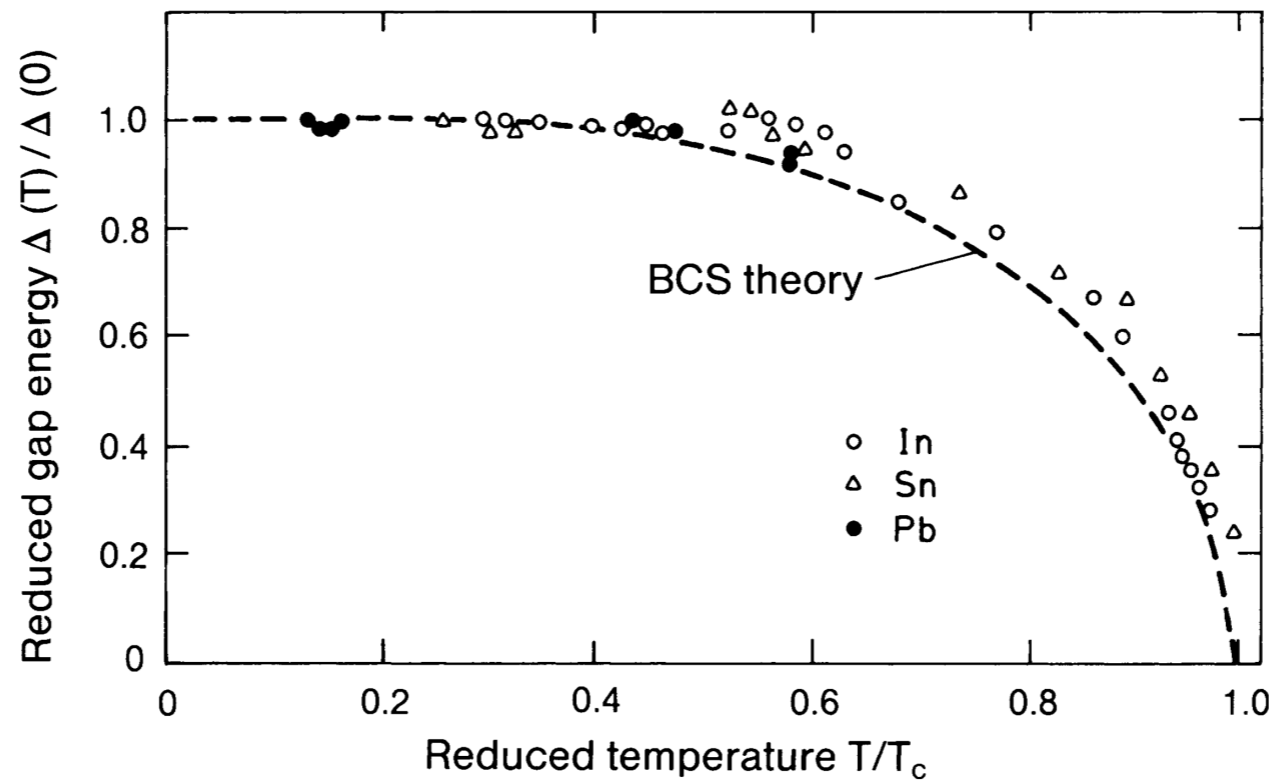


(b)



エネルギーギャップの温度依存性

- エネルギーギャップは温度依存性を示す: $\Delta(T)$
- BCS理論から算出された関数 $\Delta(T)$ と測定値は非常によく合っている。



普遍定数

▶ T=0でのギャップ関数: $\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{V_0\mathcal{N}(E_F)}\right),$

ω_D : Debye周波数

V_0 : 電子-格子相互作用ポテンシャル

$\mathcal{N}(E_F)$: $E=E_F$ における単一電子の状態密度

▶ 臨界温度: $k_B T_c = 1.14\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{V_0\mathcal{N}(E_F)}\right)$

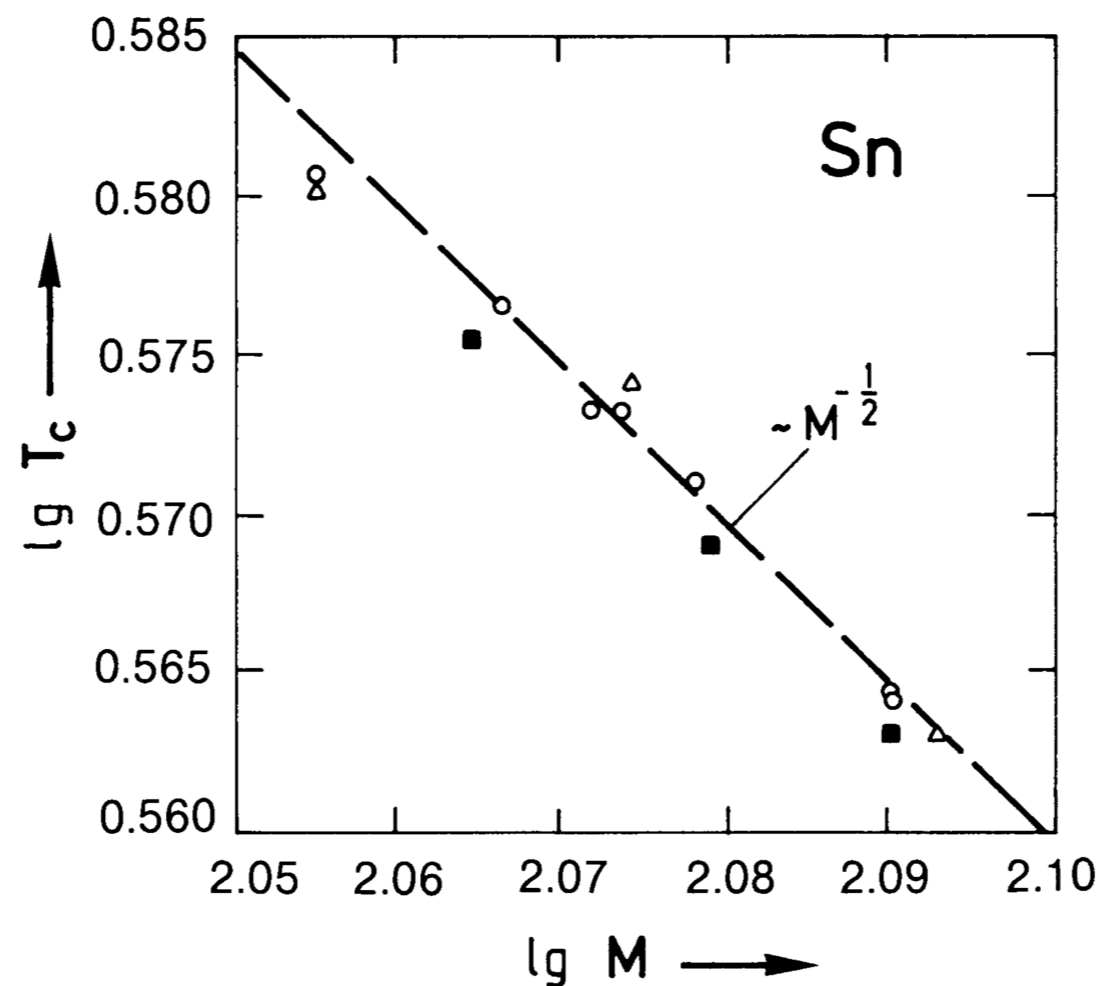
$$\Delta(0) = 1.76 k_B T_c$$

元素	Sn	In	Tl	Ta	Nb	Hg	Pb
$\Delta(0)/(k_B T_c)$	1.75	1.8	1.8	1.75	1.75	2.3	2.15

表 2: 様々な元素の普遍定数 $\Delta(0)/(k_B T_c)$ の測定値 [1].

同位体による違い

- 前のスライドの一番目の式によると, 臨界温度はDebye周波数に比例.
- また, Debye周波数は原子量Mの平方根の逆数に比例.
- 臨界温度: $T_c \propto \omega_D \propto 1/\sqrt{M}$



超伝導電流と臨界電流 I

- δt の間 E_0 を印加

$$\text{クーパー対の運動量: } \vec{P} = \hbar \vec{K} = -2e\vec{E}_0 \delta t,$$

$$\text{クーパー対の超伝導電流密度: } \vec{j}_s = -\frac{n_s e \hbar}{2m_e} \vec{K},$$

n_s : 電子の数密度

電流が流れた時の波動関数は位相項 $\exp(i\vec{K} \cdot \vec{R})$ を掛けたもの

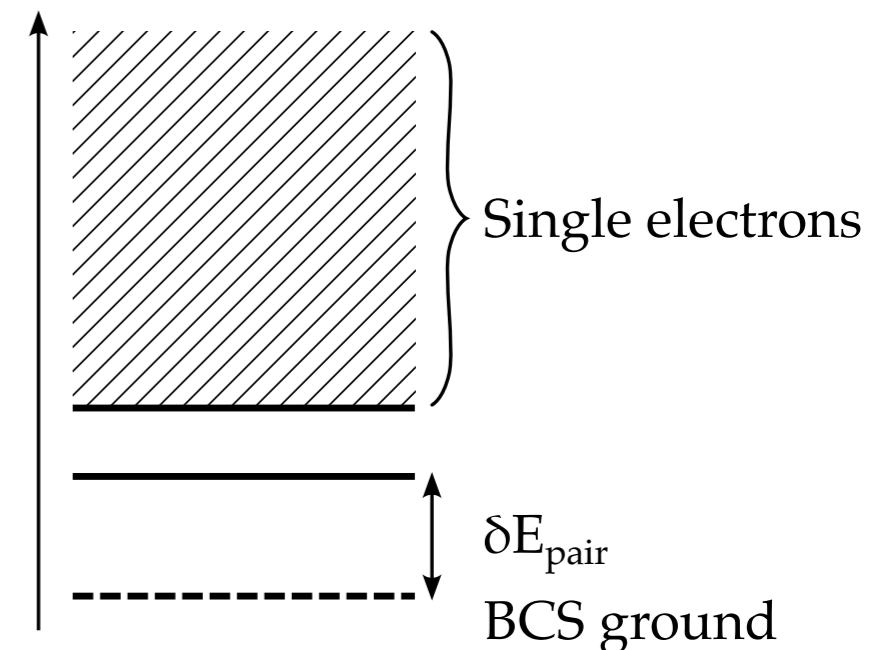
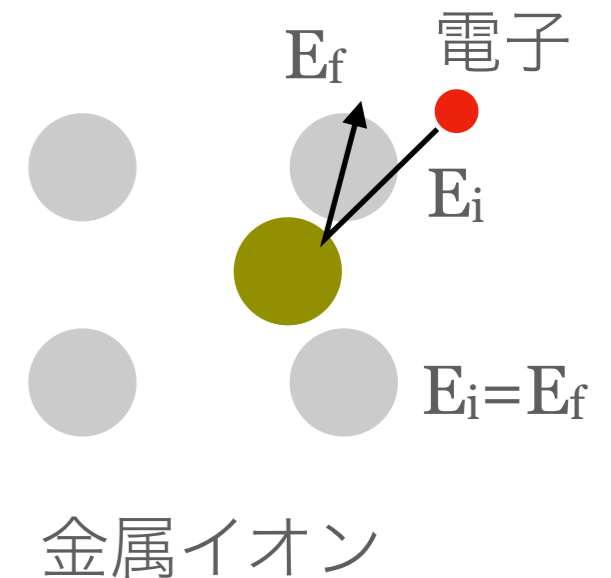
BCS理論の方程式はそのまま適用可能

運動エネルギーの増加分 δE_{pair} が 2Δ 未満であれば超伝導状態は保たれる

超伝導電流と臨界電流 II

- 散乱中心には2つのタイプがある
 - 不純物に起因するもの
 - 格子振動によるもの
- 不純物: 固定された重い標的と考えられるので, 弾性散乱となり, Cooper対の電子のエネルギーは増えない
- 格子振動による散乱: 平均熱エネルギーがエネルギーギャップよりも小さい場合は無視できる. ($T < T_c$)
- 抵抗ゼロで電流輸送できる条件:

$$2\Delta - \delta E_{\text{pair}} > 0,$$
$$T < T_c(j_s)$$



超伝導電流と臨界電流 III

- 輸送電流が流れているときのエネルギー増加量

$$\delta E_{\text{pair}} = \frac{\hbar^2 k_F K}{m_e}$$

- したがって,

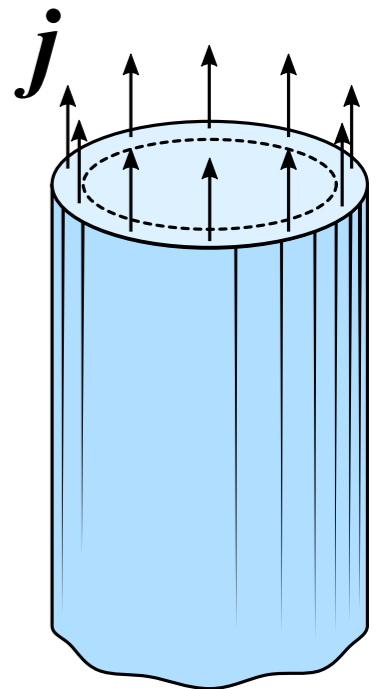
$$\delta E_{\text{pair}} \sim \frac{\hbar^2 k_F K}{m_e} = \frac{2\hbar k_F}{en_s} j_s \leq 2\Delta$$

- 臨界電流:

$$j_c \sim \frac{en_s \Delta}{\hbar k_F}$$

- 臨界磁場:

$$H_c = \lambda_L j_c \sim \lambda_L \frac{en_s \Delta}{\hbar k_F}.$$



磁束の量子化

量子論におけるベクトルポテンシャル

電磁場中での運動量

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

波長

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv + qA}$$

ドブロイの関係

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

自由空間内(磁場なし)で Δx 移動した時の位相の進み

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{1}{\hbar}m_e\vec{v} \cdot \Delta\vec{x}$$

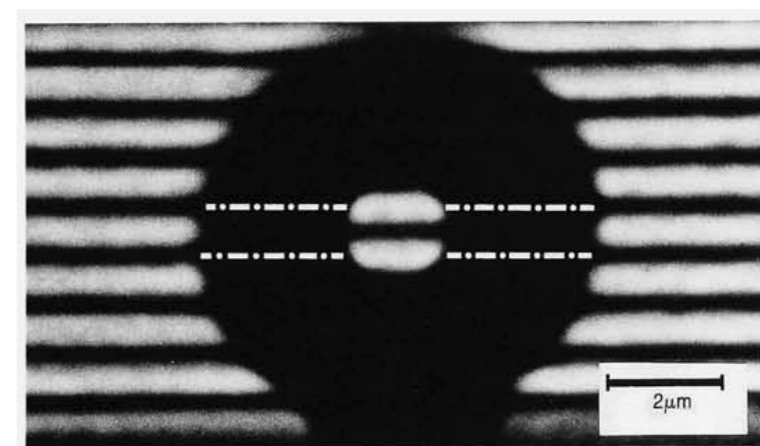
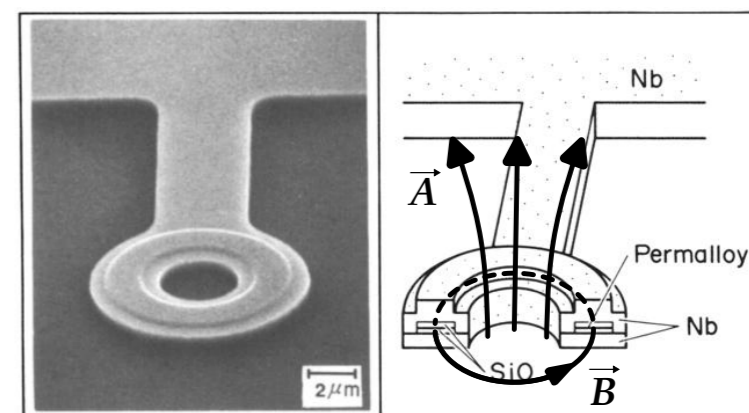
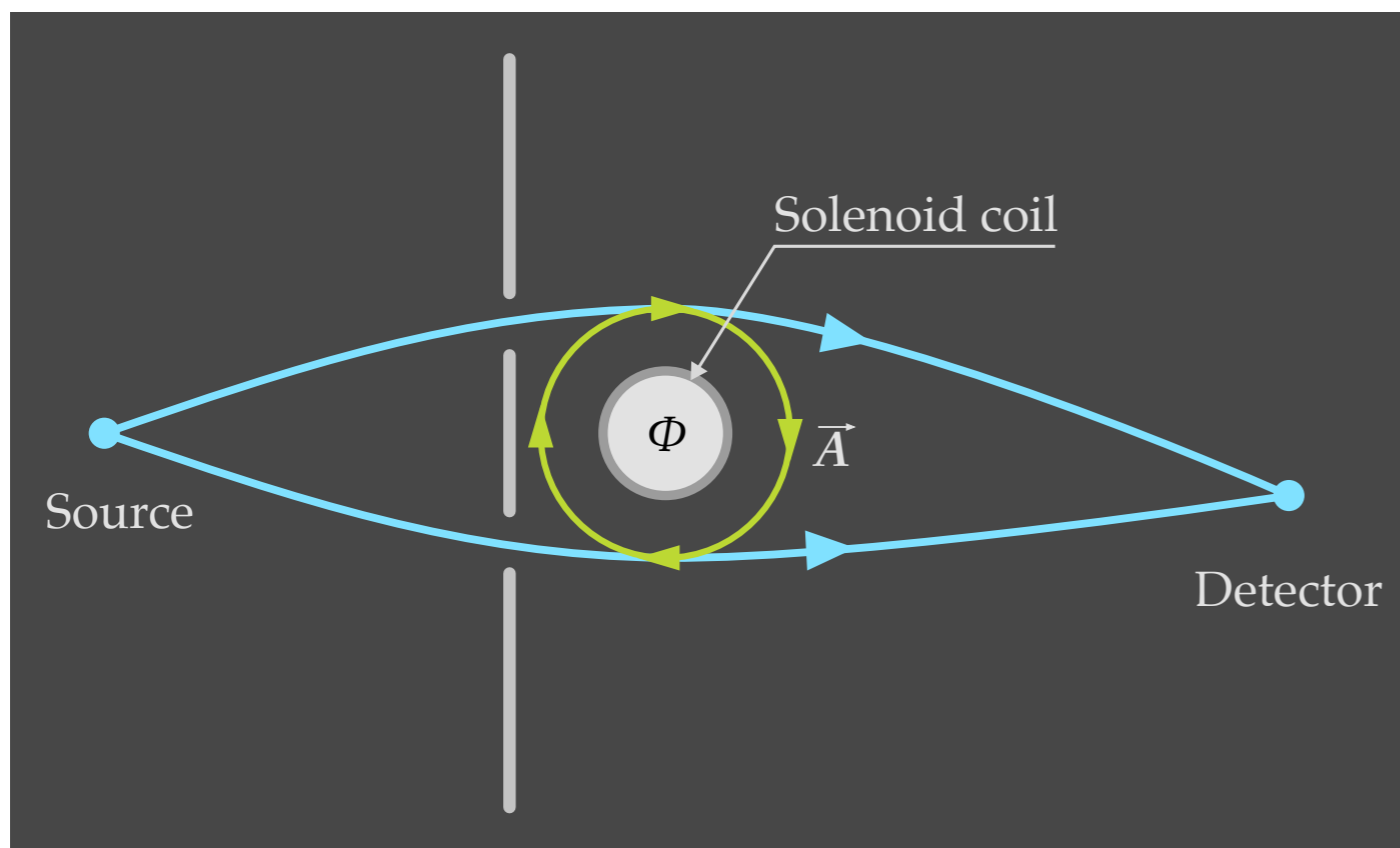
電磁場内ではさらに以下の位相だけ進む

$$\Delta\varphi' = -\frac{e}{\hbar}\vec{A} \cdot \Delta\vec{x},$$

Aharonov-Bohm効果

Aharonov-Bohm効果

外村らによるAB効果の観測



直径数μのトロイダル永久磁石を超伝導ニオブで閉じ込めてAB効果を観測

$$\delta\varphi = \delta\varphi_0 + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \delta\varphi_0 + \frac{e}{\hbar} \Phi_{\text{mag}}$$

磁束の量子化 I

Cooper対の波動関数は

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i\varphi) = \sqrt{n_c} \exp(i\varphi),$$

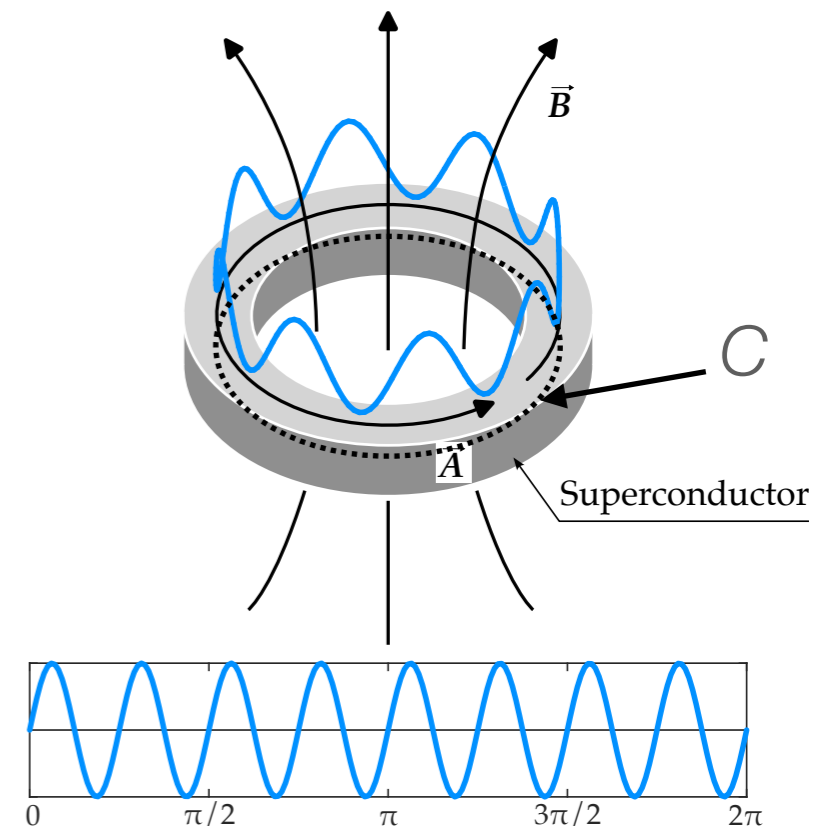
n_c は Cooper 対の密度

リングを一周した時に, 位相 $\phi = \phi(s)$ の進みは
 $n 2\pi$ でなければならない.

$$\oint \frac{d\varphi}{ds} ds = n \cdot 2\pi.$$

バルク内では $v = 0$

$$\frac{d\varphi}{ds} ds = \frac{q}{\hbar} \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$



磁束の量子化 II

$$\Phi_{\text{mag}} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{\hbar}{q} \cdot n \cdot 2\pi = n \cdot \Phi_0$$



$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{q}$$

BCS理論では $q=-2e$ なので,

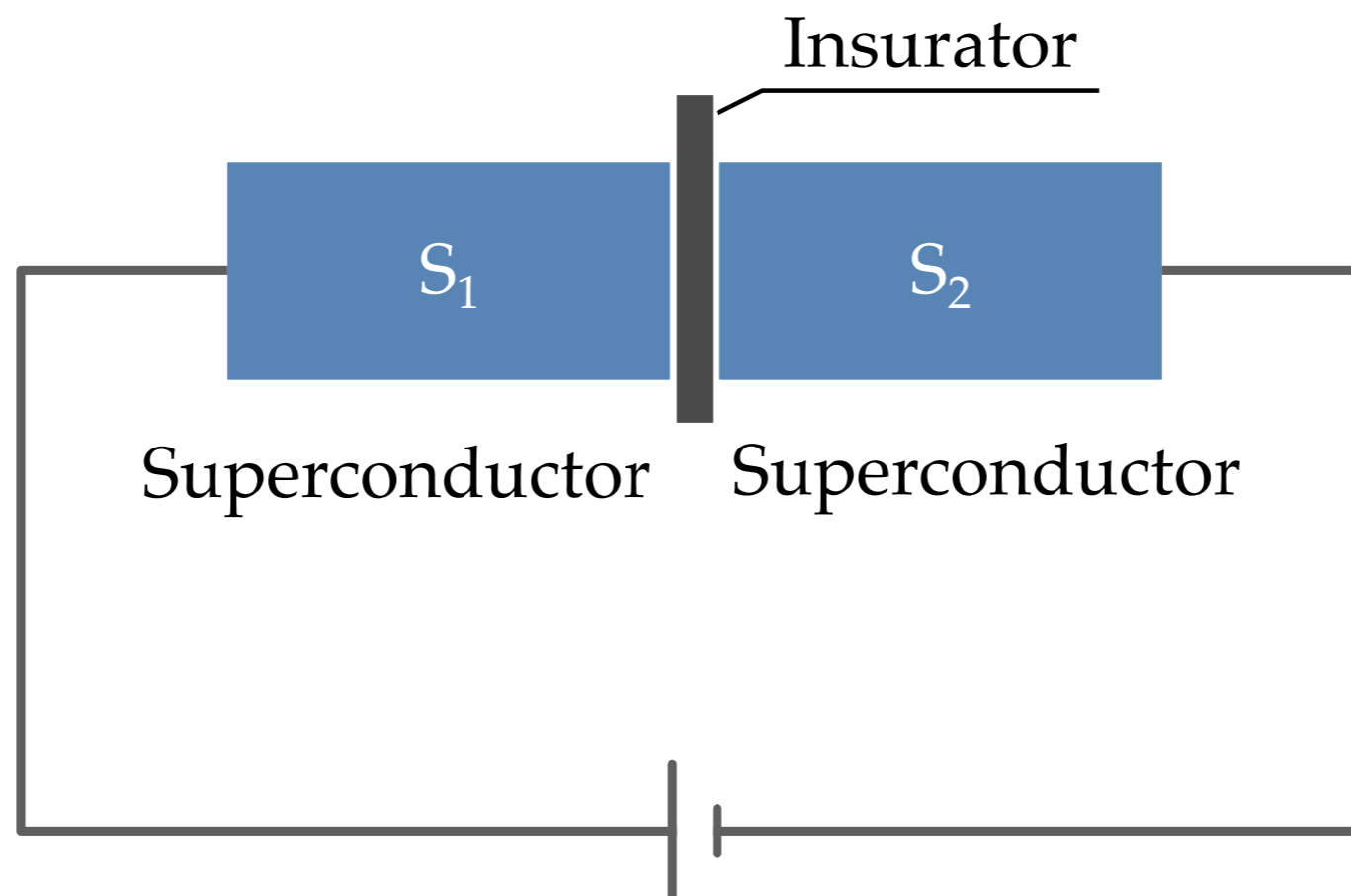
$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

Φ_0 : 磁束量子

Josephson 効果

Josephson効果

- ▶ 1962年にJosephsonはクーパー対がトンネル効果を示すことを理論的に導いた.
- ▶ 薄い絶縁体の両面を2つ超伝導体で接合すると, トンネル効果によって電流が流れる現象.

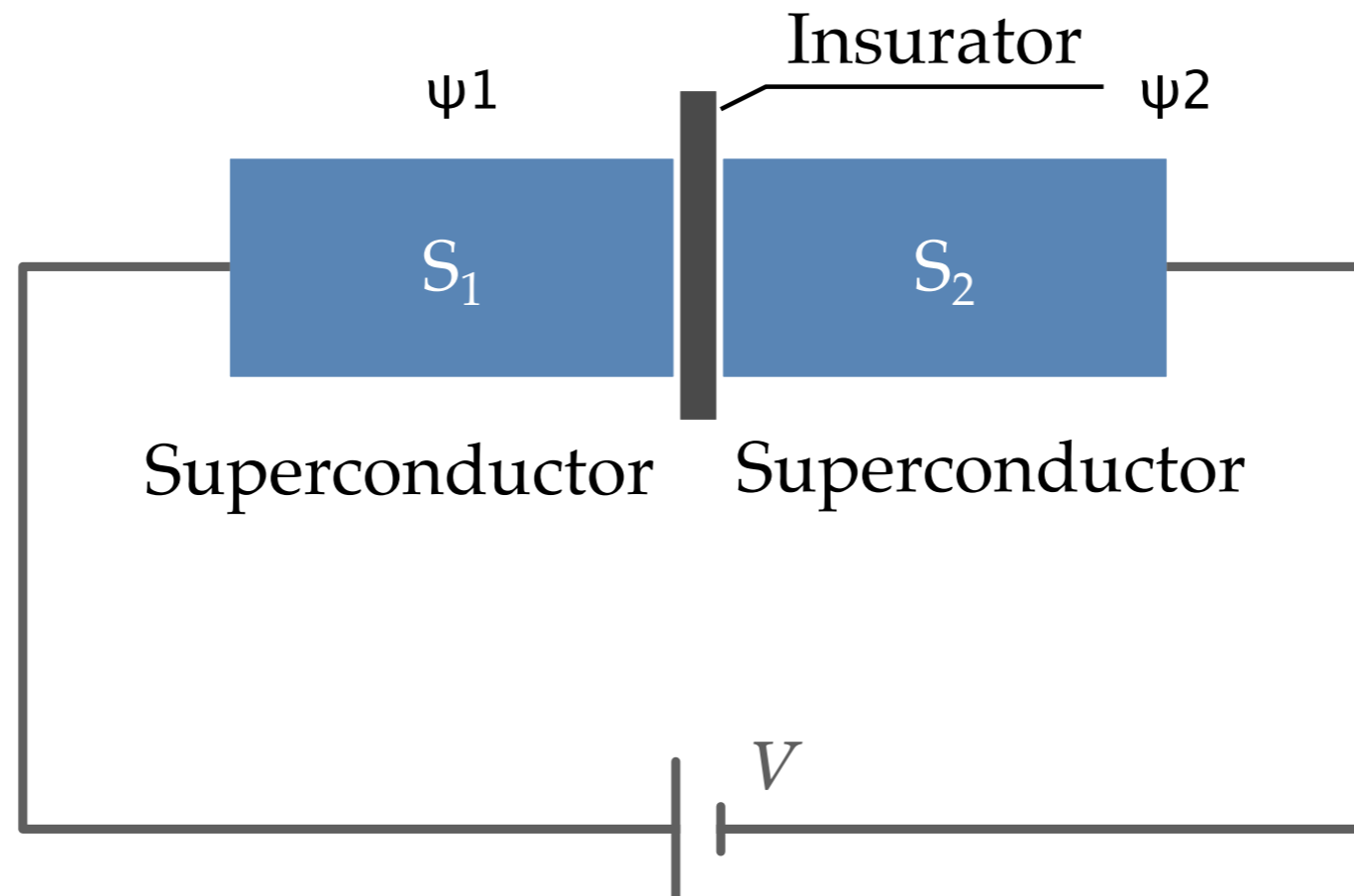


Josephson効果におけるシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1(\vec{r}, t)}{\partial t} = -eV\psi_1(\vec{r}, t) + K\psi_2(\vec{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2(\vec{r}, t)}{\partial t} = eV\psi_2(\vec{r}, t) + K\psi_1(\vec{r}, t)$$

K: 結合パラメーター



Josephson効果におけるシュレディンガー方程式

波動関数

$$\psi_1(\vec{r}, t) = |\psi_1(\vec{r}, t)| \exp(i\varphi_1(\vec{r}, t))$$

$$\psi_2(\vec{r}, t) = |\psi_2(\vec{r}, t)| \exp(i\varphi_2(\vec{r}, t))$$

波動関数を先の式に代入

$$\left(-\hbar|\psi_1| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial |\psi_1|}{\partial t} \right) \exp(i\varphi_1) = -eV|\psi_1| \exp(i\varphi_1) + K|\psi_2| \exp(i\varphi_2),$$

$$\left(-\hbar|\psi_2| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial |\psi_2|}{\partial t} \right) \exp(i\varphi_2) = eV|\psi_2| \exp(i\varphi_2) + K|\psi_1| \exp(i\varphi_1)$$

$|\psi_1| \exp(-i\varphi_1)$ と $|\psi_2| \exp(-i\varphi_2)$ を乗じて実数と虚数に分ける.

Josephson効果におけるシュレディンガー方程式

$$-\hbar|\psi_1|^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -eV|\psi_1|^2 + K|\psi_1||\psi_2| \times \cos(\Delta\varphi),$$

$$\frac{\hbar}{2} \frac{\partial |\psi_1|^2}{\partial t} = K|\psi_1||\psi_2| \sin(\Delta\varphi), \quad \times 2e/\hbar$$

$$-\hbar|\psi_2|^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = eV|\psi_2|^2 + K|\psi_1||\psi_2| \cos(\Delta\varphi),$$

$$\frac{\hbar}{2} \frac{\partial |\psi_2|^2}{\partial t} = K|\psi_1||\psi_2| \sin(\Delta\varphi). \quad \times 2e/\hbar$$

$$I_S = eS \frac{\partial |\psi_1|^2}{\partial t} = -eS \frac{\partial |\psi_2|^2}{\partial t} \quad S: \text{超伝導体S1, S2の断面積}$$

$$= \frac{2e}{\hbar} K|\psi_1||\psi_2| \sin(\Delta\varphi) \quad \text{直流Josephson効果}$$

位相差を与えるだけで印加電圧にかかわらず電流が流れる

超伝導量子干渉

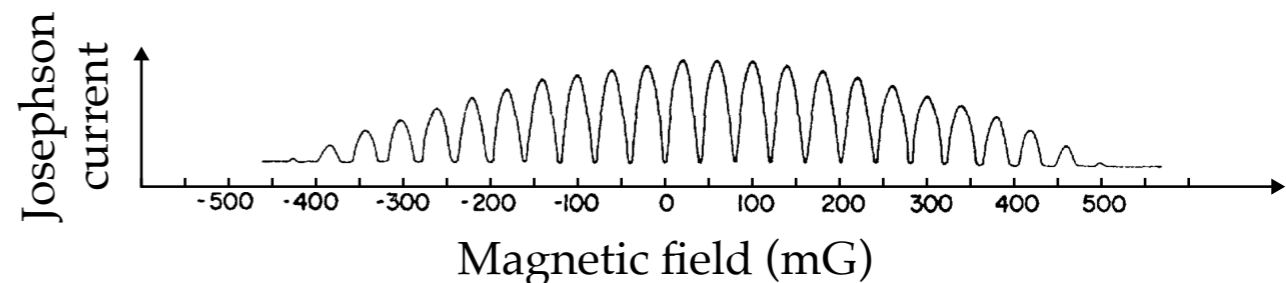
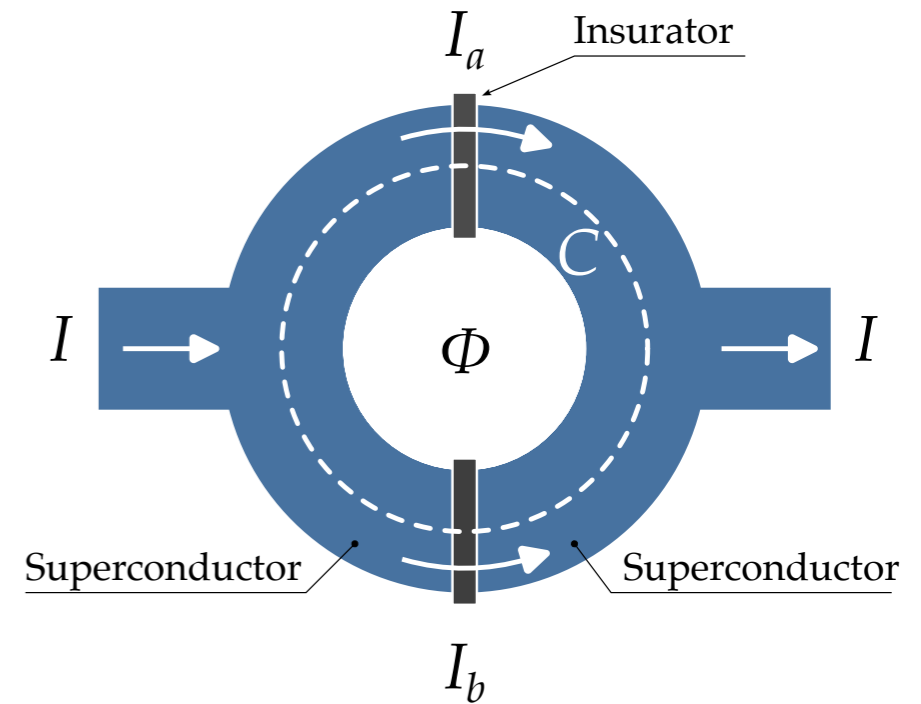
$$I = I_a + I_b = I_0(\sin \varphi_a + \sin \varphi_b)$$

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{2e}{\hbar} \Phi$$

$$\varphi_0 = (\varphi_b - \varphi_a)/2 \text{ とおくと,}$$

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{e}{\hbar} \Phi, \quad \varphi_b = \varphi_0 - \frac{e}{\hbar} \Phi,$$

$$I = I_0 \sin \varphi_0 \cos \left(\frac{e}{\hbar} \Phi \right)$$



まとめ

- 現象論

- ロンドン方程式: マイスナー効果, 磁場侵入深さ
- ピッパード方程式: コヒーレンス長
- GL理論: 秩序パラメーターを波動関数にとりいれる. 侵入深さの温度依存, GLパラメーター

- BCS理論

- クーパー対が生成される
- 臨界電流, 臨界磁場
- 様々なBCS理論による予言は実験で再現されている.

- Josephson効果

- ベクトルポテンシャルの位相差によりJosephson電流が流れる