

超伝導電磁石の基礎

高エネルギー加速器研究機構

超伝導低温工学センター

鈴木 研人

はじめに

- タイトルは「超伝導電磁石」と一般化されていますが、本講義スライド/テキストでは「加速器応用」を意識して作成しています。
- しかしながら、これから述べていきますが、超伝導電磁石の構成要素となる超伝導線材（ケーブル）の電磁現象や熱安定性については、加速器以外の他応用分野においても共通の課題となります。
- 講義時間が限られているため、各項目について深く立ち入りません。また、以下の項目についてはこの後の講義でも網羅されていますので、そちらで学習いただけますようお願いいたします。
 - 超伝導電磁石の磁場設計：「5. SuperKEKB 超伝導電磁石システム」
 - 超伝導電磁石の構造設計：「6. HL-LHC 計画とKEKにおける超伝導磁石開発」
- 本講義の位置付けは、この後に続く講義の「入口」と捉えていただければと思います。
- 最後に：講義の途中でも構いませんから、質問がある場合は遠慮なく挙手してください。

教科書 訂正

- p. 3-14 キーストーン角式：

- $\alpha_t = \tan^{-1}(1/2(t_2 - t_1)/w)$ → $\alpha_t = \tan^{-1}((t_2 - t_1)/w)$

- p. 3-19 MPZ計算条件：

- 「電流密度は J_c と一致させている」 → 「なお $J=0.8xJ_c$ (at B=6T) としている」
 - 「ここで求めているMPZおよびMQEは臨界電流 I_c に匹敵する電流値…」 → 「ここで求めているMPZおよびMQEは $I=0.8I_c$ (at 6 T)に匹敵する電流値」

- p. 3-24 CLIQのQPHとの併用に関して：

- 「MQXFの場合、遮断時定数を短くする目的でCLIQに加えてQPHも同時使用した保護設計となっている」 → 「低磁場領域ではクエンチに至るまでのエンタルピーマージンが大きくなり、CLIQのみではコイル全体の常伝導への転移が十分でないため、MQXFの場合QPHも併用した保護設計となっている。」

ウェブには修正済のものをアップロード・公開予定です

本講義の流れ

- 実用的な超伝導体の特性
 - 前講義のおさらい
 - 磁化モデル
 - 磁気安定性
- 超伝導ケーブル「NbTi」の特性
 - 極細多芯線・Rutherford cable
 - 超伝導ケーブルの電磁現象
- クエンチ保護
 - MPZ・MQE
 - クエンチ検出と保護

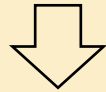
1. 実用的な超伝導体の特性

- 前講義のおさらい
- 磁化モデル (Critical state model)
- 磁気安定性 (Flux jump)

前講義のおさらい – GL方程式

- 超伝導状態：巨視的な波動関数 Ψ = 秩序変数

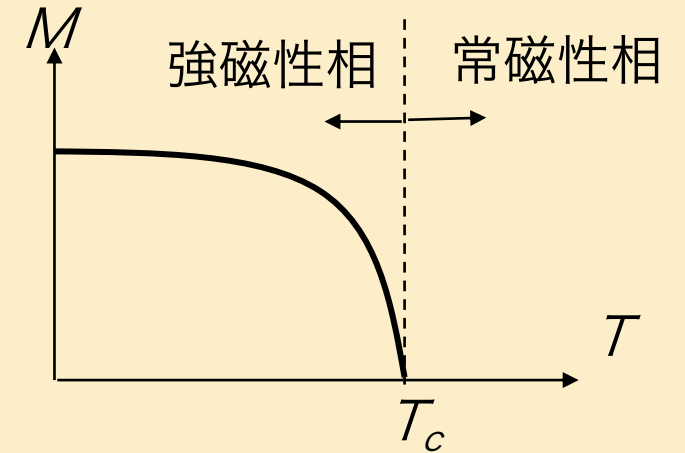
自由エネルギー – $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0 + \alpha M^2 + \frac{\beta}{2} M^4$ 強磁性体の場合



$$\mathcal{F}(|\Psi|) = \mathcal{F}_0 + \int \left[\alpha |\Psi(r)|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi(r)|^4 \right] dV + \int \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \Psi(r)|^2 dV$$
$$\alpha = a(T - T_c)$$

磁場が存在する場合、 $\nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie^*}{\hbar}$ とし、極小条件 ($\delta \mathcal{F} = 0$) を求めれば Ψ の決定方程式が導かれる

$$-\frac{\hbar}{2m^*} \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar} \right) \Psi(r) + \alpha \Psi(r) + \beta |\Psi(r)|^2 \Psi(r) = 0 \quad \text{GL方程式}$$



前講義のおさらい - GLパラメータ

- 一次元に帰着したGL方程式で磁場が存在しない場合の ψ を解くと：

$$\Psi(x) = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}\xi}$$

GLコヒーレンス長 $\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*aT_c} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{-1/2}$

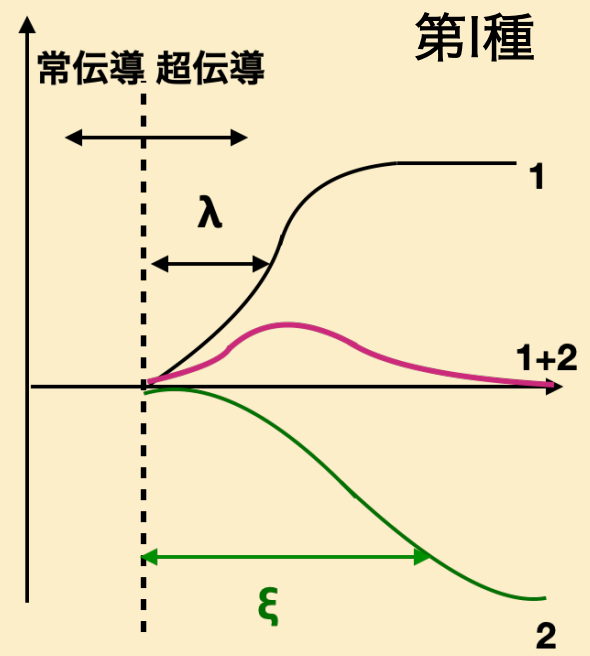
超伝導状態は ξ のスケールで回復

ロンドン侵入長 $\lambda(T) = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 e^{*2} |\Psi|^2}} = \left(\frac{m^* \beta}{\mu_0 * e^{*2} a T_c} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{-1/2}$

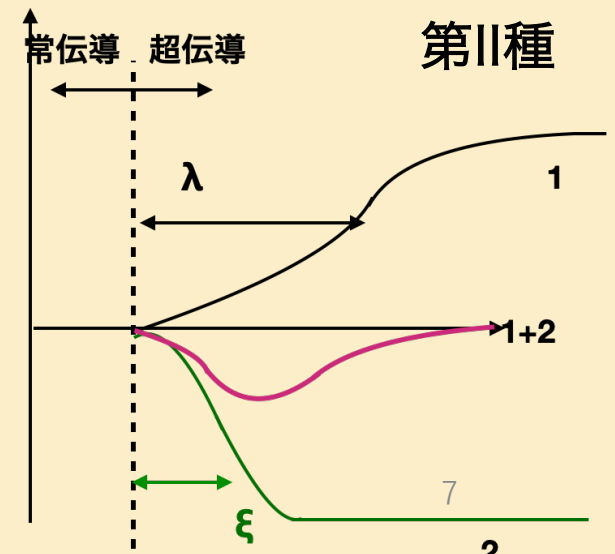
磁場は λ のスケールで超伝導に侵入

GLパラメータ(定数) $\kappa \equiv \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m^*}{e^* \hbar} \left(\frac{2\beta}{\mu_0} \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} < \frac{1}{\sqrt{2}} : \text{第I種} \\ > \frac{1}{\sqrt{2}} : \text{第II種} \end{array} \right.$

自由エネルギー

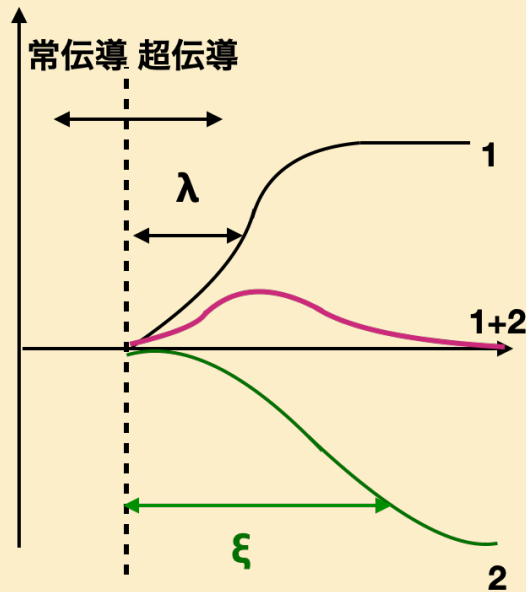


自由エネルギー



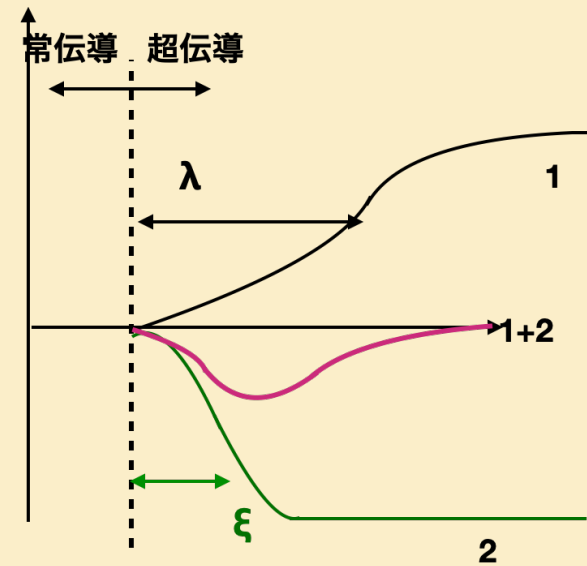
第I種超伝導体 / 第II種超伝導体

自由エネルギー



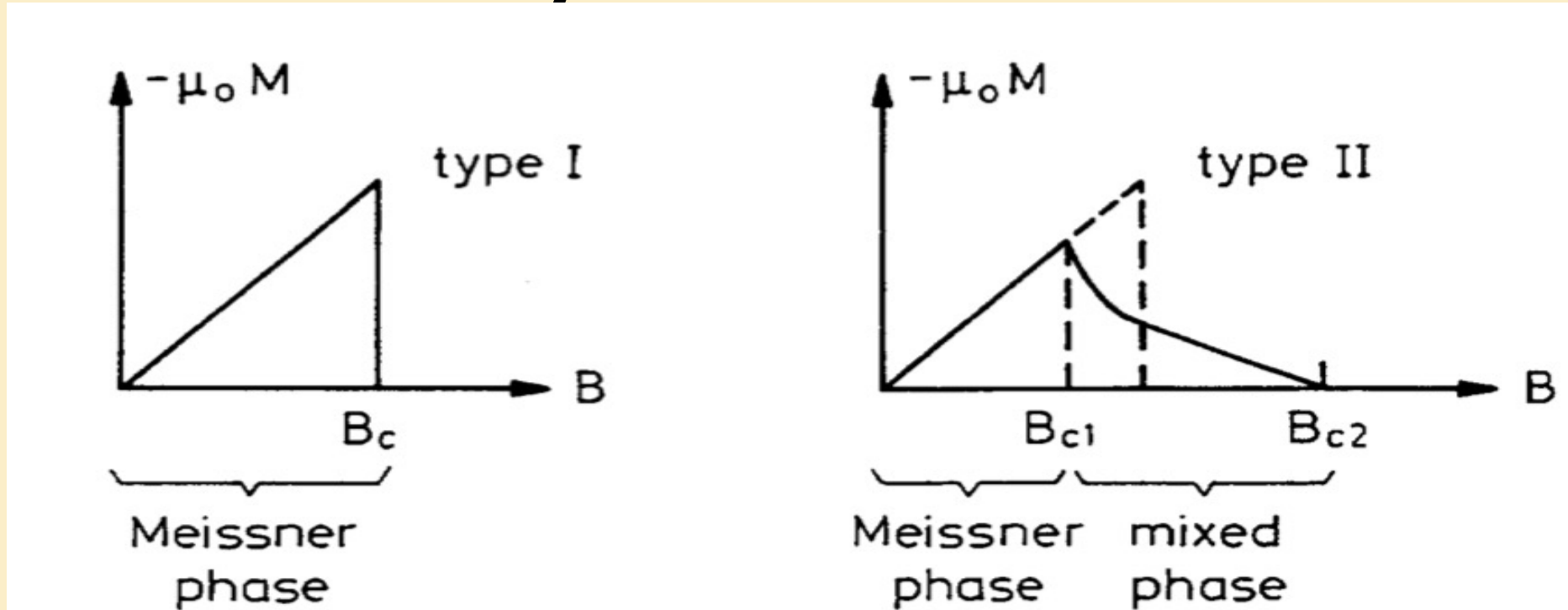
- 第I種超伝導体の場合
 - 界面エネルギーが正
 - マイスナー状態が支配的
 - 磁場の侵入に伴い自由エネルギーが増加

自由エネルギー



- 第II種超伝導体の場合
 - 表面エネルギーが負
 - マイスナー状態と混合状態（渦糸状態）
 - 常伝導体との界面が多いほど安定

第I種超伝導体 / 第II種超伝導体



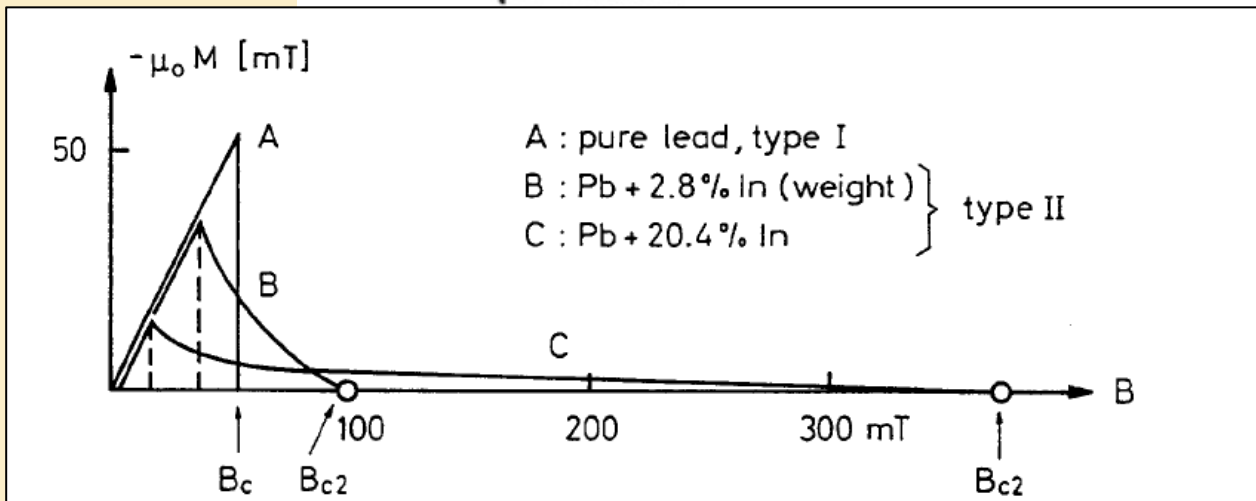
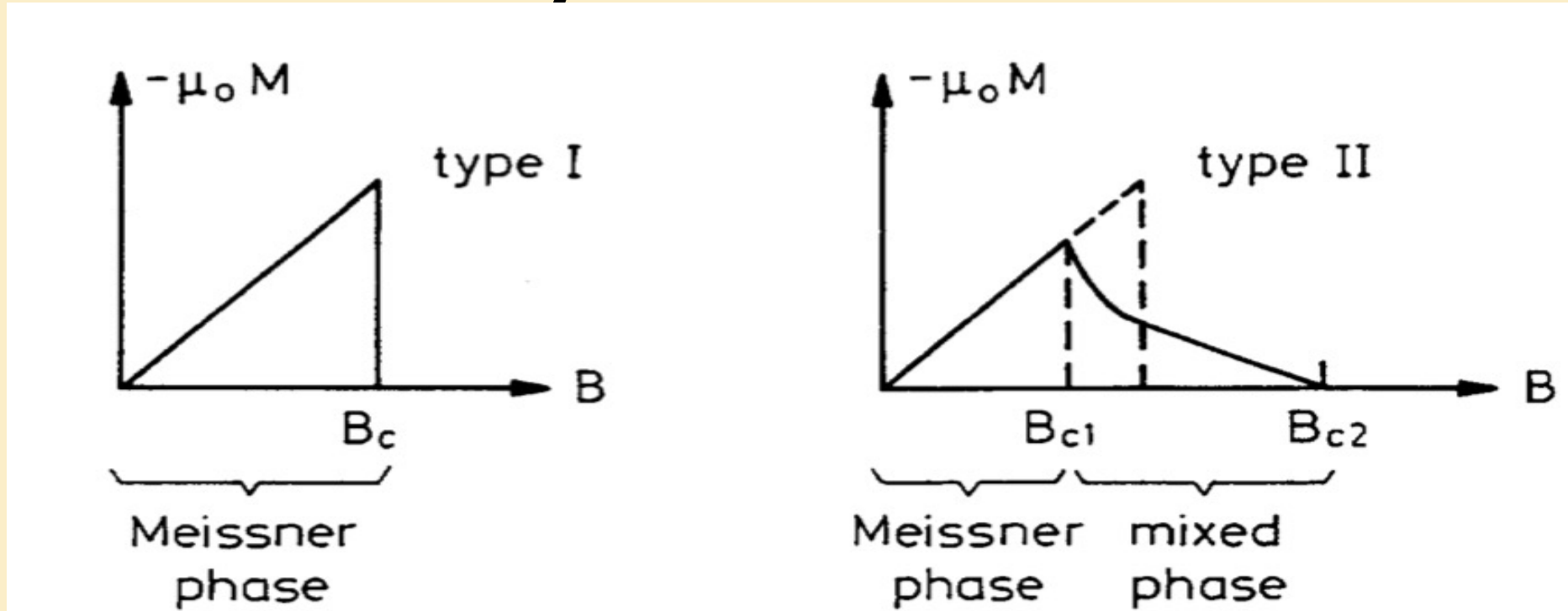
- 第I種超伝導体の場合
 - 界面エネルギーが正
 - マイスナー状態が支配的
 - 磁場の侵入に伴い自由エネルギーが増加

臨界磁場 $B_c = O(10 \text{ mT})$ at $T=0$

- 第II種超伝導体の場合
 - 表面エネルギーが負
 - マイスナー状態と混合状態（渦糸状態）
 - 常伝導体との界面が多いほど安定

上部臨界磁場 $B_{c2} = 10 \text{ T}$ at $T=0$

第I種超伝導体 / 第II種超伝導体



- 第II種超伝導体の場合
 - 表面エネルギーが負
 - マイスナー状態と混合状態（渦糸状態）
 - 常伝導体との界面が多いほど安定

上部臨界磁場 $B_{c2} = 10 \text{ T}$ at $T=0$

第II種超伝導体の臨界電流密度

- 混合状態 ($B_{c1} < B < B_{c2}$) においては磁場が「磁束： $\phi_0 = h/2e$ 」という形で侵入

- この状態で電流を流すとローレンツ力によって磁束が移動

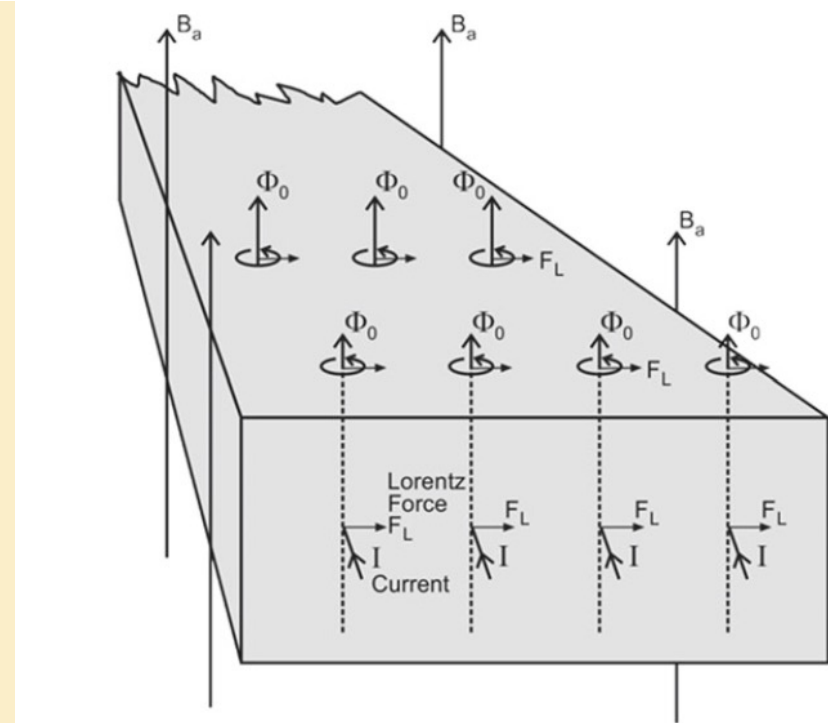
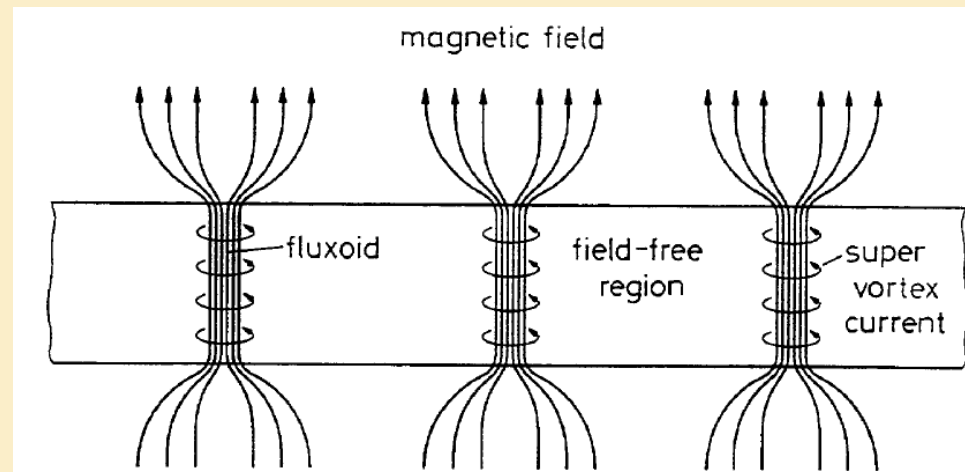
$$\vec{E} = \frac{\phi_0 B}{\eta} \vec{j} \quad \eta: \text{摩擦係数}$$

- この現象を「磁束フロー」という

- 磁束フローが生じると起電力によって抵抗が生じ、ohmicな熱損失を生じる

- 磁束フローが生じる電流（密度） = 臨界電流（密度） (depinning critical current) という*1

*1) 前講義からクーパ対が壊れる電流密度を臨界電流密度(deparing critical current)と定義したかもしれないが、厳密には両者は一致しない。



ピン留め効果の実現

- 磁束フロー抵抗の発生は実用上好ましくないので、大電流を通電したとしても磁束が動かないように強くピン留めする必要がある
- ピン留め力は渦糸と「系の乱れ」との相互作用によって生じる

(磁束が常伝導領域に入り込んだ系のエネルギー)

< (磁束が超伝導領域に入り込んだ系のエネルギー)

$$\Rightarrow \text{要素的ピン留め力} : f_p = \frac{\Delta U}{\Delta x} \sim \frac{U_p}{2a_0} \propto \xi \frac{B_c^2}{\mu_0} \left(1 - \frac{B}{B_{c2}}\right) \quad B_{c2} = \sqrt{2\kappa} B_c$$

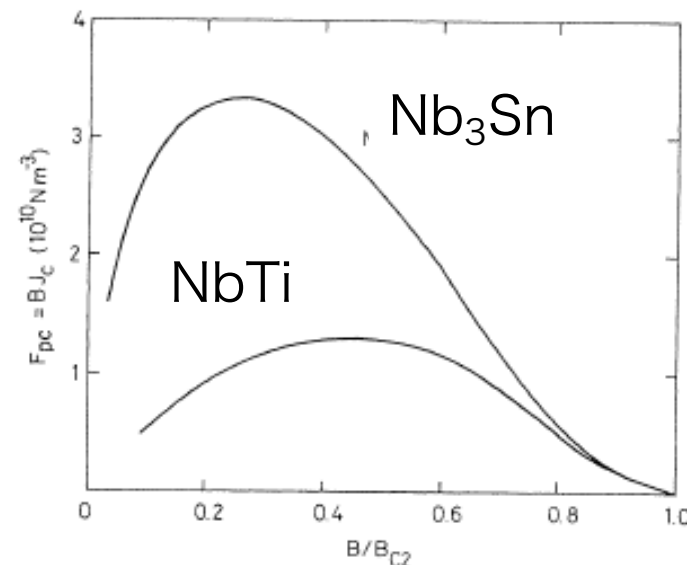
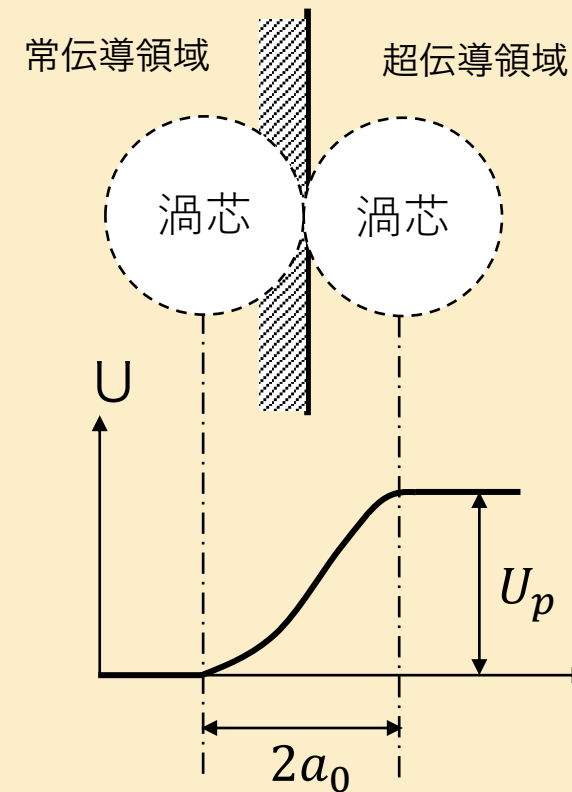
$$\Rightarrow \text{巨視的なピン留め力} : F_{pc} = J_c B \propto N_p f_p \quad \text{ピン留めが強い場合}$$

- ピン留めサイト (ピン留め中心)
 - 不純物、格子欠陥、常伝導析出物、結晶粒界など

NbTi

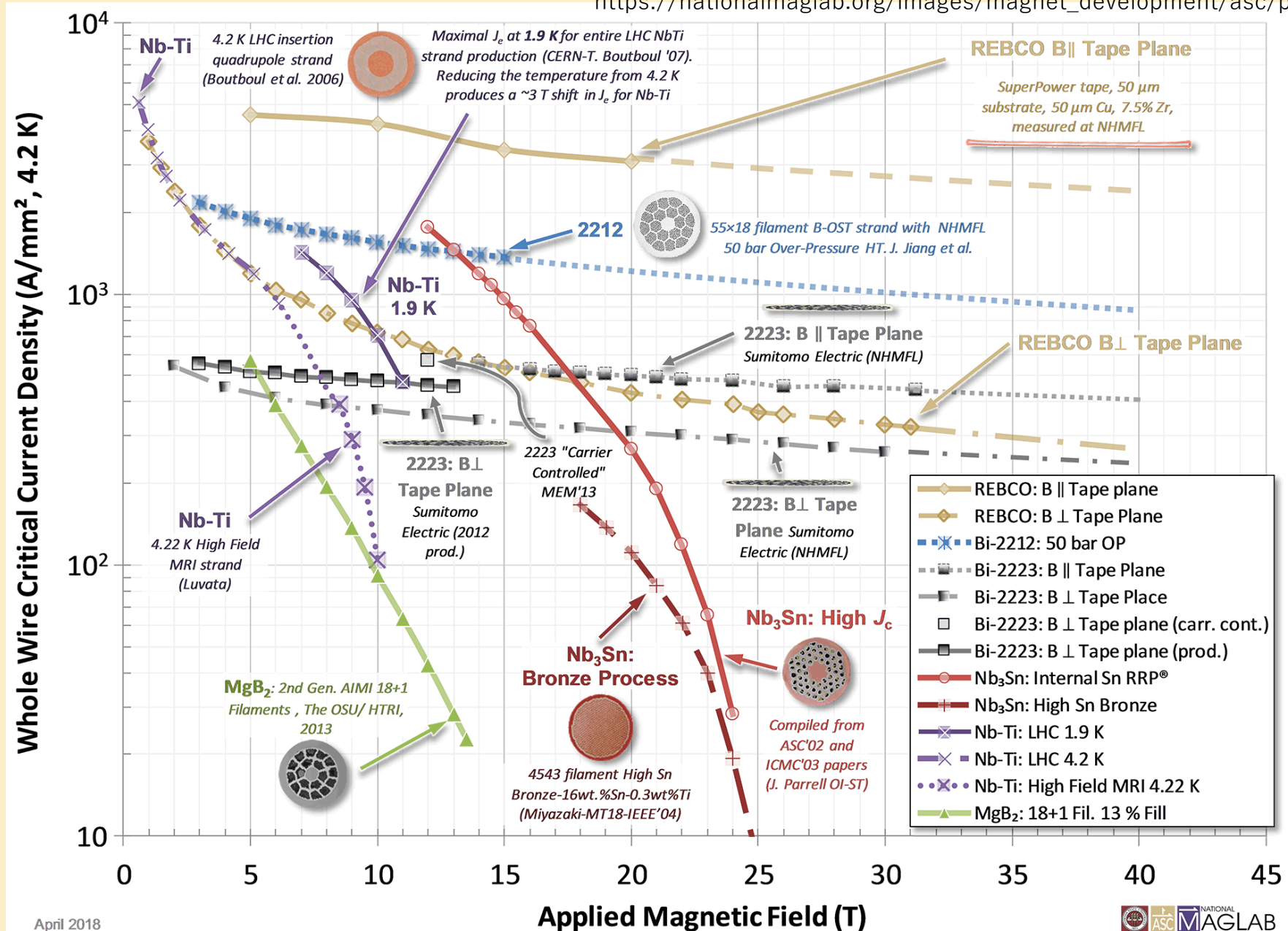
Nb₃Sn

ピン留め力が強い超伝導体 = 硬い超伝導体



硬い超伝導体 = 実用超伝導体

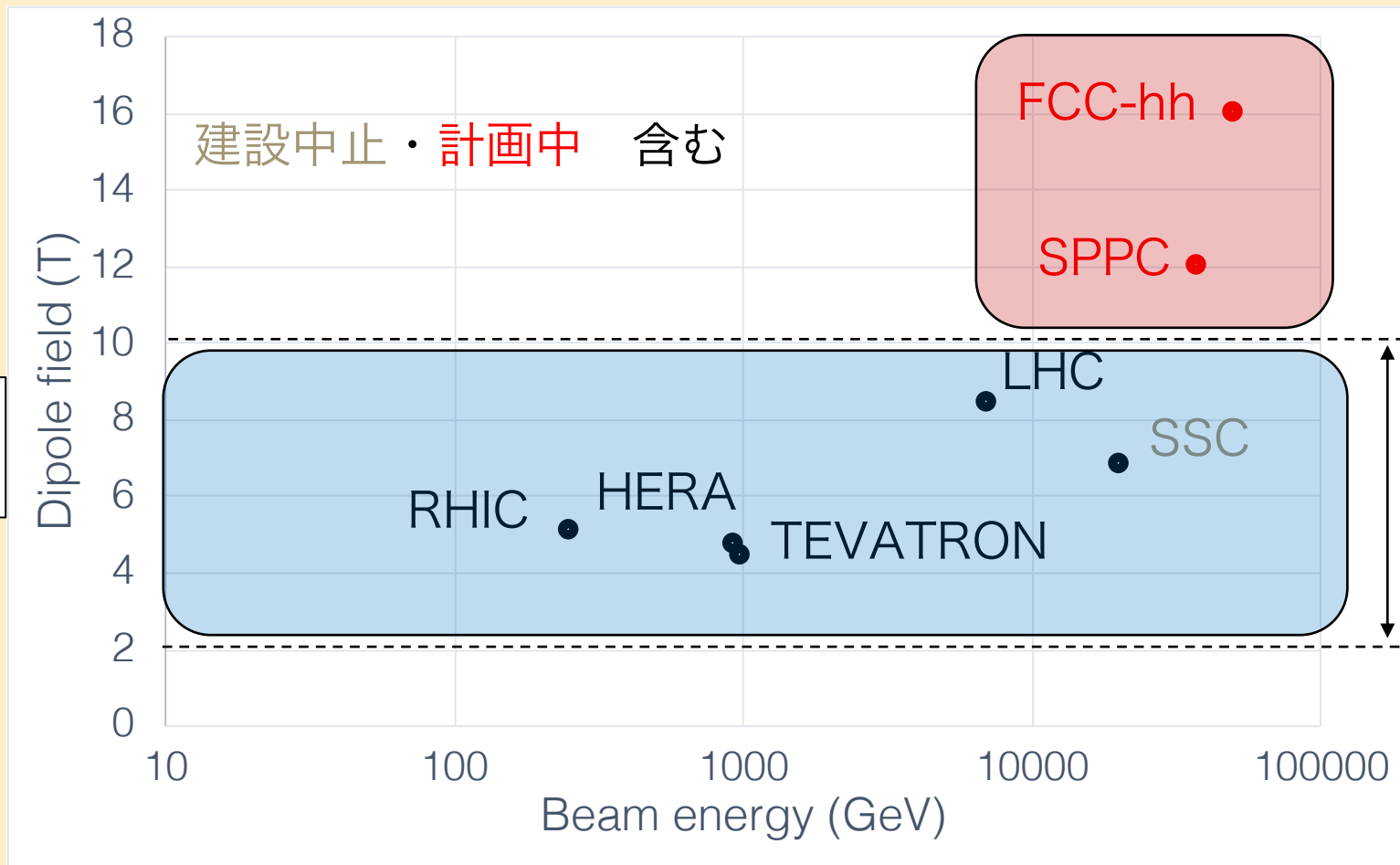
https://nationalmaglab.org/images/magnet_development/asc/plots



実用超伝導体のハドロンコライダーへの応用

Beam energy vs. B

$$B\rho [Tm] \sim 3.3356 \cdot \frac{p[GeV]}{q}$$



超伝導
(Nb₃Sn, IBS,
ReBCO..)

超伝導 (NbTi)

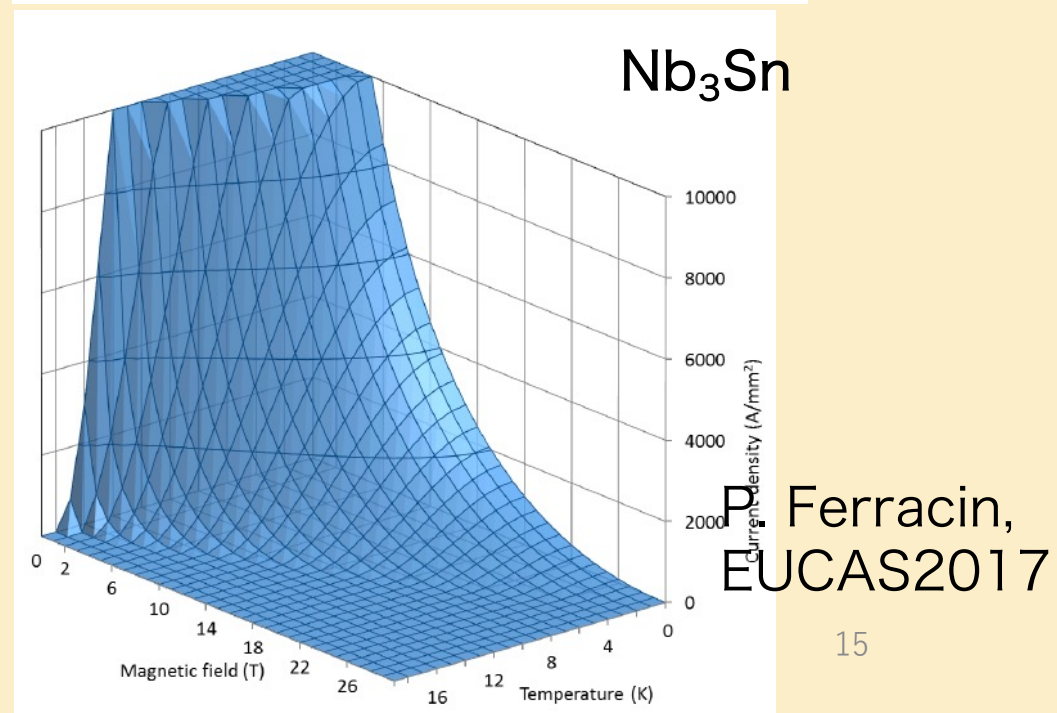
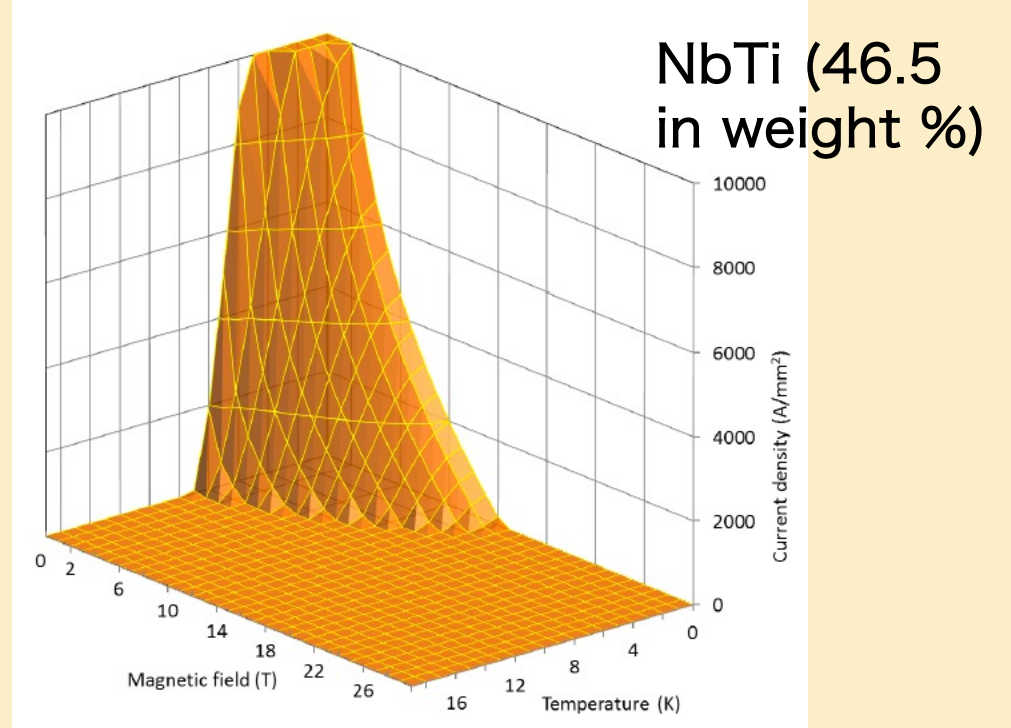
常伝導

加速器応用という観点からは $B = 5-10T$ の磁場を達成できる超伝導体の実用的といえる 私見ですが。
 $B > 10T$ を見据えた高磁場化はさらにその次の展開

臨界面 (Critical surface)

- 臨界温度 (轉移温度) : T_c at 0 T
 - NbTi : 9.2 K
 - Nb₃Sn : 18.3 K
- 上部臨界磁場 : B_{c2} at 0 K
 - NbTi : 14.5 T
 - Nb₃Sn : 28 T
- 臨界電流密度 : J_c at 4.2 K
 - NbTi : ~3000 A/mm² at 5 T
 - Nb₃Sn : ~1500 A/mm² at 16 T

←FCC-hh target



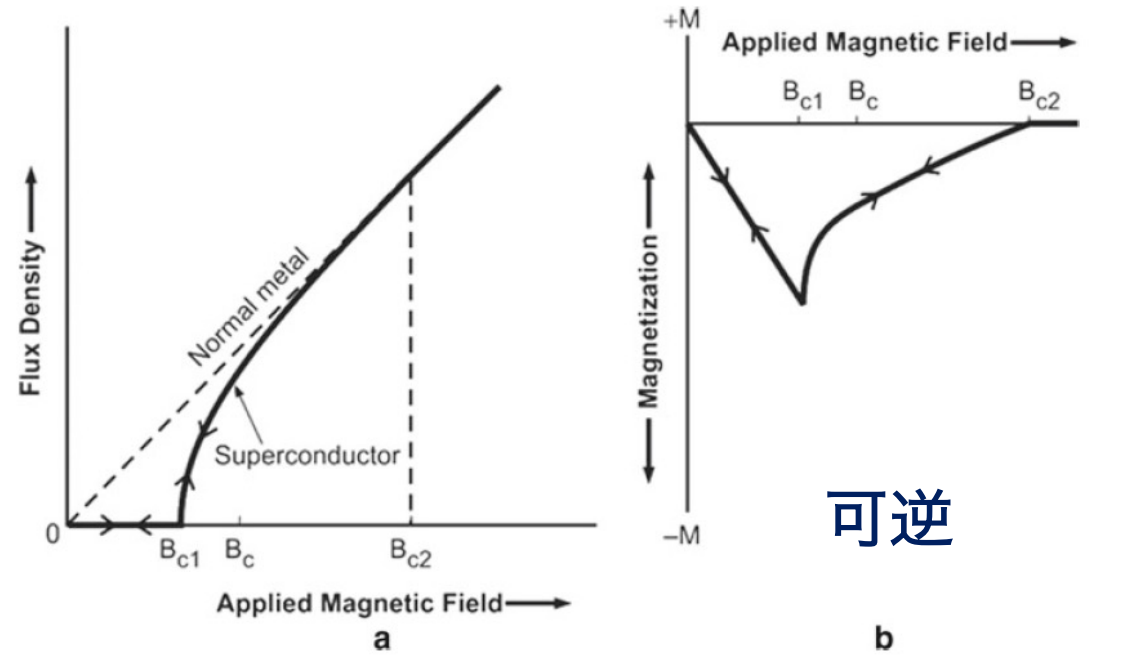
1. 実用的な超伝導体の特性

- 前講義のおさらい
- 磁化モデル (Critical state model)
- 磁気安定性 (Flux jump)

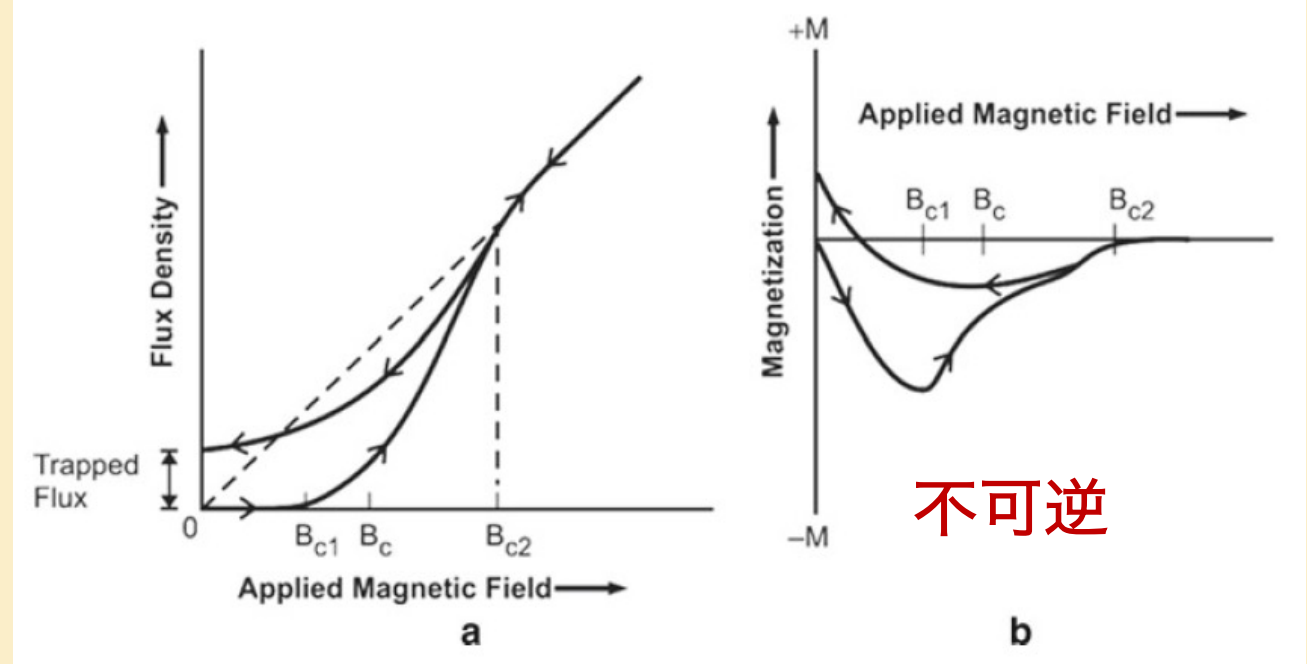
ピン留め効果の磁化への影響

$$B = \mu_0(H + M)$$

ピン留め効果なし



ピン留め効果あり(硬い超伝導体)



- $B < B_{c1}$:
 - マイスナー状態。磁場の内部への侵入を完全に排斥 ($M \propto B$)
- $B_{c1} < B < B_{c2}$:
 - 磁束が侵入するため磁化は減少

- $B_{c1} < B < B_{c2}$:
 - ピン留めの影響で渦糸は自由に動くことができず磁束密度は緩やかな立ち上がり
 - 磁場を下げたとしても、ピン留めの影響によって磁束は内部にトラップされる (残留磁化の発生)

硬い超伝導体の磁化メカニズム - 臨界状態モデル (Bean-London model)

Critical-state model

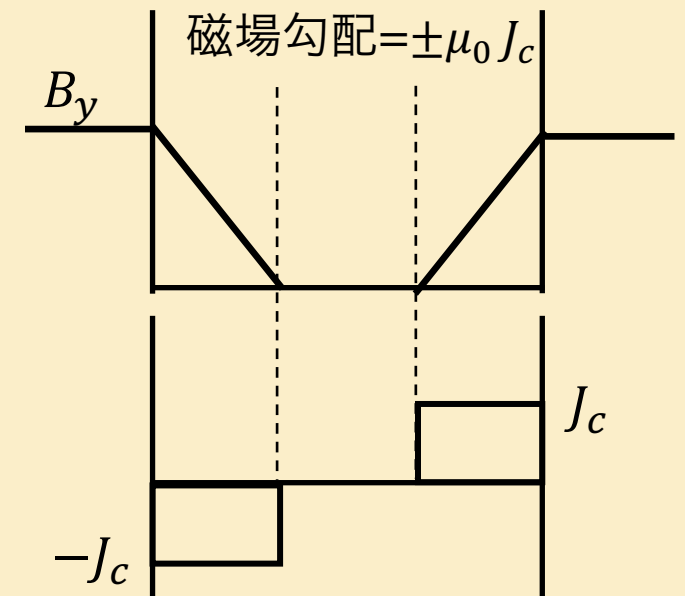
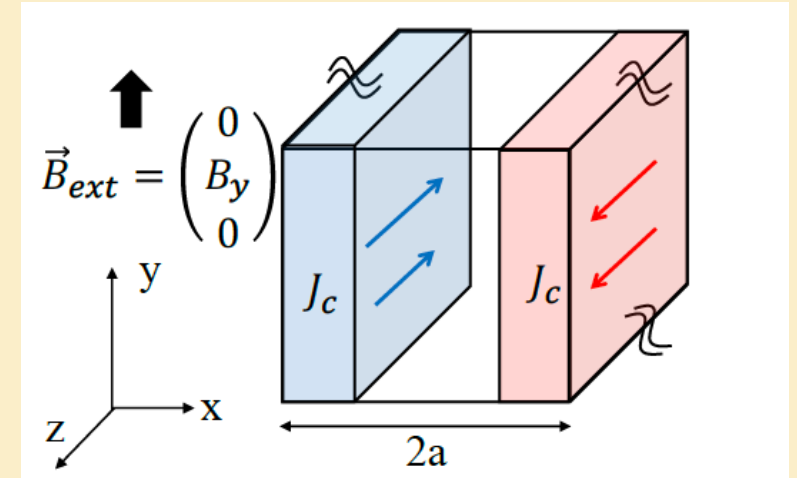
- 前提条件

- マイスナー状態は無視する。
- 外部磁場は超伝導内部に流れる遮蔽電流によって遮蔽される。
 $E = 0$ のため、遮蔽電流密度は臨界電流密度 J_c に一致する。
- J_c は磁場や温度によらず一定とする

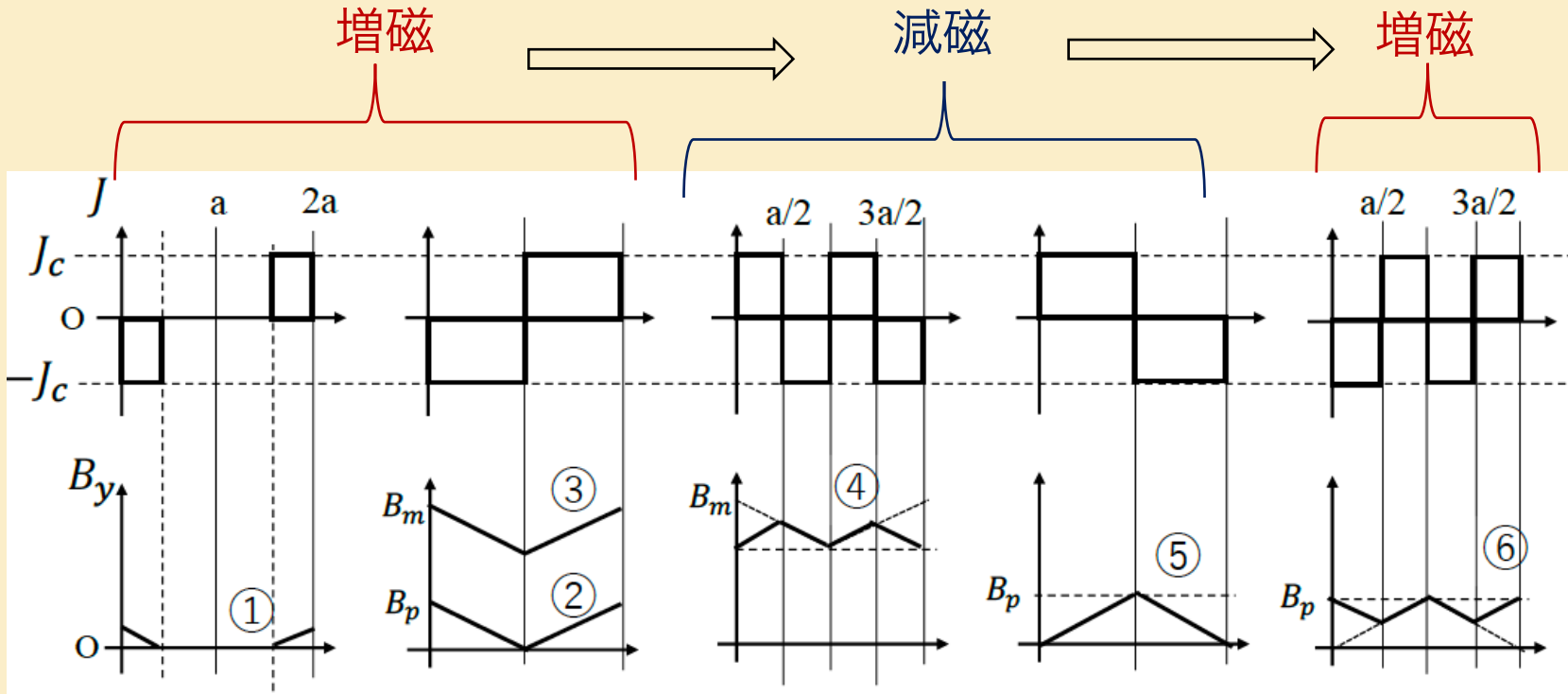
- モデル

- 厚み $2a$ の超伝導体の平板(slab)を考え、外部磁場 $\vec{B}_{ext} = (0, B_y, 0)$ を加えると

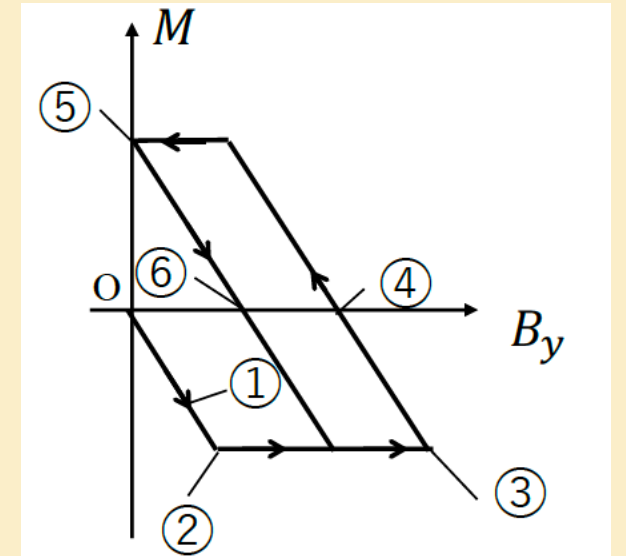
$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{J}_c \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \vec{e}_z = J_c \vec{e}_z$$



臨界状態モデルが示す磁化履歴



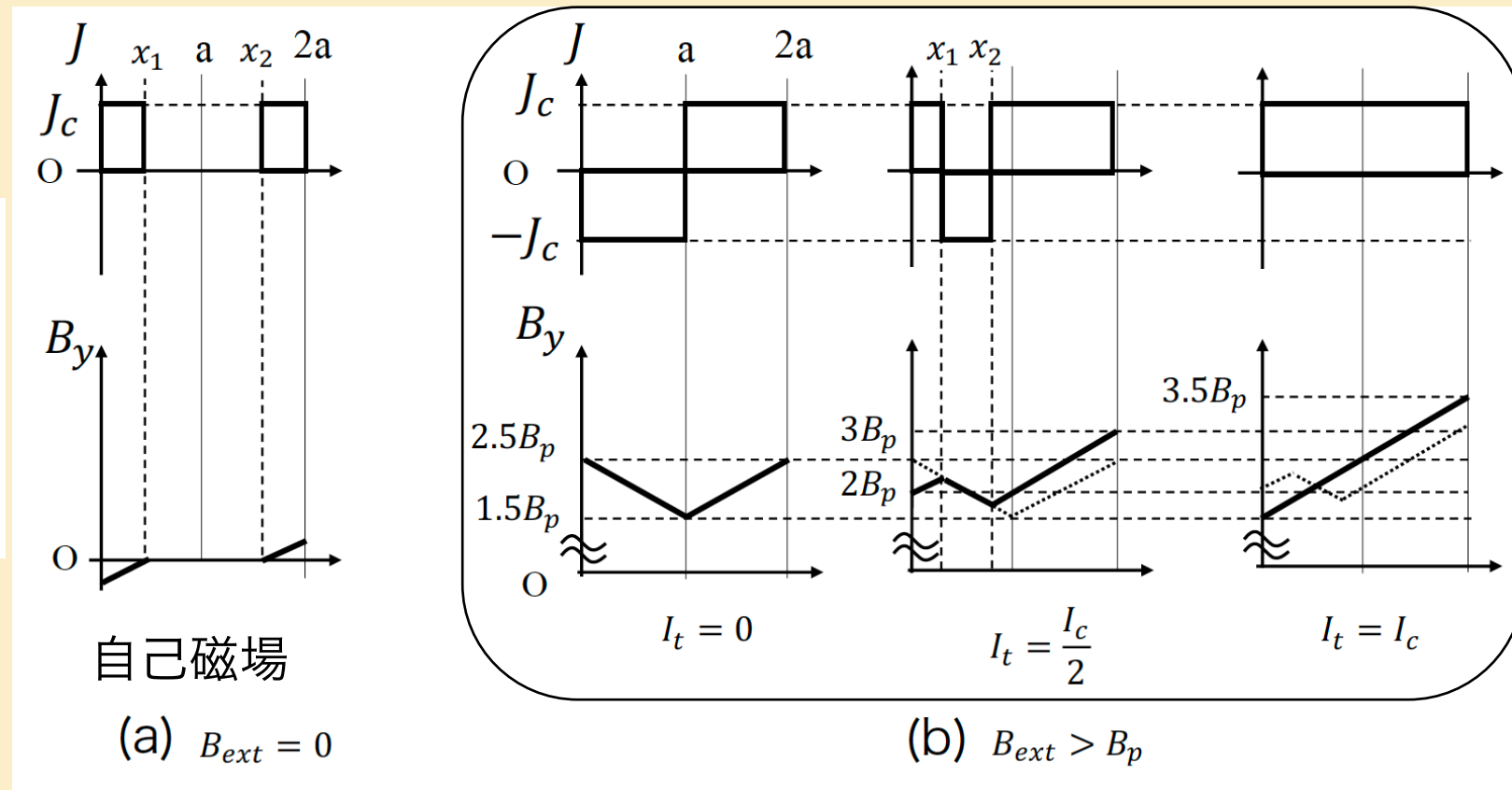
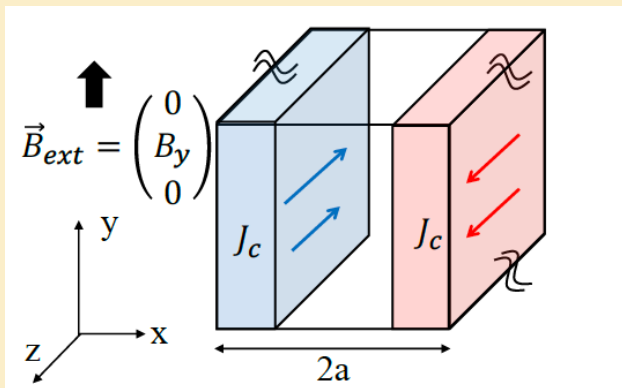
$$B = \mu_0(H + M)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{B_y}{\mu_0} \left(\frac{B_y}{2B_p} - 1 \right) \quad (0 \leq B_y \leq B_p) \\ M = -\frac{1}{2} J_c a \quad (B_y \geq B_p) \end{array} \right. \quad \text{磁化はslabのサイズ}a\text{に比例}$$

中心到達磁場
(Penetration field) :
 $B_p = \mu_0 J_c a$

通電時の磁化の振る舞い

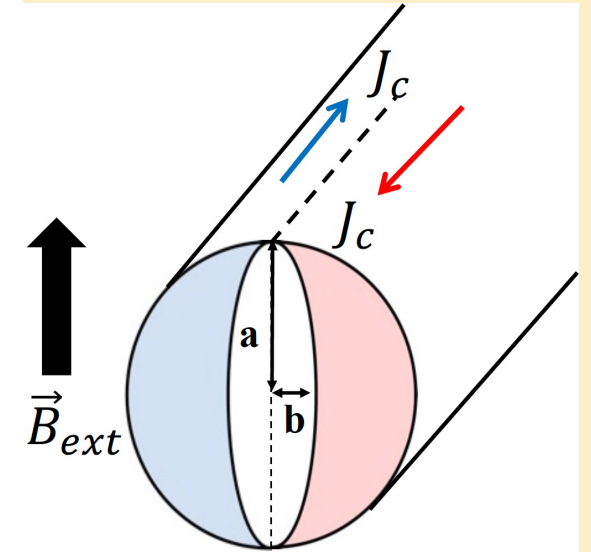
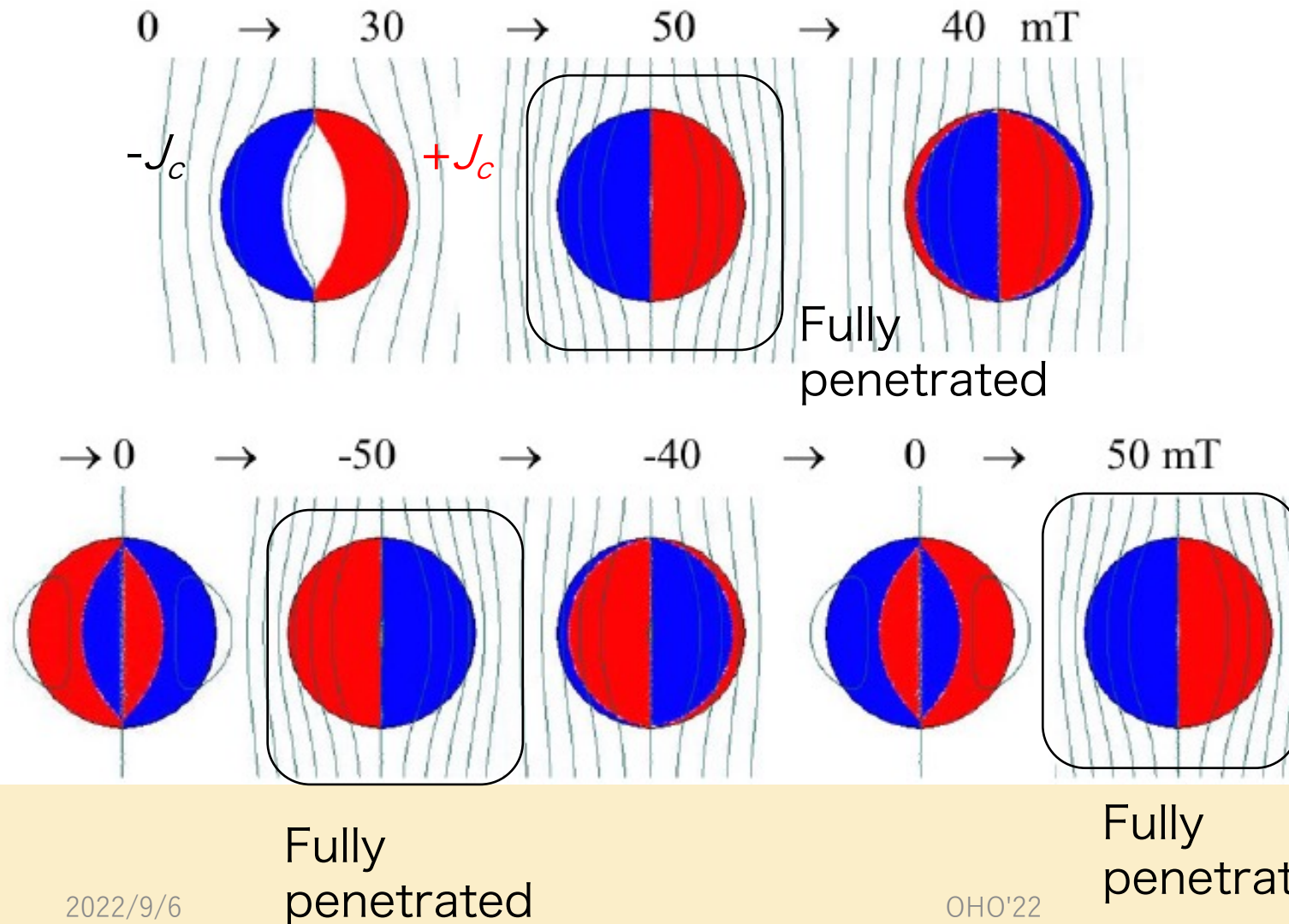


磁化は通電電流を上げるに従って減っていく \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{ll} M = -\frac{J_c}{2}a = M_0 & (I_t = 0) \\ M = -\frac{J_c}{4}a = \frac{1}{2}M_0 & (I_t = \frac{I_c}{2}) \\ M = 0 & (I_t = I_c) \end{array} \right.$$

丸芯線の臨界状態モデル

arXiv.1501.07159



$$M = -\frac{4}{3\pi} J_c \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) a. \quad (0 \leq B_{ext} \leq B_p)$$

$$M = -\frac{4}{3\pi} J_c a. \quad (B_{ext} > B_p)$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 J_c a}{\pi}$$

補足) 臨界面 - Critical surface

- 臨界状態モデルでは遮蔽電流密度は一定の臨界値 J_c をとるとした

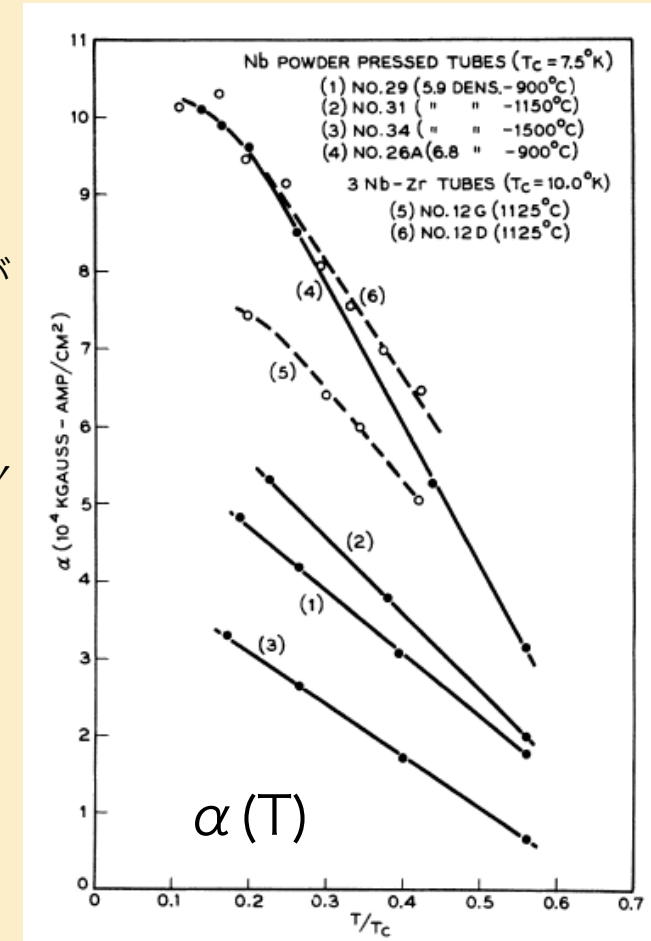
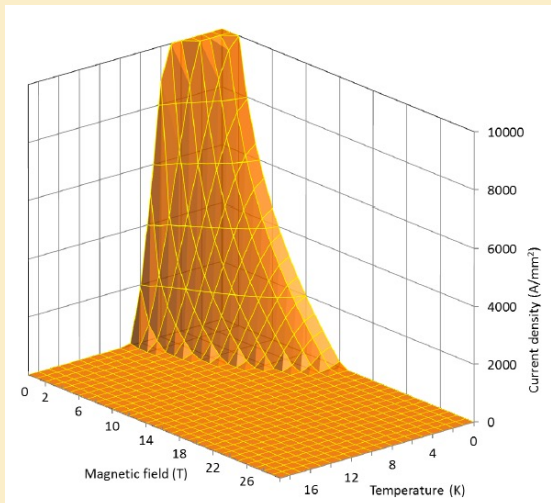
- 実際には J_c は温度と磁場に依存する

- Kim-Anderson model : $J_c(B, T) = \frac{\alpha(T)}{B+B_0}$

定数として扱っているケースが多い

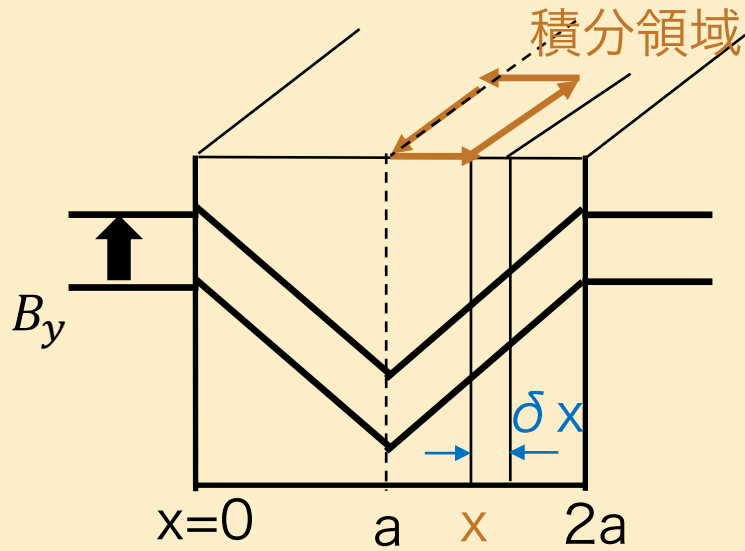
- By Bottura (NbTi) : $J_c(B, T) = \frac{J_c^{ref} c_0 B^{\alpha-1}}{B_c(T)} \left(1 - \frac{B}{B_c(T)}\right)^\beta \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{1.7}\right)^\gamma$

$$B_c(T) = B_c(T=0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{1.7}\right), \quad J_c^{ref} = J_c(5T, 4.2K)$$



Y.B.Kim *et al.*, Phys.Rev.Lett 9.(1962) p306-309

超伝導体の磁化損失(Hysteresis loss)



$$\oint \nabla \times \vec{E}(x) \cdot d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\rightarrow (E(x) + E(a)) = \dot{B}x$$

$$\leftrightarrow E(x) = \dot{B}x \quad (E(a) = 0)$$

長手方向単位長あたりの積分とした

δx のスライス部分で発生する熱損失:

$$p(x) = E(x)J_c\delta x = \dot{B}xJ_c\delta x$$

Slabの単位体積あたりの熱損失:

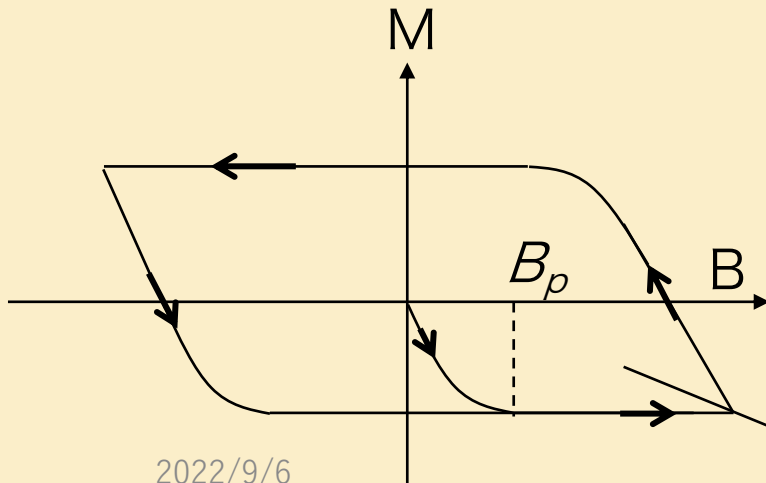
$$P = \frac{1}{a} \int_0^a p(x)dx = \frac{1}{a} \dot{B}J_c \int_0^a xdx = \dot{B} \frac{J_c a}{2} = M$$

単位時間あたりの熱損失(Wm^{-3}): $P = \dot{B}M$ ← 磁化の大きさに比例

$$\text{励磁で発生する熱損失}(\text{Jm}^{-3}): \int Pdt = M \int \dot{B}dt = MB$$

← 励磁速度に依存しない

1 サイクルであれば磁化曲線の面積に相当する

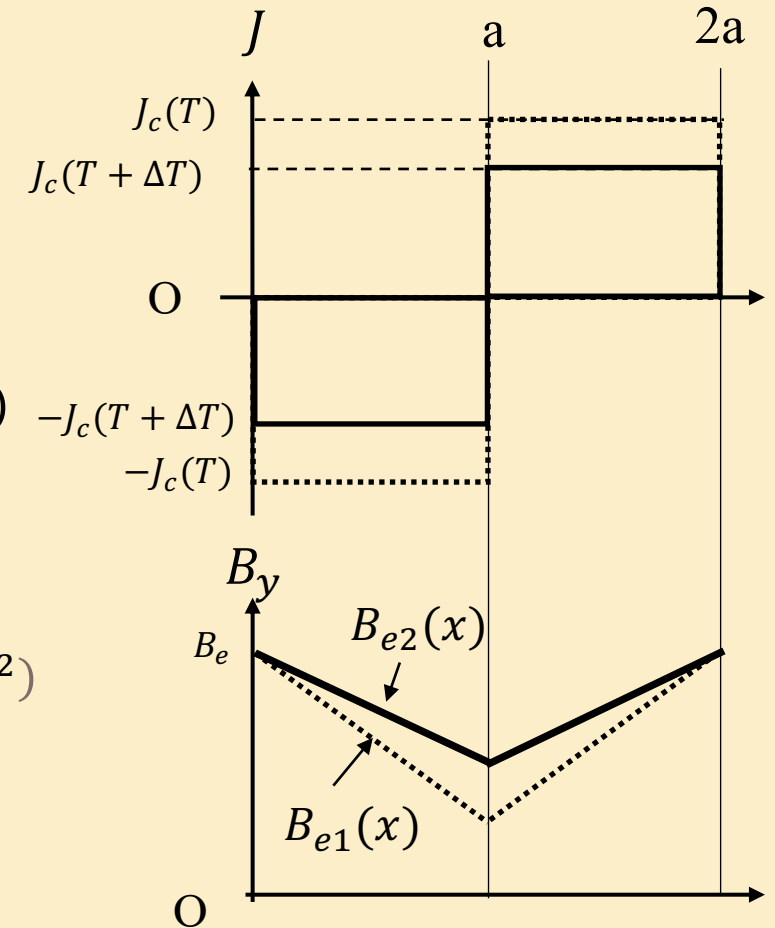


1. 実用的な超伝導体の特性

- 前講義のおさらい
- 磁化モデル (Critical state model)
- 磁気安定性 (Flux jump)

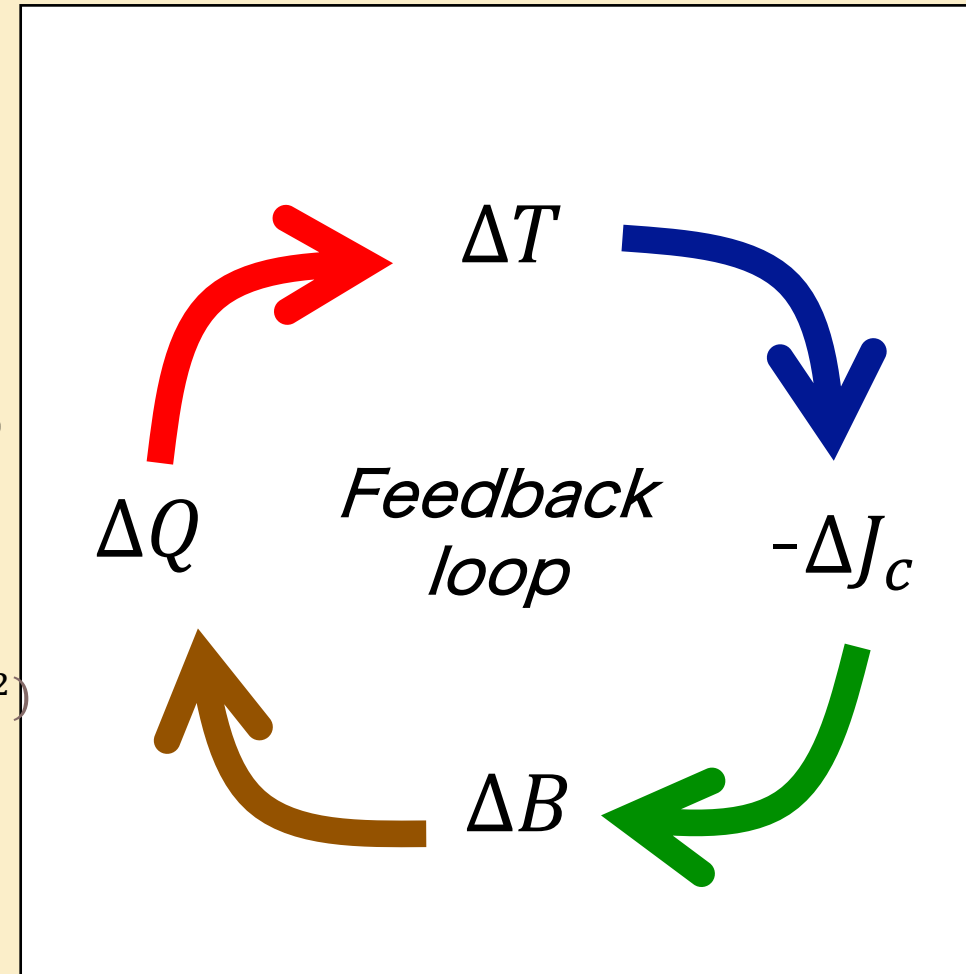
磁束跳躍 (Flux jump)

1. 熱擾乱による温度上昇: $T \rightarrow T + \Delta T$
2. 遮蔽電流密度の減少: $J_c(T) \rightarrow J_c(T + \Delta T) = J_c(T) - \Delta J_c$
3. 磁束のさらなる侵入: $B_{e1}(x) \rightarrow B_{e2}(x) = B_{e1}(x) - \Delta B_e(x)$
 $\Rightarrow \Delta B_e(x) = \mu_0 \Delta J_c x$
4. 電場の発生: $\int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\Delta B_e(x)}{\Delta t} \cdot d\vec{S}$
 $\Rightarrow E(x) = -\mu_0 \frac{\Delta J_c}{\Delta t} \frac{1}{2} (a^2 - x^2)$
5. ジュール熱の発生: $\Delta g = \frac{1}{a} \int_0^a -J_c E(x) \Delta t dx$
6. 温度上昇: $\Delta T = \frac{\Delta Q}{c}$



磁束跳躍 (Flux jump)

1. 熱擾乱による温度上昇: $T \rightarrow T + \Delta T$
2. 遮蔽電流密度の減少: $J_c(T) \rightarrow J_c(T + \Delta T) = J_c(T) - \Delta J_c$
3. 磁束のさらなる侵入: $B_{e1}(x) \rightarrow B_{e2}(x) = B_{e1}(x) - \Delta B_e(x)$
 $\Rightarrow \Delta B_e(x) = \mu_0 \Delta J_c x$
4. 電場の発生: $\int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\Delta B_e(x)}{\Delta t} \cdot d\vec{S}$
 $\Rightarrow E(x) = -\mu_0 \frac{\Delta J_c}{\Delta t} \frac{1}{2} (a^2 - x^2)$
5. ジュール熱の発生: $\Delta g = \frac{1}{a} \int_0^a -J_c E(x) \Delta t dx$
6. 温度上昇: $\Delta T = \frac{\Delta Q}{c}$



磁束跳躍 - **Adiabatic** stability condition

$$\Delta Q + \Delta g = C\Delta T \quad \text{断熱条件下}$$

他熱損失等 ΔQ Flux jumpによる
ジュール熱損失 Δg

- 超伝導Slabの場合:

$$\Delta Q = C\Delta T - \Delta g \Leftrightarrow \Delta Q = \left(C - \mu_0 J_c^2 a^2 \frac{1}{3(T_c - T_{op})} \right) \Delta T$$

< 0 : 不安定

- Slabサイズ(a)に課せられる条件:

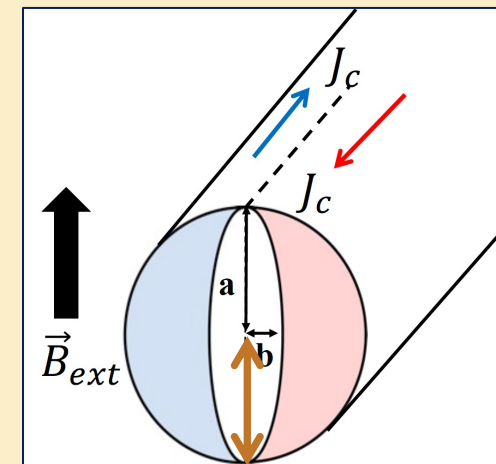
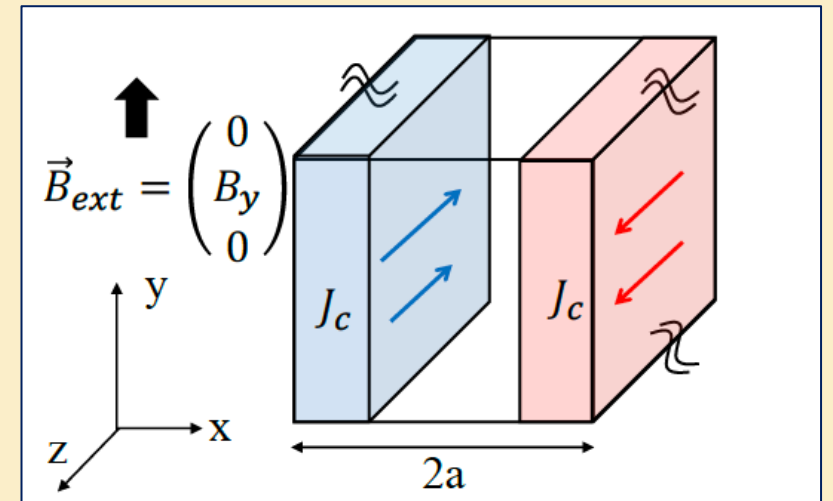
$$a < \sqrt{\frac{3C(T_c - T_{op})}{\mu_0 J_c^2}}$$

- 超伝導丸芯線の場合

- ワイヤ半径に課せられる条件:

$$r < \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{C(T_c - T_{op})}{\mu_0 J_c^2}}$$

オーダー 数10 μm
OHO'22



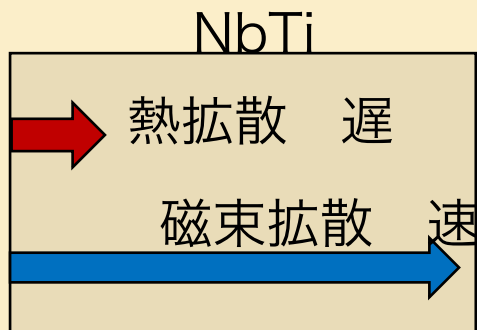
磁束跳躍 – **Dynamic stability condition**

常伝導体内部の磁場（磁束）の拡散速度はMaxwell方程式 ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\frac{\rho}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{E}$) より、

$$D_m \nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (D_m = \mu_0 / \rho) \quad \rho: \text{抵抗率}$$

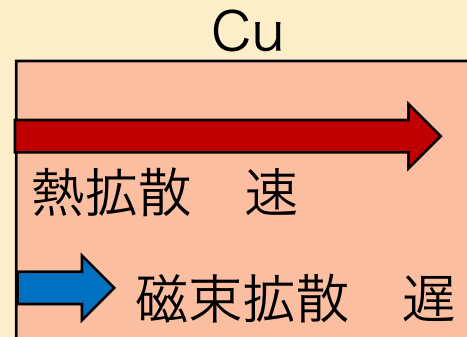
一方で熱の拡散速度は $D_t \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$ ($D_t = k/C$) k : 熱伝導率

	NbTi	Copper	
	Normal state	B=0 T	B=6 T
D_t	2×10^{-5}	1.1	0.3
D_m	0.5	8×10^{-5}	3×10^{-4}

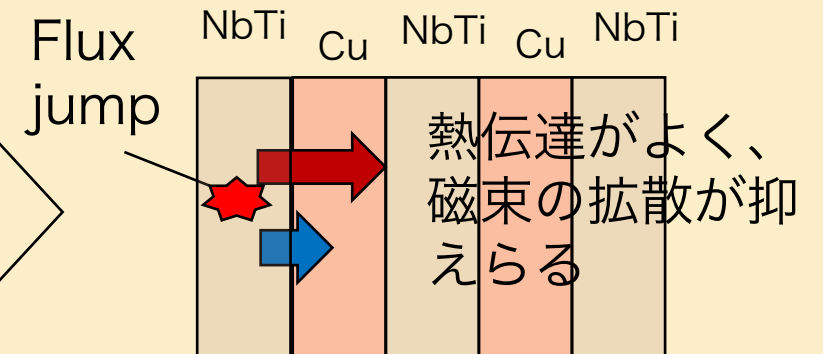


$D_m \gg D_t$ (~断熱近似)

→ Flux jump



$D_m \ll D_t$

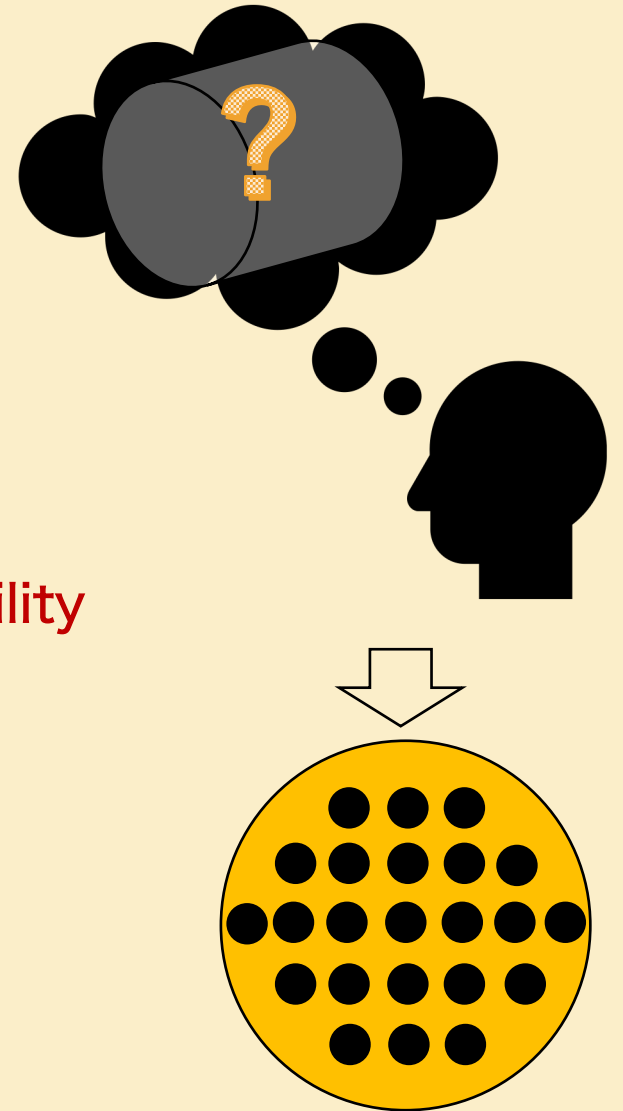


$D_m \ll D_t$ と併用

→ Dynamic stability

実用超伝導”線”の必要条件

- 硬い超伝導体であること
 - 十分なピン留め力 → High J_c
- (丸芯線あれば) ワイヤー径を小さくすること
 - 磁化・磁化損失の影響を最小限に → Field quality, Stability
 - Flux jump (Adiabatic stability) の要求
→ Stability
- 熱伝導の良い (抵抗の小さい) 物質と併用すること
 - Flux jump (Dynamic stability) からの要求
→ Stability



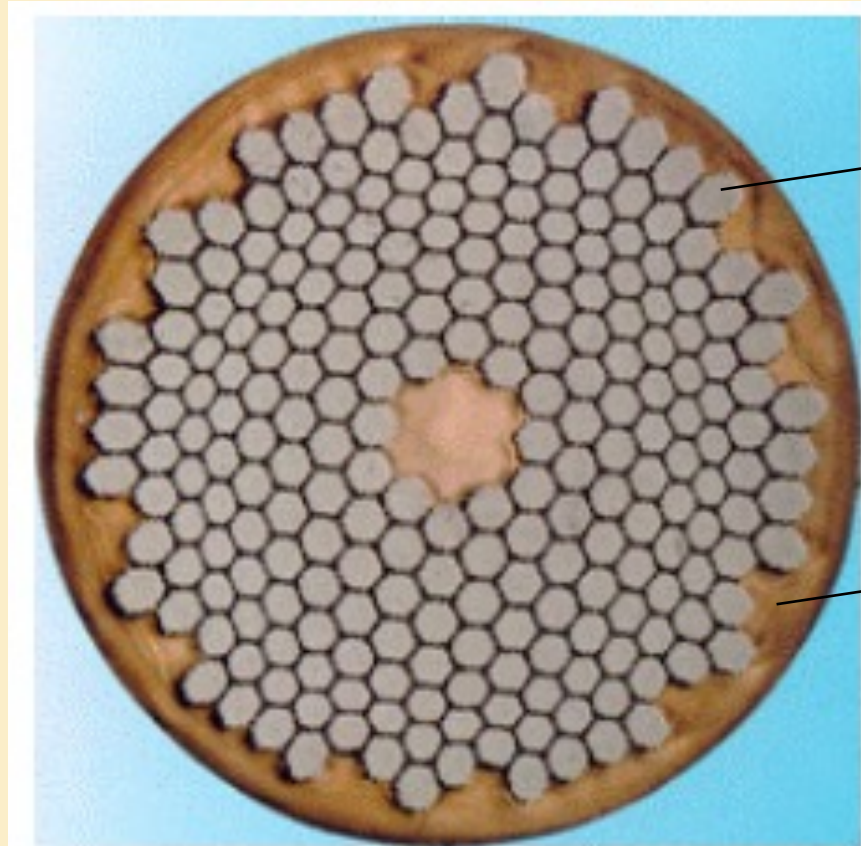
2. 超伝導ケーブル「NbTi」の特性

- 極細多芯線 (素線、Strand)
- Rutherford cable

極細多芯線 (Multifilamentary wire) - NbTi

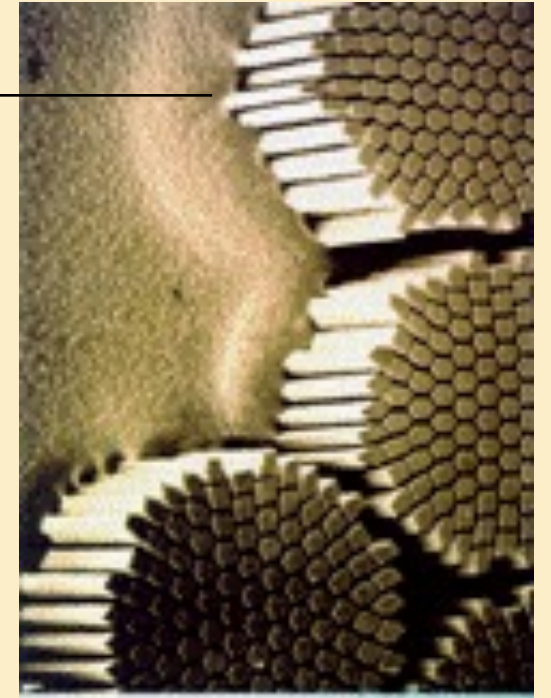
$$M = -\frac{4}{3\pi} J_c r$$

← ~1 mm →



NbTi フィラメント ($\phi \sim 5 \mu\text{m}$)

銅母材 (Copper matrix)

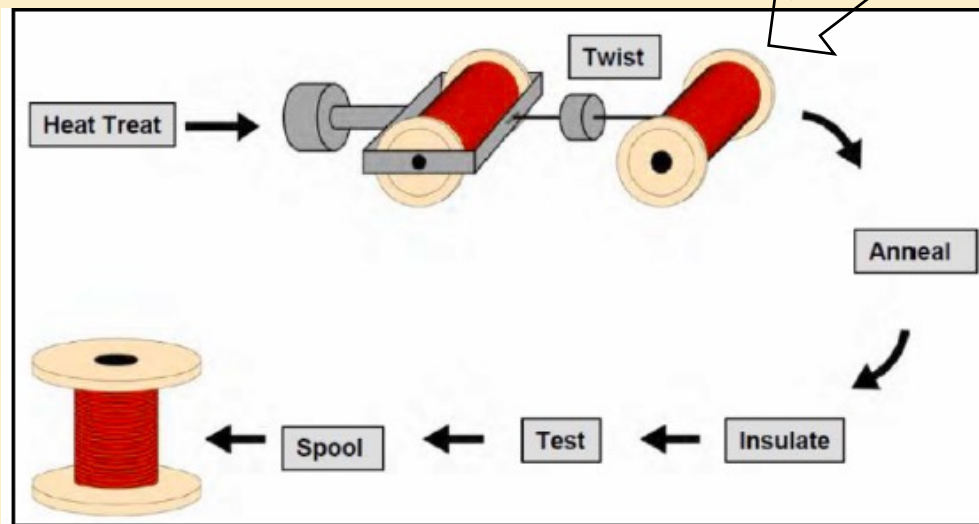
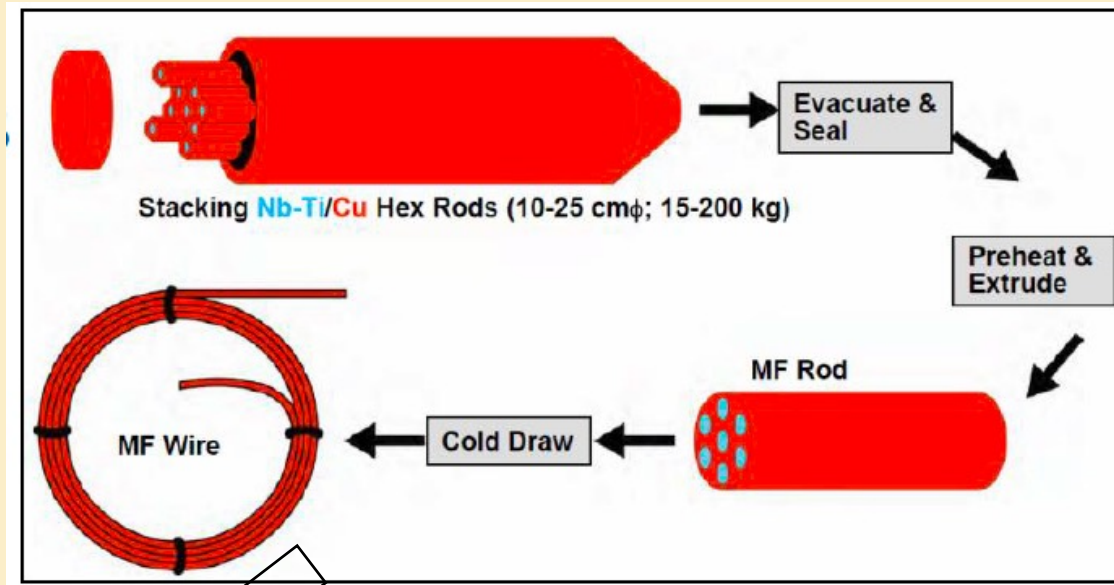
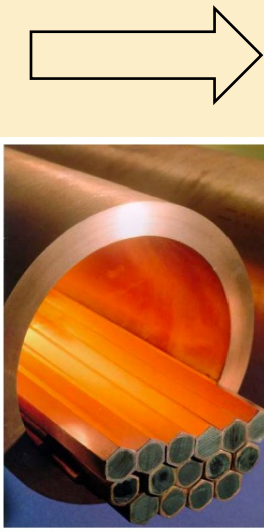
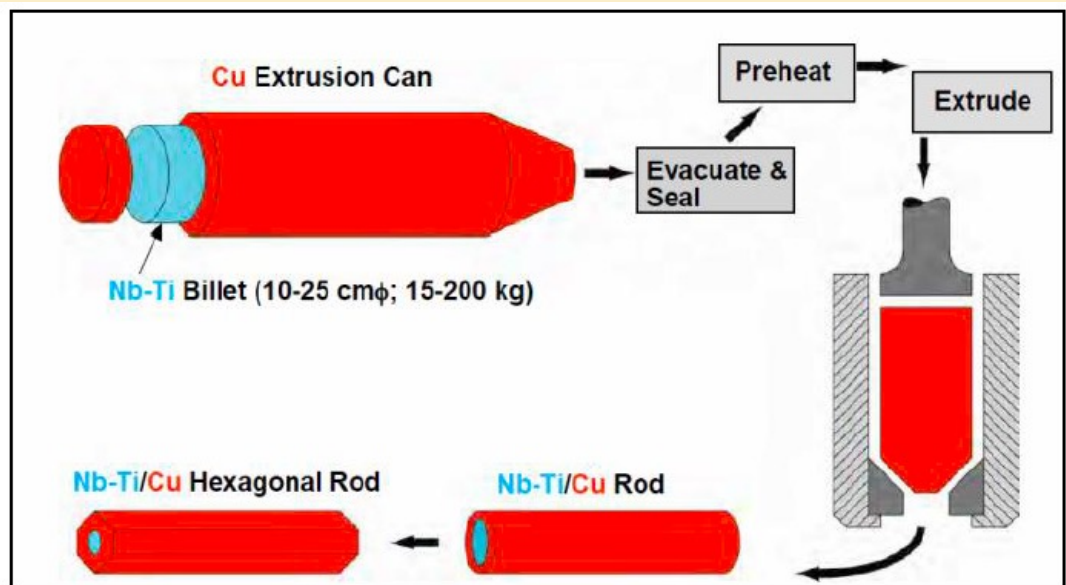


<https://lhc-machine-outreach.web.cern.ch/components/cable.htm>

超伝導素線 (Strand)

Strand filling factor : $\eta_{SC} = \frac{1}{1 + \lambda}$
Copper to SC area ratio : $\lambda = \frac{a_{Cu}}{a_{SC}}$

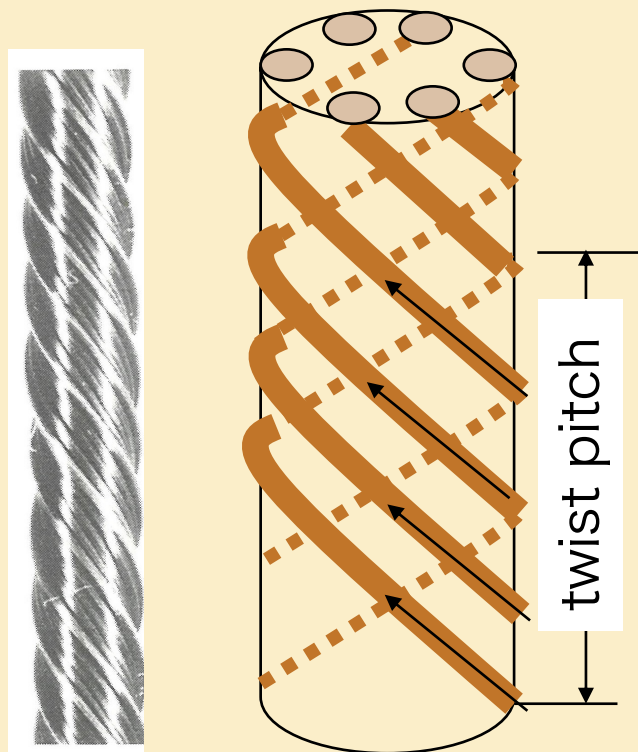
NbTi 極細多芯線 製造工程



P. Ferracin,
EUCAS2017

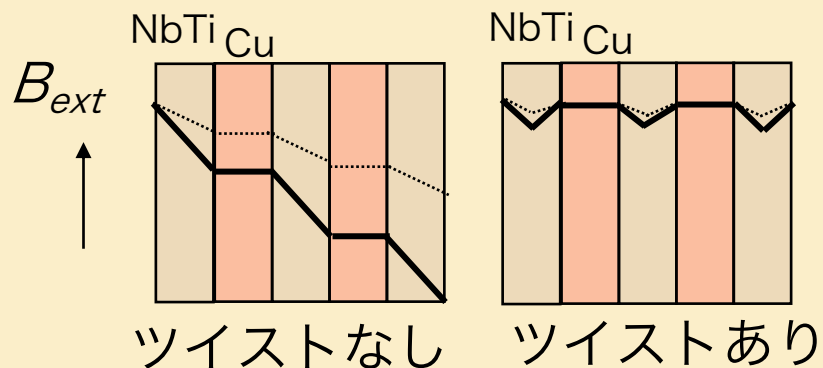
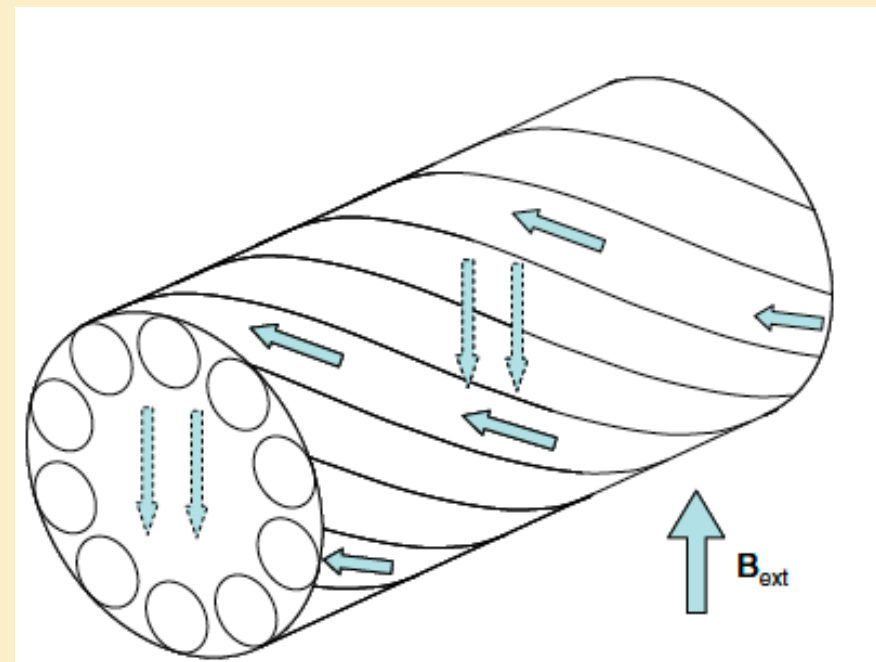
極細多芯線の結合電流(Coupling current)

ツイストすることで電磁特性が改善される



しかし

M.N. Wilson, Cryogenics 48 (2008) p381-395



Flux jumpに
対しても安定
(磁束の侵入量
を抑制)

時間的に変動する磁場下では銅母材を横切る形でフィラメント間と結合する電流が流れる
= Inter-filament coupling current (IFCC)

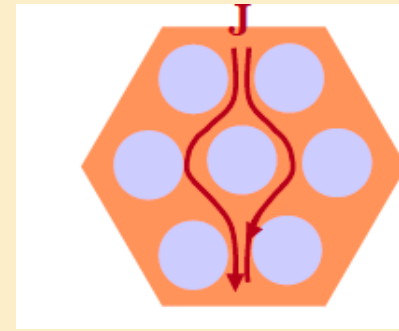
IFCCの磁化特性

• 結合電流によって生じる磁化特性

- 結合時定数： $\tau_{if} = \frac{\mu_0}{2\rho_{eff}} \left(\frac{L_p}{2\pi}\right)^2 L_p$ ツイストピッチ

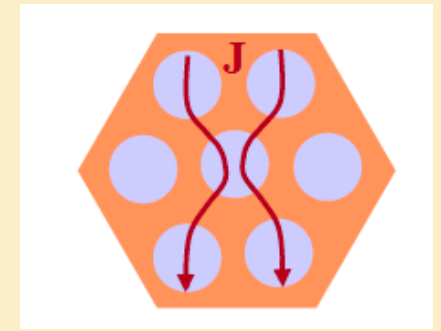
- 磁化： $M_{if} = \frac{2}{\mu_0} \frac{dB_i}{dt} \tau_{if}$

- 交流損失 (Wm^{-3})： $P_{if} = M_{if} \dot{B} = \frac{\dot{B}^2}{\rho_{eff}} \left(\frac{L_p}{2\pi}\right)^2$



高抵抗
(poor contact)

$$\rho_{eff} = \rho_{Cu} \frac{1 + \eta_{SC}}{1 - \eta_{SC}}$$

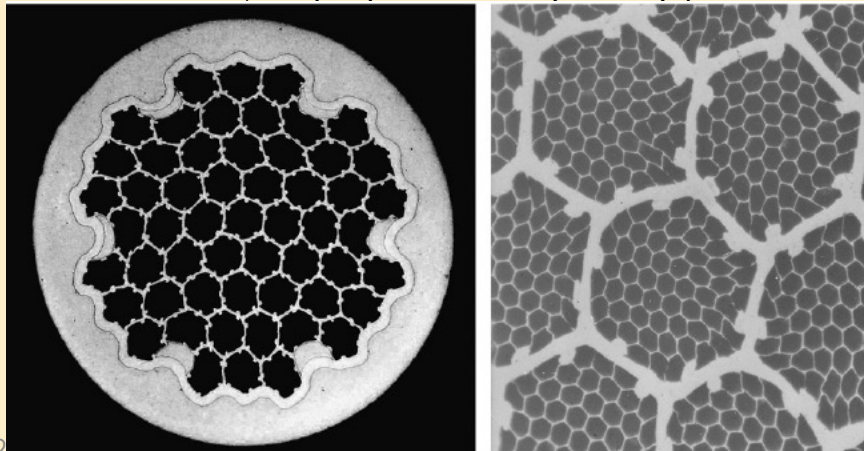


低抵抗
(good contact)

$$\rho_{eff} = \rho_{Cu} \frac{1 - \eta_{SC}}{1 + \eta_{SC}}$$

→磁気不安定性の議論とは逆で熱損失を減らすには抵抗率を上げる必要がある

M.N. Wilson, Cryogenics 48 (2008) p381-395



CuNi Barrier

←IFCCが横切る際に感じる抵抗だけを高くする工夫

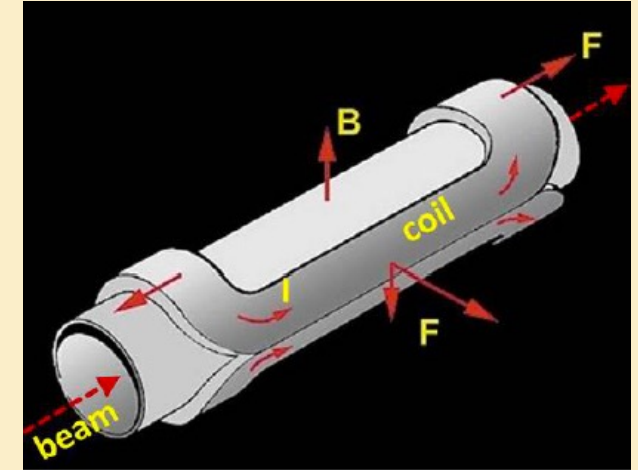
2. 超伝導ケーブル「NbTi」の特性

- 極細多芯線 (素線、Strand)
- Rutherford cable

極細多芯線を用いた超伝導ケーブル

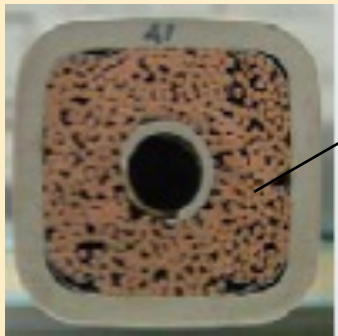
- 用途：大電流化

- 多芯線 1 本あたりの臨界電流値 (4.2K, 5T) : $J_c \times A \times \lambda = 1 \text{ kA}$
- 加速器利用では (せっかく超伝導体を使うなら) 低インダクタンス化
 - ✓ シンクロトロン電源の電力消費 ($P=Ldi/dt \times I$)
 - ✓ 熱保護 (クエンチ保護) の観点では遮断時定数 ($\tau=L/R$)
- → 多芯線 (素線) を寄せ集めた「ケーブル」を使う



Cable-in-conduit conductor (CICC)

核融合炉
利用



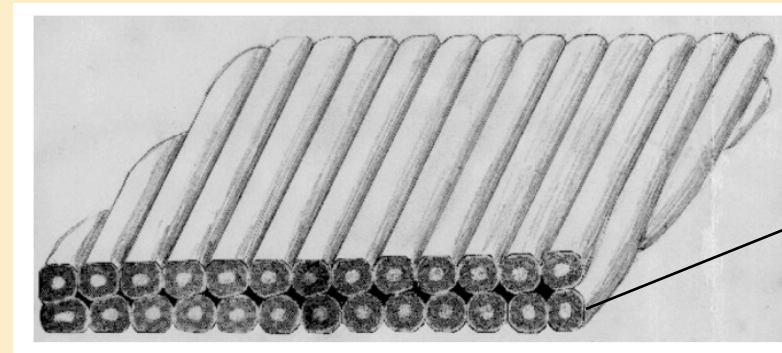
多芯線
(素線、
Strand)

~20kA

K. Kizu, *et al.*, Fusion Engineering and design
84 (2008) p1058-1062

Rutherford cable

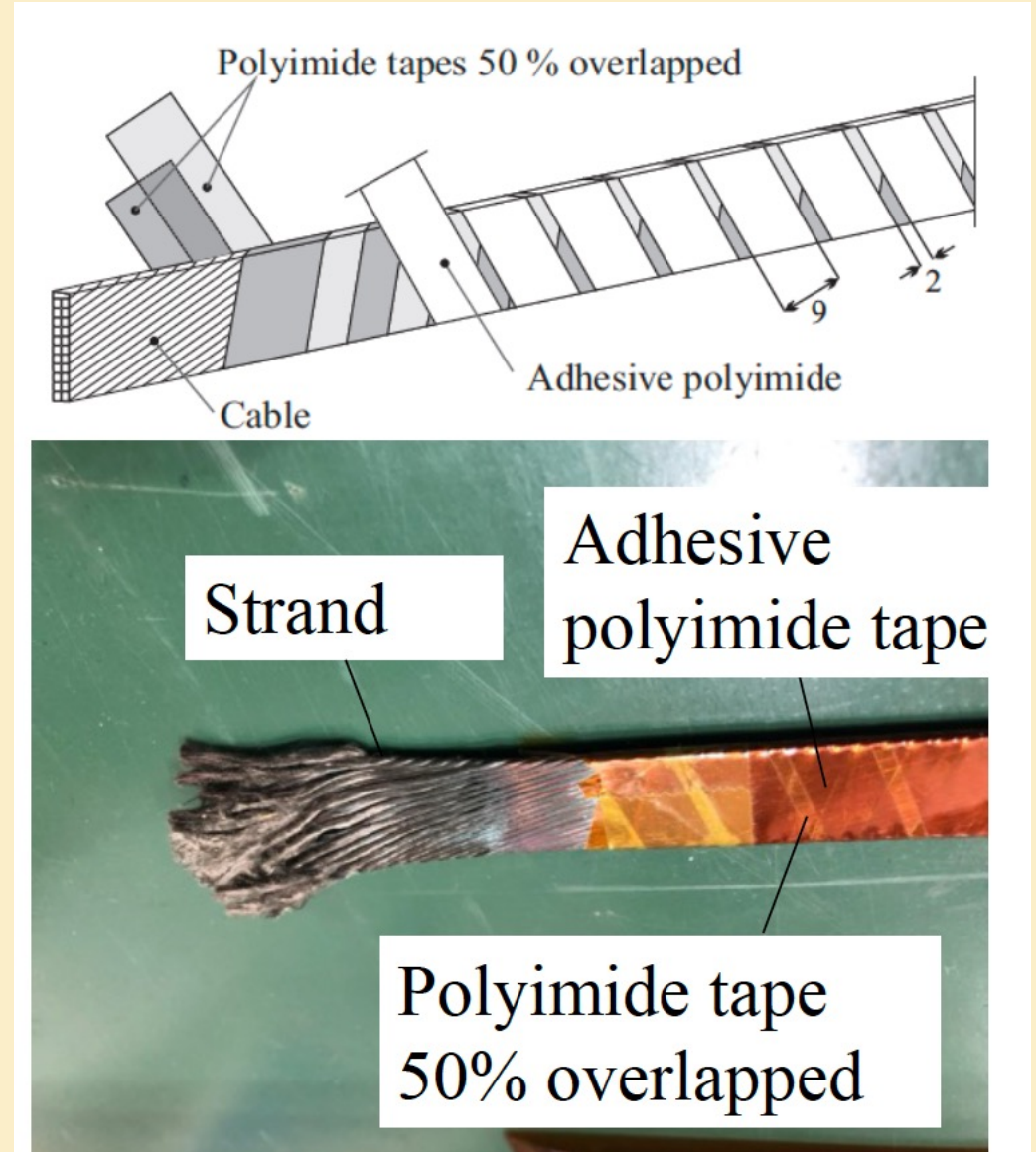
加速器
利用



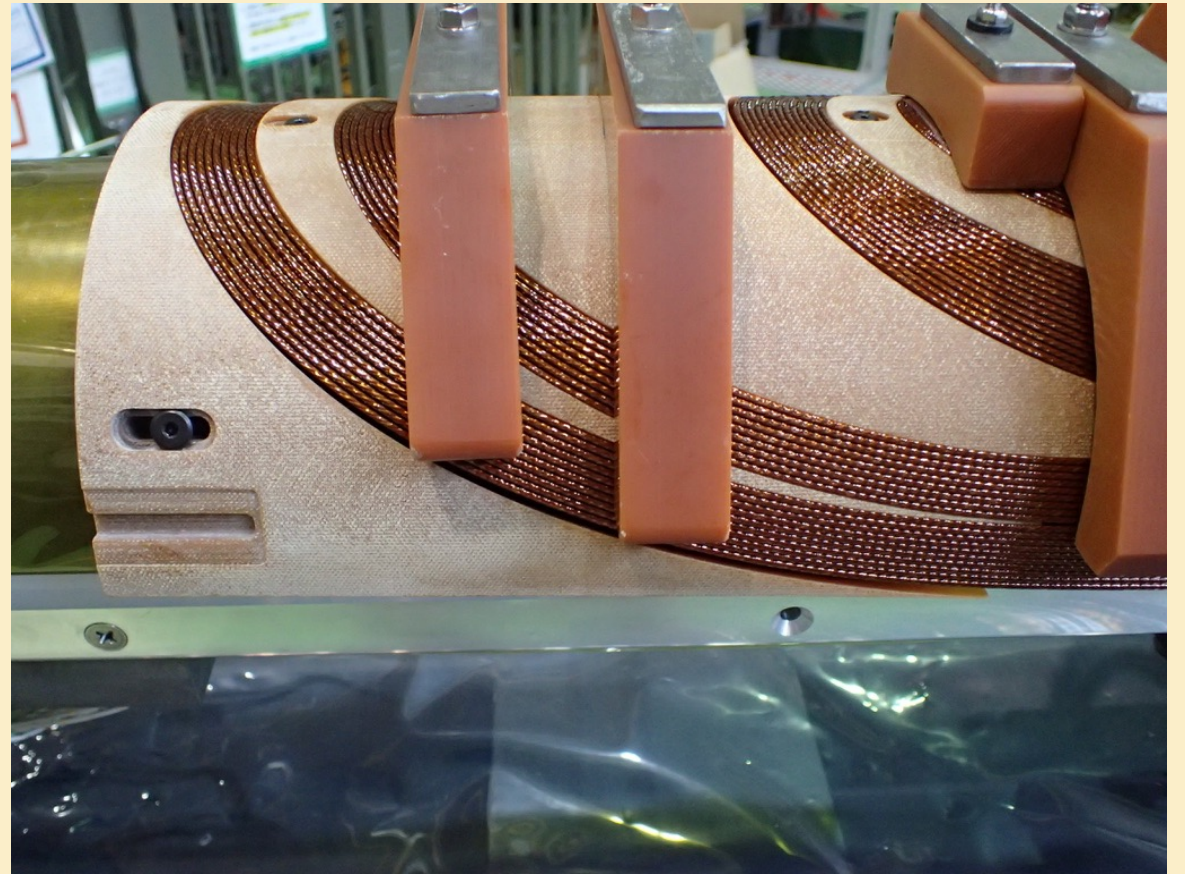
多芯線
(素線、
Strand)

~10kA

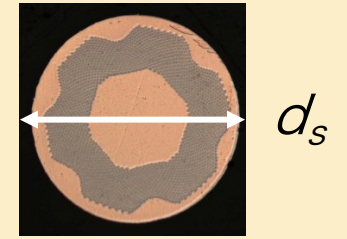
NbTi Rutherford cable



NbTi Rutherford cable



NbTi Rutherford cable 幾何形状



- コイル成形のためのキーストーン角 $\sim 1 - 2^\circ$
 - Compaction factorの導入。口径が小さいほど技術的に難しくなる
- 電磁特性向上のため撚り合わせられる (Transpose)。ピッチ長 = 60 - 100 mm
- $J_E \sim 500 - 1000 \text{ A/mm}^2$

Cable packing factor or filling factor: $\eta_f = \frac{N_s \pi (d_s/2)^2}{2w_c(t_1 + t_2) \cos \beta_t}$

ピッチ角

Compaction factor: $f_c = \frac{t_1}{2d_s} > 0.75$

Engineering current density: $J_E = \underbrace{\eta_f \cdot \eta_{SC} \cdot \eta_i}_{\sim 0.3} J_c$

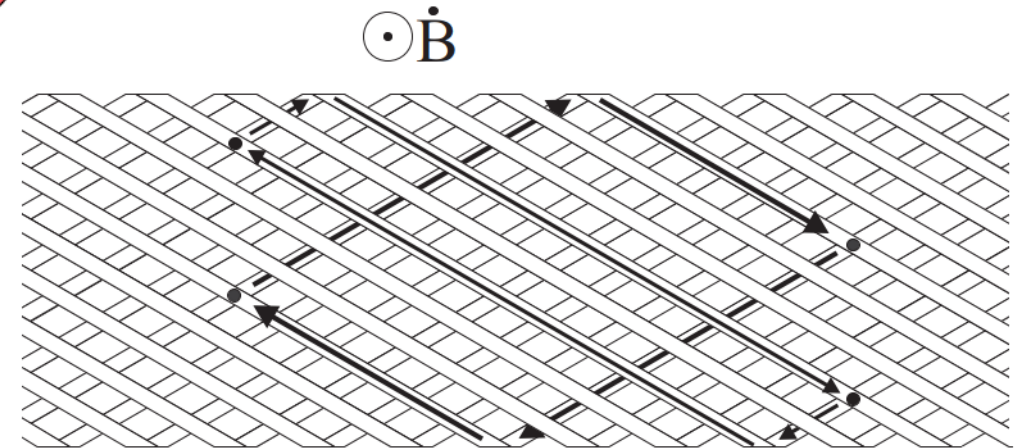
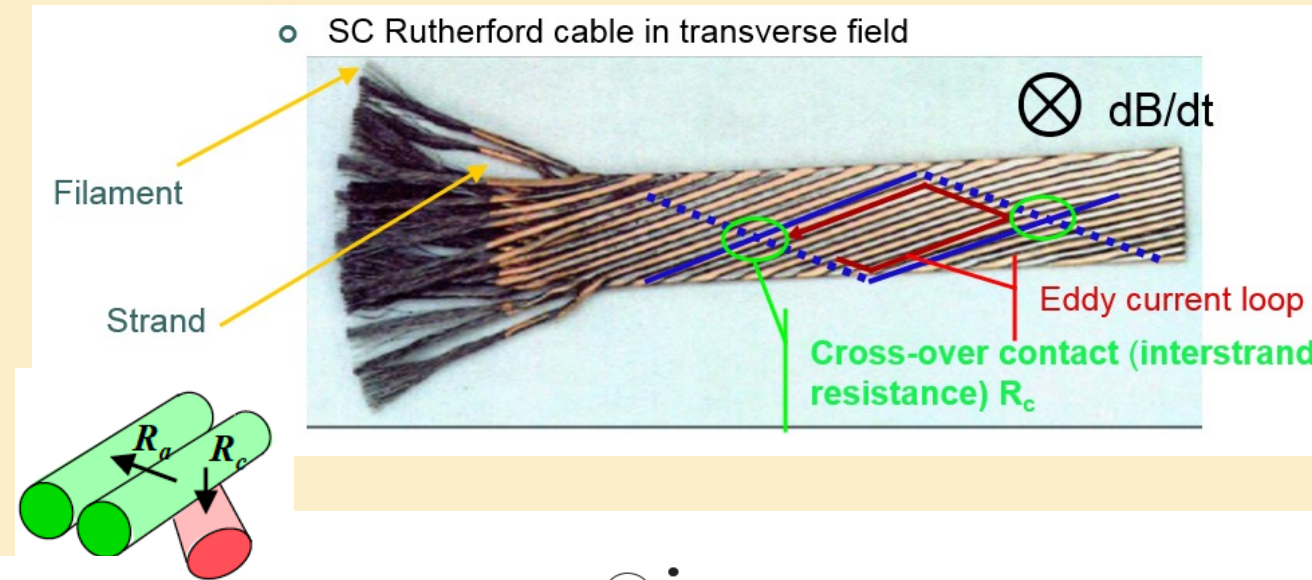
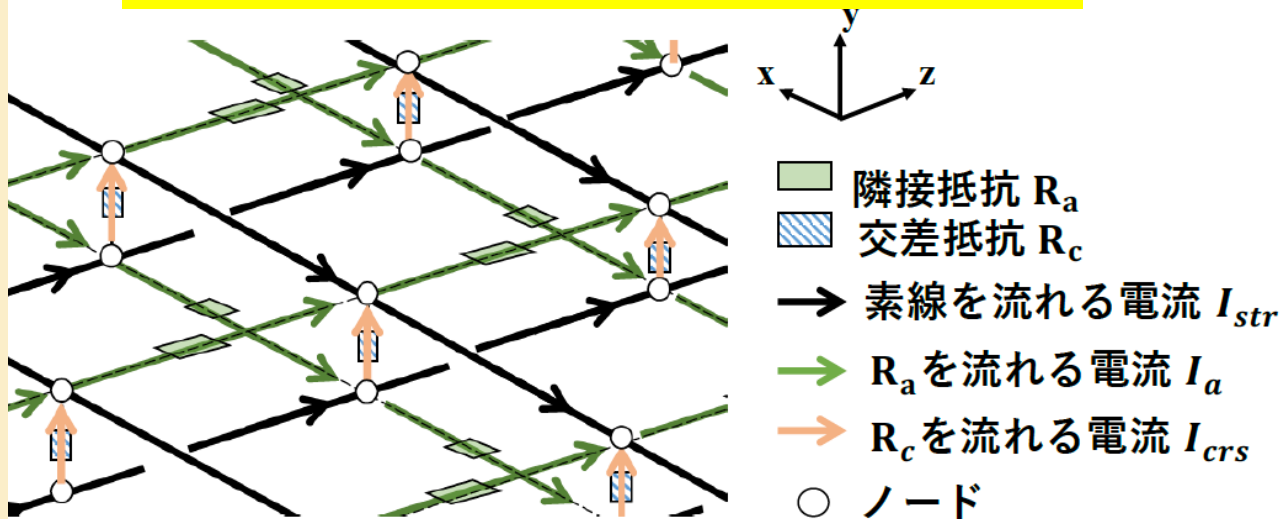
ケーブル面積に占める絶縁の割合

Rutherford cableの結合電流

- ケーブルとして組んだ場合、変動磁場に対して素線間の結合電流が生じるが、これはInter-strand Coupling Current (ISCC)とも呼ばれる

- 隣接抵抗 R_a
 - 交差抵抗 R_c
- } 1-10 $\mu\Omega$

電磁解析のためのネットワークモデル例



ISCCの磁化特性

解析的な導出 by M.N.Wilson

- 交差抵抗 R_c を介した結合の場合

$$- \text{磁化} : M_n^c = - \frac{1}{120R_c} \frac{dB_n}{dt} L_{pc} N_s (N_s - 1) \frac{w}{t}$$

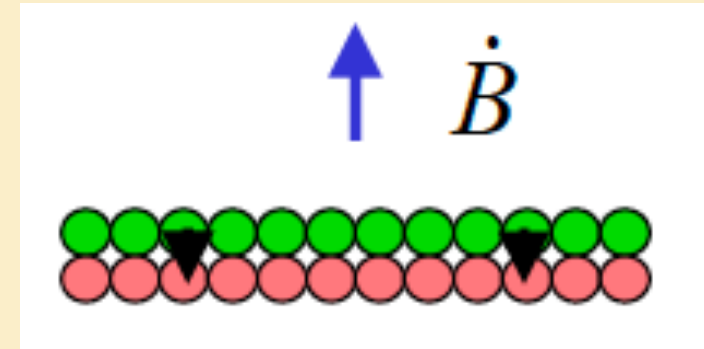
N_s : 素線数
 w : ケーブル幅
 t : ケーブル厚
 L_{pc} : ツイストピッチ

$$- \text{交流損失 (Wm}^{-3}\text{)} : P_{is,n} = M_n^c \dot{B} = \frac{1}{120R_c} \dot{B}^2 L_{pc} N_s (N_s - 1) \frac{w}{t}$$

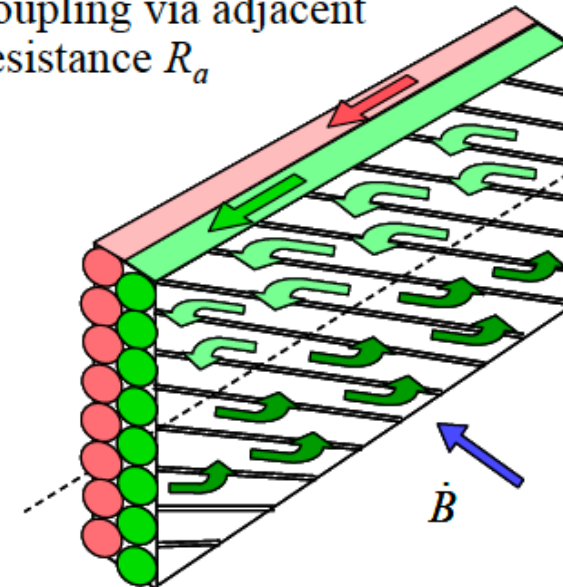
- 隣接抵抗 R_a を介した結合の場合

$$- \text{磁化} : M_n^a = - \frac{1}{3R_a} \frac{dB_n}{dt} L_{pc} \frac{w}{t}$$

$$- \text{交流損失 (Wm}^{-3}\text{)} : P_{is,a} = M_a^c \dot{B} = \frac{1}{3R_a} \dot{B}^2 L_{pc} \frac{w}{t}$$



- Field transverse coupling via adjacent resistance R_a



M.N.Wilson, JUAS 2017

結合電流による磁化の比較

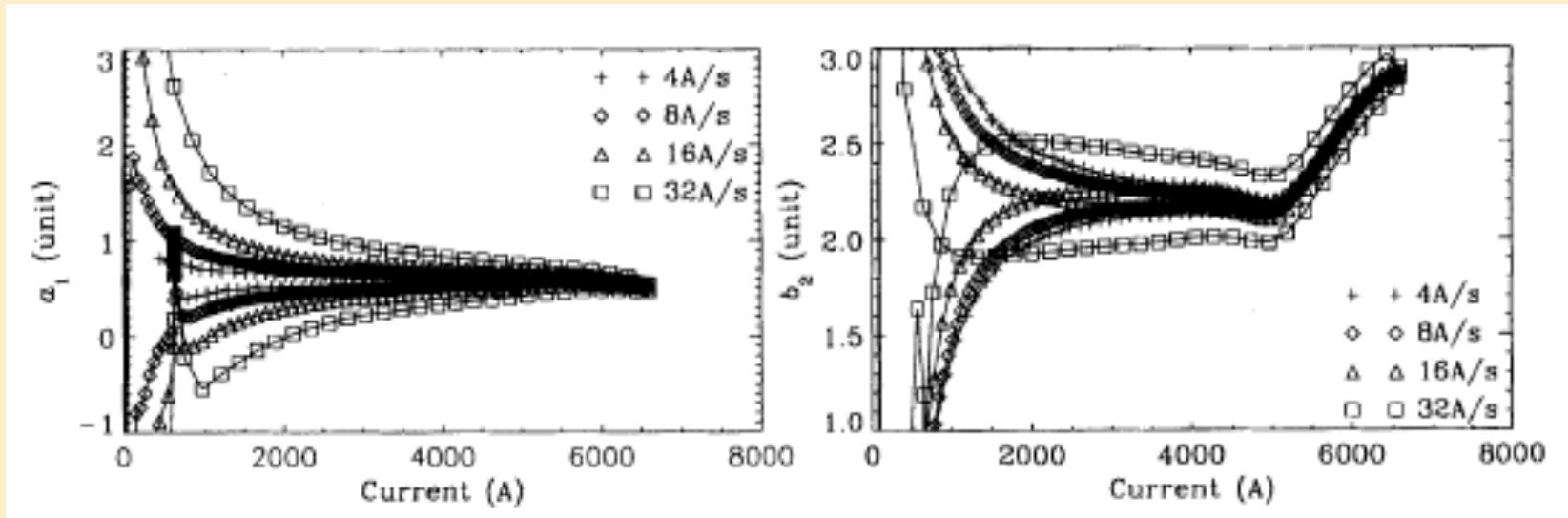
	IFCC	ISCC	BICC*
結合時定数 [s]	0.01	0.1 – 1	10 – 10 ⁵
磁化 ($\times \dot{B}$ [T])	0.01	0.1 – 1	-
実運用による影響	交流損失	交流損失 磁場精度 (Ramp rate dependence)	磁場精度 (Decay and snapback)

\dot{B} :磁場の掃引速度

(*) Boundary-Induced Coupling Current

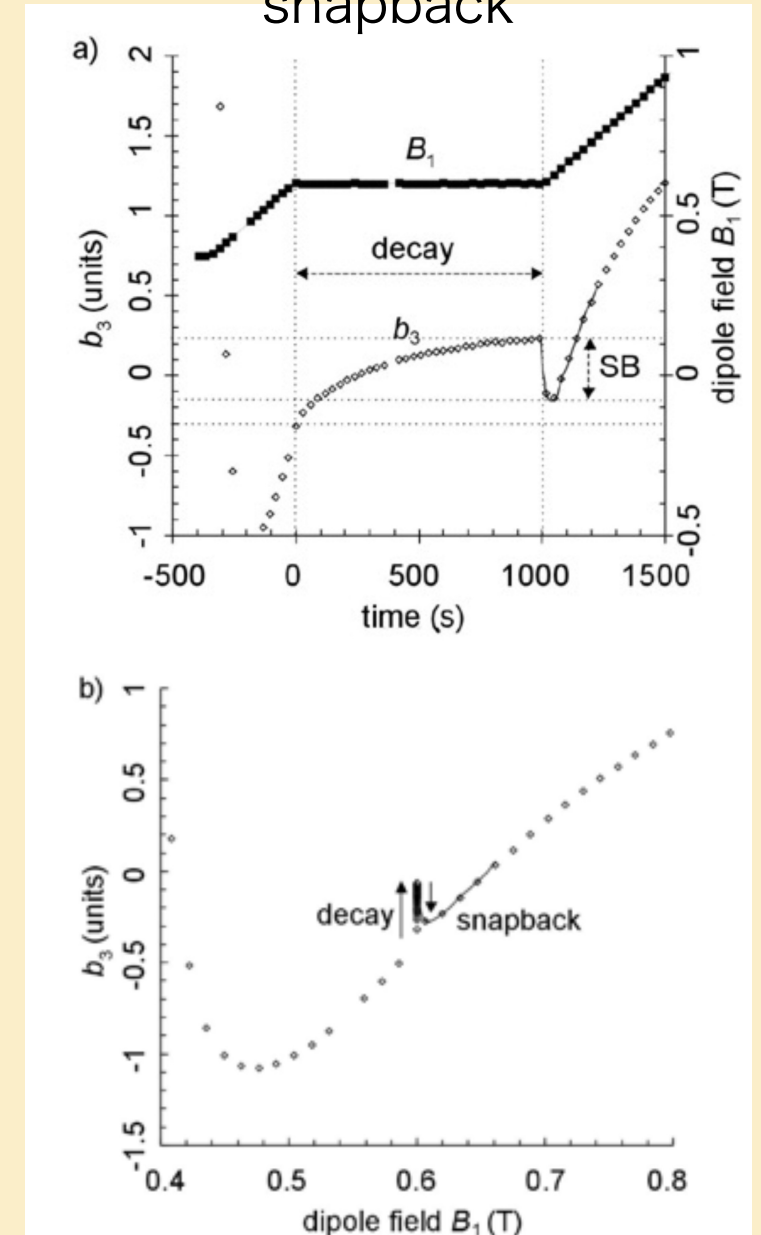
磁場精度への影響

SSC Dipole magnet



T. Ogitsu *et al.*, Particle Accelerator **57** (1997)

Decay and snapback



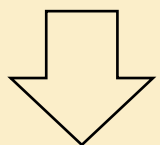
3. クエンチ保護

- MPZ・MQE

- クエンチ検出と保護

常伝導転移 (Quench)

熱擾乱により温度上昇
→臨界面を超える
→クエンチ (不可逆過程)



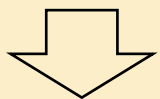
適切な処理を怠ると

蓄積エネルギー : $E = \frac{1}{2}LI^2$

➡ 加速器用超伝導電磁石の場合: $E \sim 1 - 10\text{MJ}$

ジュール熱 : $G = RI^2$

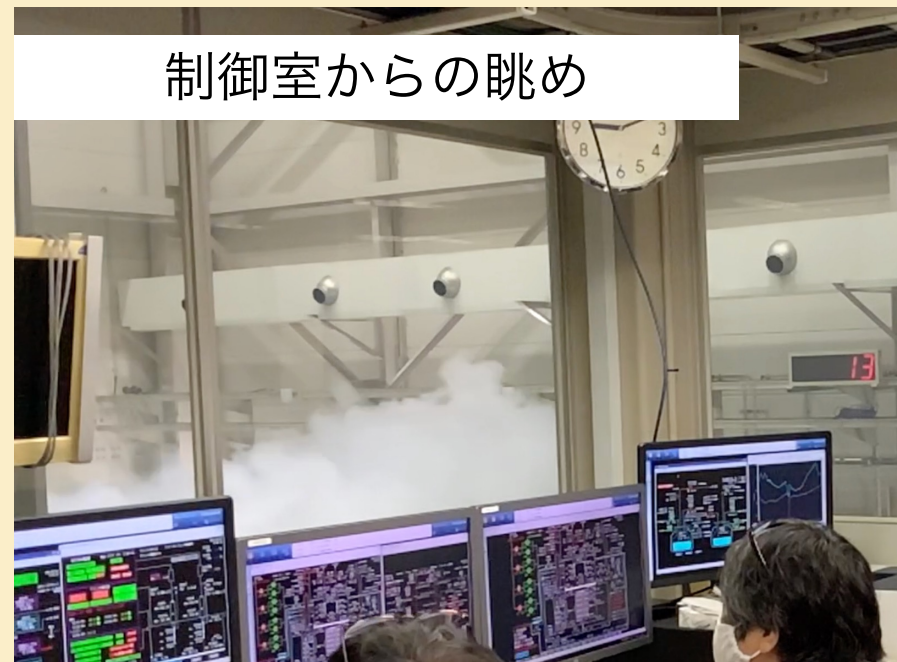
➡ $\Delta T = G/C \sim 3000 - 30000\text{ K}$ for Cu 1kg



導体の急激な温度上昇による焼損 (> Cuの融点 1356 K)
冷媒 (e.g. 液体ヘリウム) 気化の圧力上昇に伴う設備破壊
etc

ヘリウム : 液体→気体の体積膨張率=748

2022/9/6

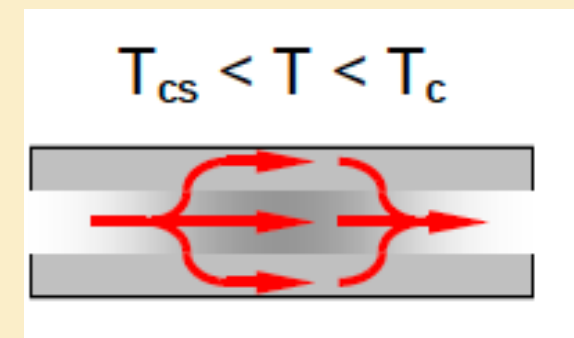
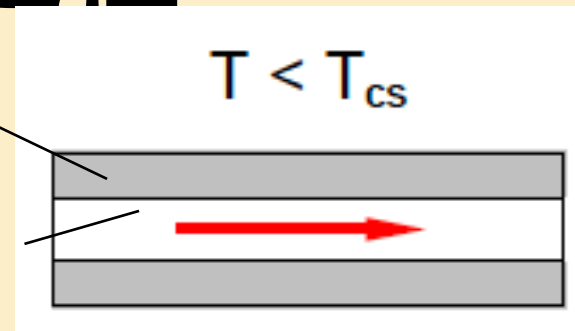


Quench時ケーブル内部の分流過程

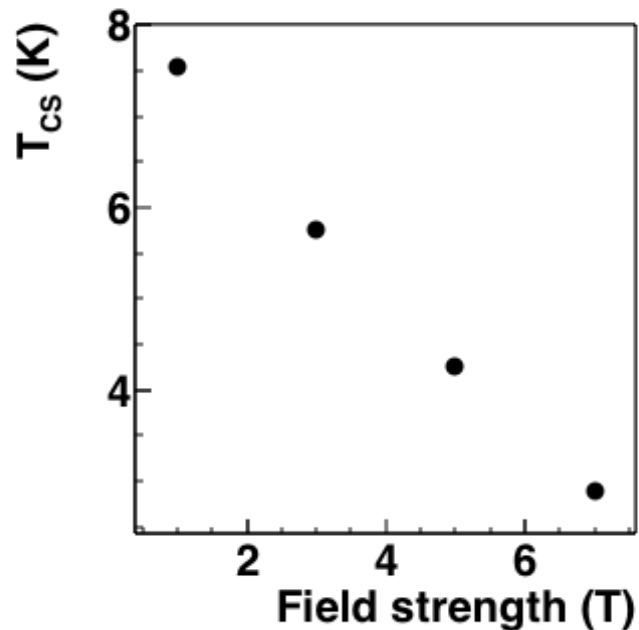
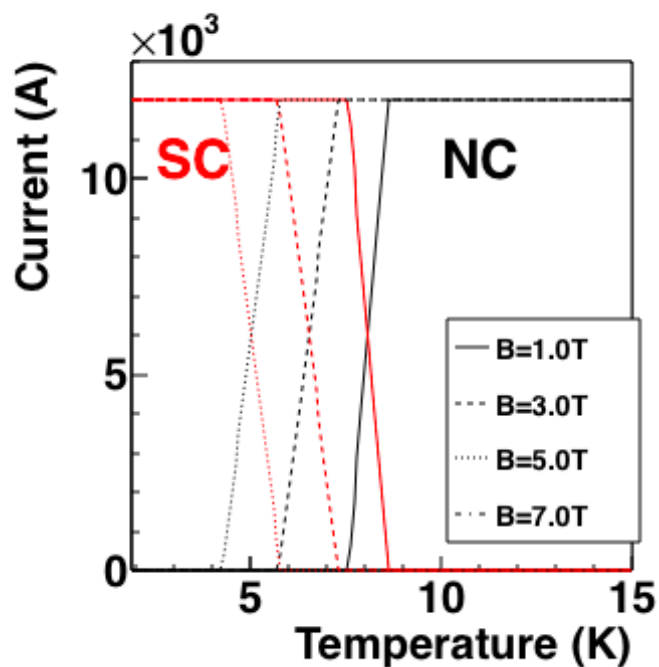
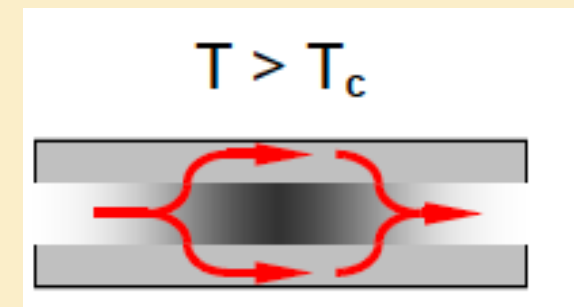
T_{cs} : 分流温度 (Current sharing temperature)

Copper matrix

NbTi



分流



分流を考慮したクエンチによる超伝導体の振る舞いを正確に把握するには数値解析 (numerical)が必要
以降では、解析的なアプローチによってNbTiのクエンチ保護に必要な情報を集めていこう

熱バランス方程式

$$C \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho J^2 + g - g_q$$

C : 単位堆積あたりの超伝導ケーブルの熱容量 (Volumetric Heat Capacity) [J/m³/K]

k : ケーブル熱伝導率 (Thermal conductivity) [W/m²/K]

ρ : ケーブル抵抗率 (Electrical resistivity) [Ω m]

J : 電流密度 (Current density) [A/m²]

g : ジュール熱以外の発熱 (Heat generation other than joule heat)[W/m³]

g_q : 冷媒による除熱 (Cooling power) [W/m³]

最小伝播領域 (MPZ : Minimum propagation zone)

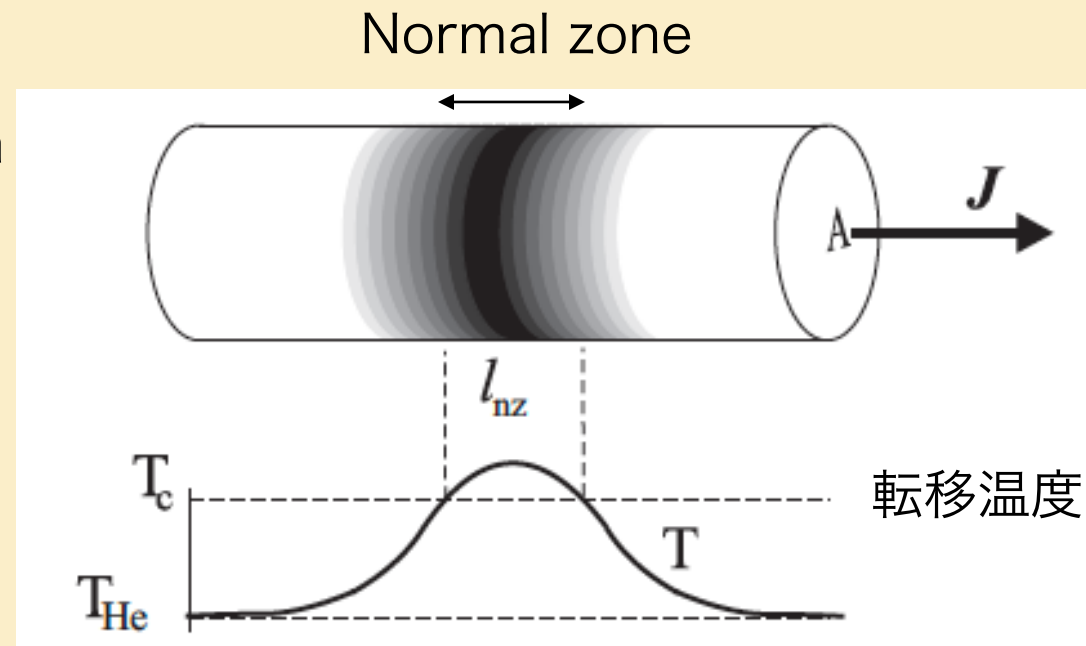
$$\rho J^2 A l_{nz} = 2kA \frac{T_c - T_{He}}{l_{nz}} + hpl_{nz}(T_c - T_{He})$$

A: Cable cross section
P : Perimeter



$$l_{mpz} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2k(T_c - T_{He})}{\rho J^2} + \frac{hp}{A}(T_c - T_{He})} \\ \sqrt{\frac{2k(T_c - T_{He})}{\rho J^2}} \quad (\text{断熱条件時}) \end{cases}$$

周辺導体からの伝導冷却が
間に合わない



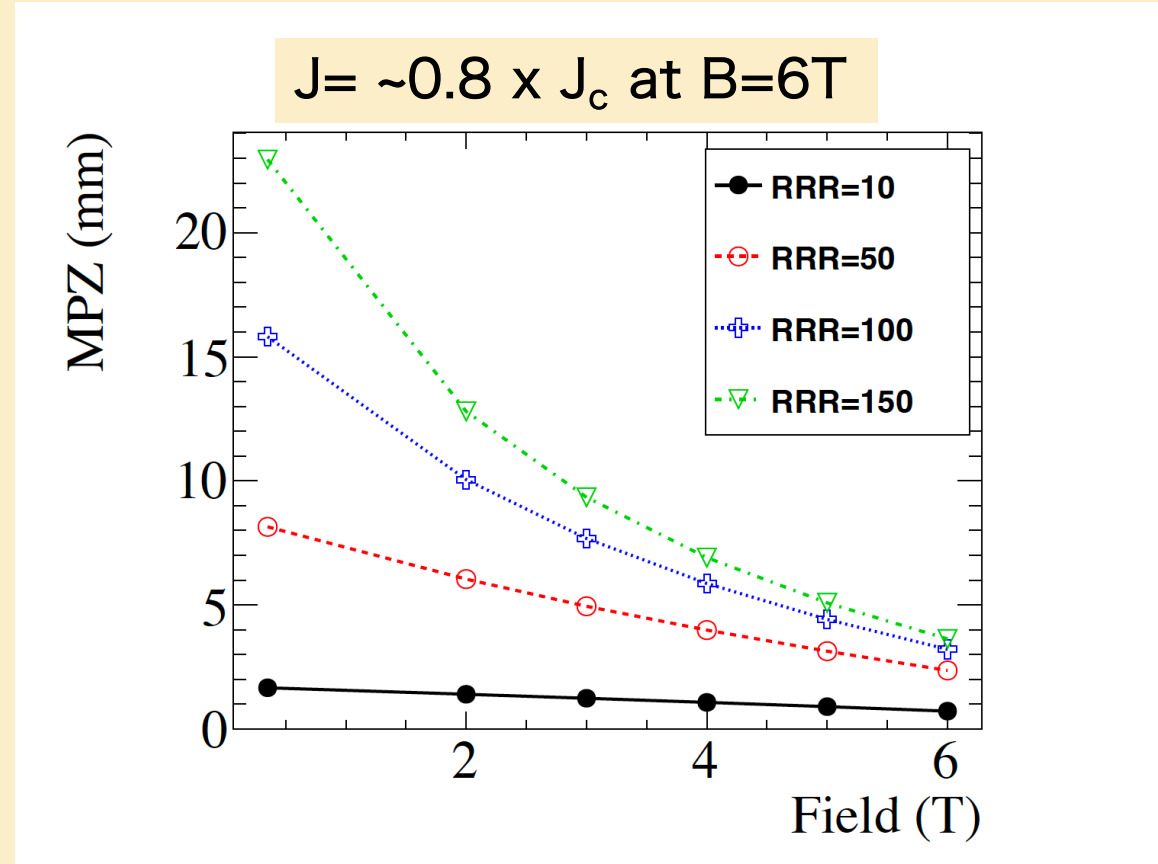
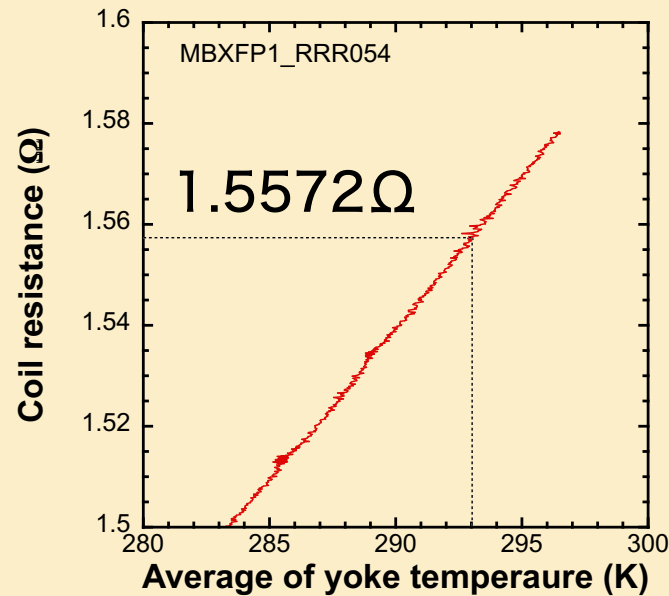
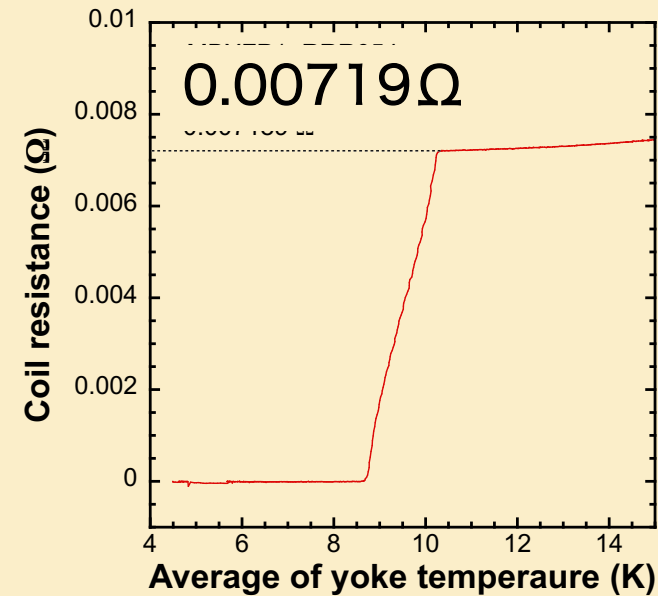
Quench に至るNormal zone (常伝導部)の
最小領域 = MPZ

NbTi Rutherford cableのMPZ

1次元計算

$$l_{MPZ} = \sqrt{\frac{2k(T_c - T_{He})}{\rho(RRR, B, T_c)J^2}} \quad \text{断熱近似}$$

$$RRR = \rho(293K) / \rho(10K)$$



MPZ 大 \rightarrow 熱擾乱に対して安定

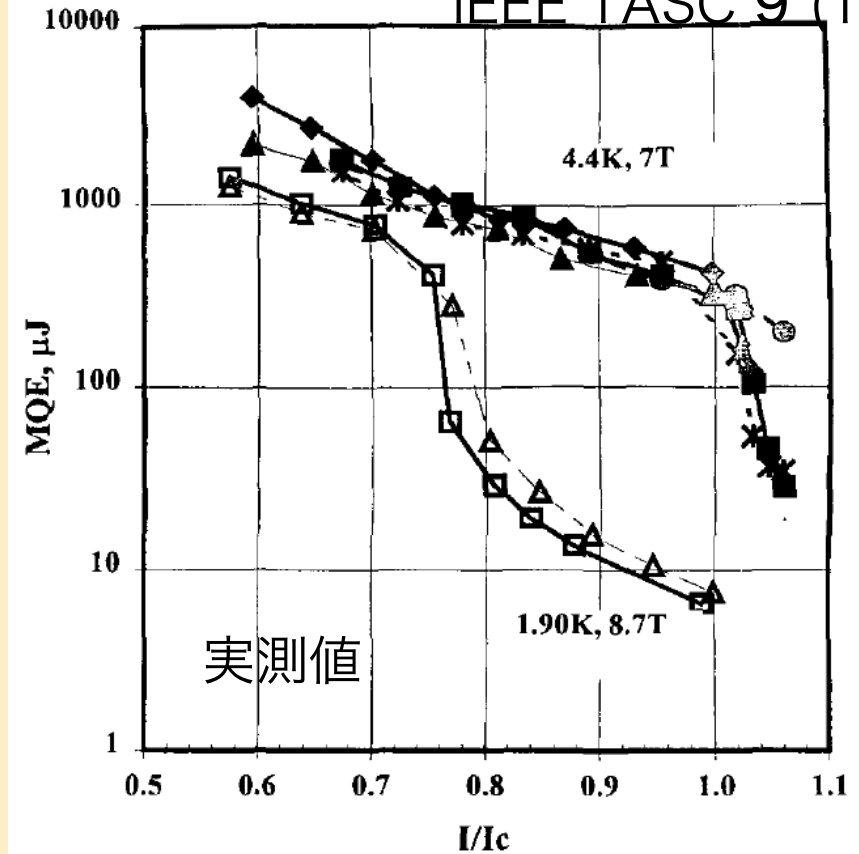
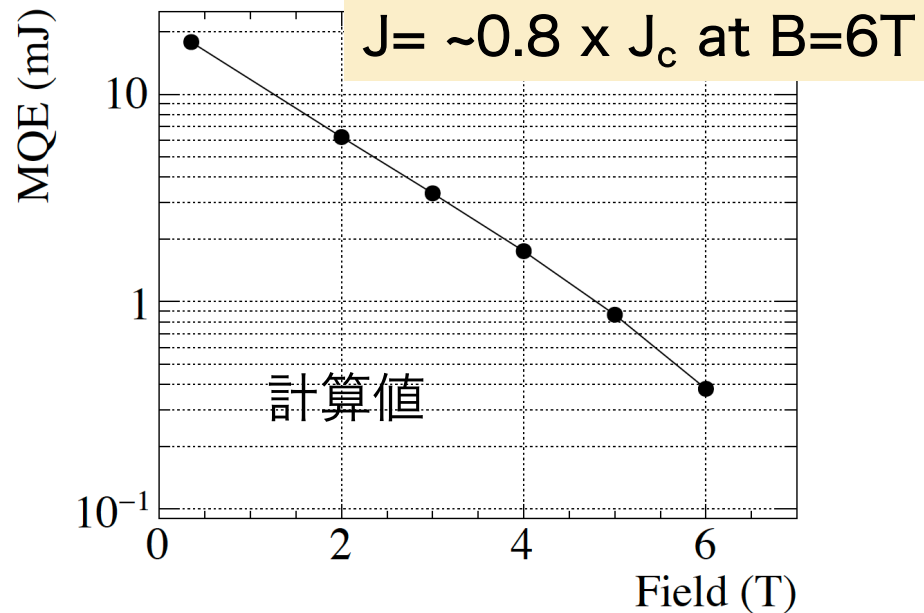
Rutherford cable : MPZ $\sim 1 - 10$ mm

最小クエンチエネルギー (MQE : Minimum Quench Energy)

MPZを形成するのに必要なエネルギー

$$MQE = A \int L_{MPZ} \int_{T_{He}}^{T_c} C dT dz$$

A.K. Ghosh *et al.*,
IEEE TASC 9 (1999)



- Htr#2, 4.4K
- ◆ Htr#5, 4.4K
- Htr#4, 4.4K
- Htr#2, 1.90K
- ▲ Htr#1, 4.4K
- ✱ Htr#3, 4.4K
- △ Htr#1, 1.9K

NbTi Rutherford cableの場合：
MQE = 10 μJ - 1 mJ

入熱 > MQE ?

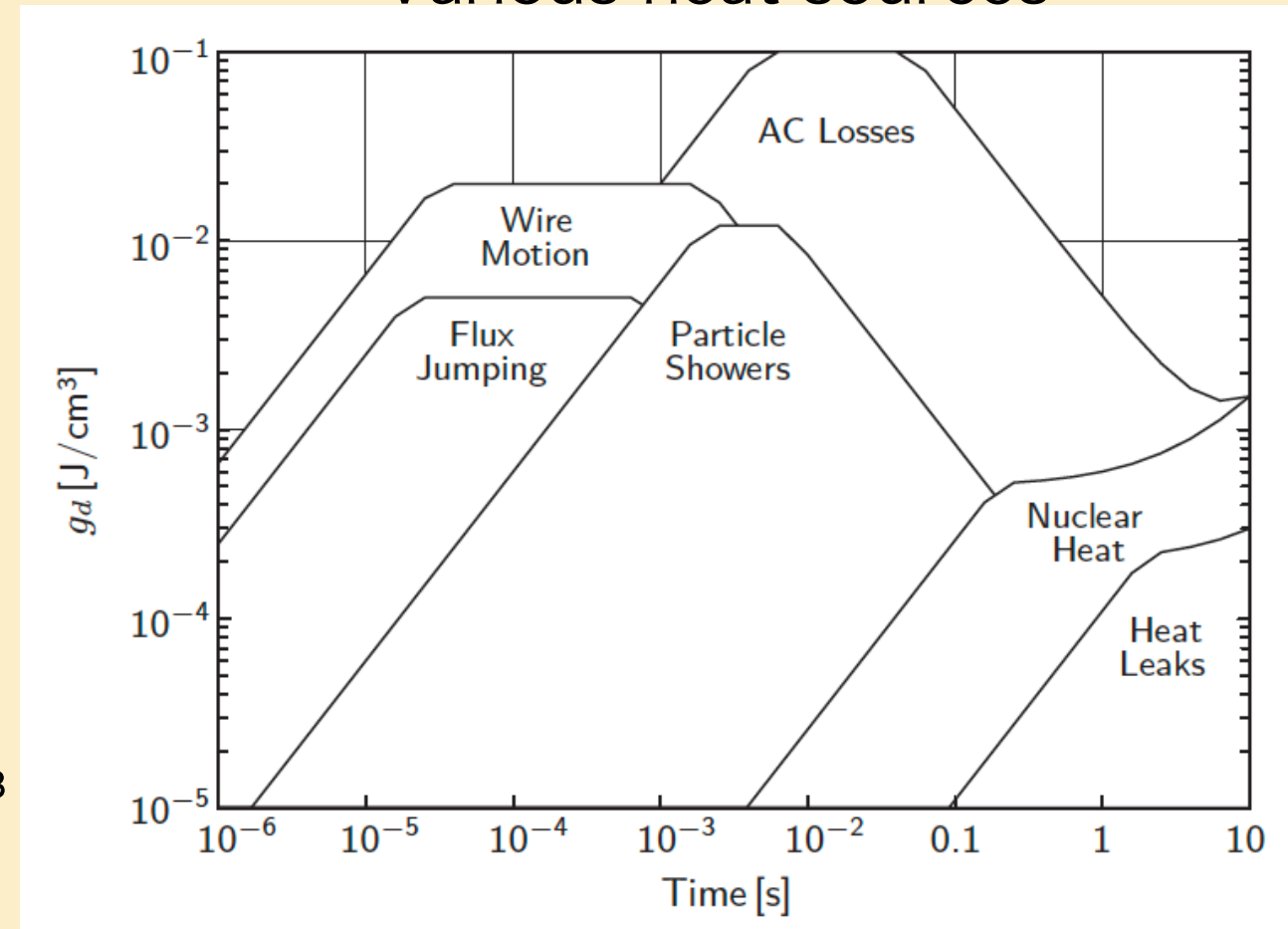
- AC losses, Wire motion, Flux jumping
 - 超伝導電磁石の特性に依存 (Intrinsic)
 - ✓ AC losses (交流損失)
 - ヒステリシス損失
 - IFCC (フィラメント間結合) 損失
 - ISCC (素線間結合) 損失
 - ✓ Flux jump
 - フィラメント径 $5\mu\text{m} \rightarrow 0.1\text{mJ}/\text{cm}^3$
 - ✓ Wire motion (機械擾乱)
 - ローレンツカの影響
 - \rightarrow 高磁場・大電流運用で問題化

素線面積 1mm^2 の長さ 1mm にわたって
4kN/m (10T, 400A/mm²) の力が働く場合

$\rightarrow 40\text{mJ}/\text{cm}^3$ (or 40 μJ)

高磁場運用~10T MQEに匹敵

Various heat sources



L. Bottura,
CERN Yellow report CERN-2014-005

クエンチ伝播速度

- Quench Propagation Velocity

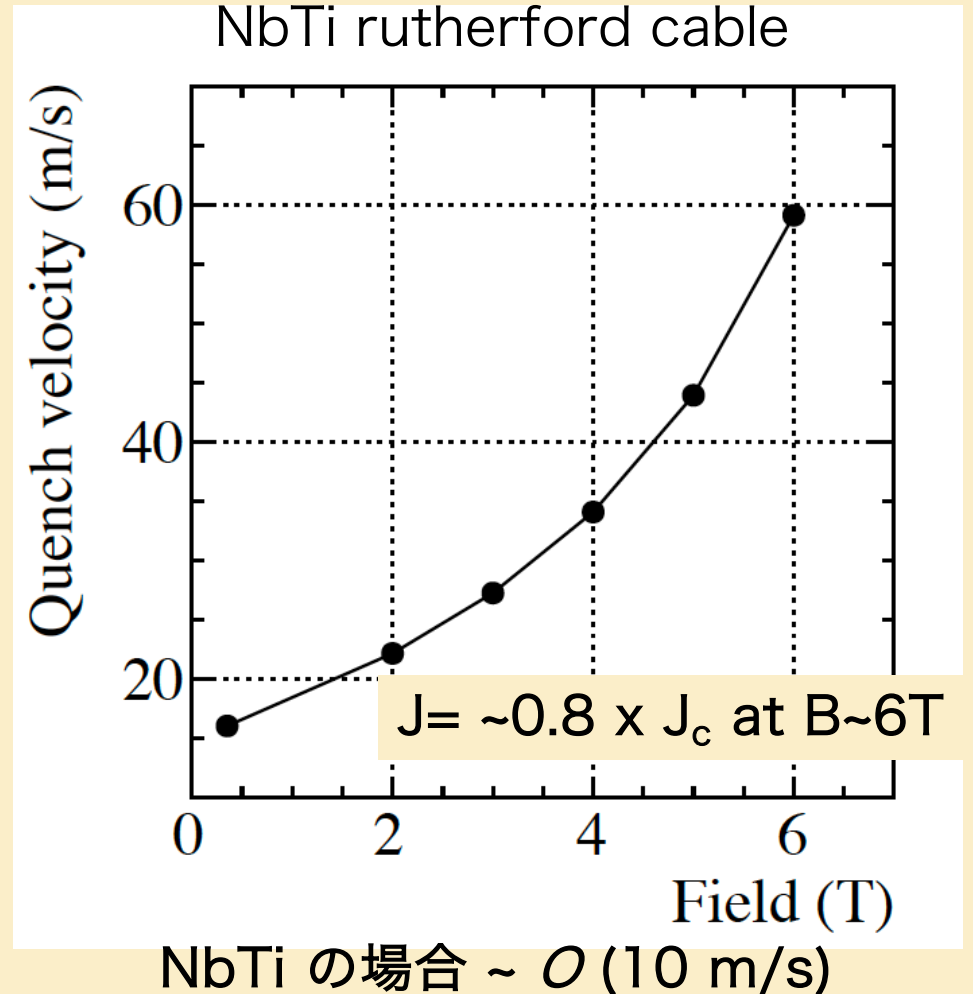
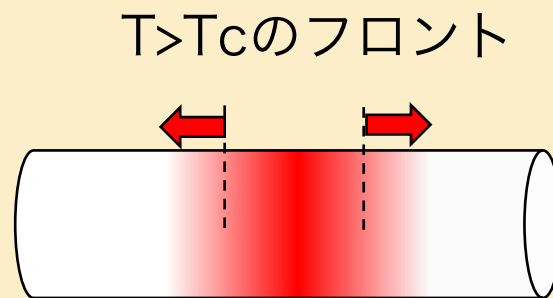
$$C \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho J^2 + g - g_q$$

↓
 $g_q = g = 0$ (断熱近似)
 1次元に帰着
 $\partial T / \partial t = -v dT / dx$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{vC}{k} \frac{dT}{dx} + \frac{\rho J^2}{k} = 0$$

↓
 Tについて解く
 初期条件

$$v = \frac{J}{C} \sqrt{\frac{\rho k}{T_c - T_{He}}}$$

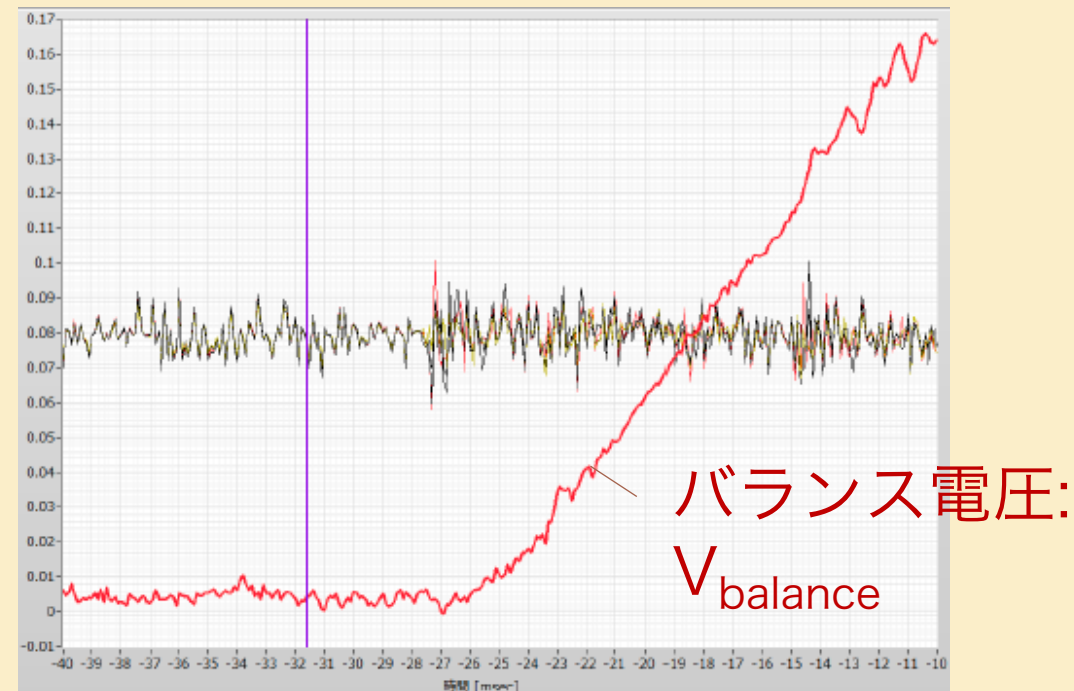
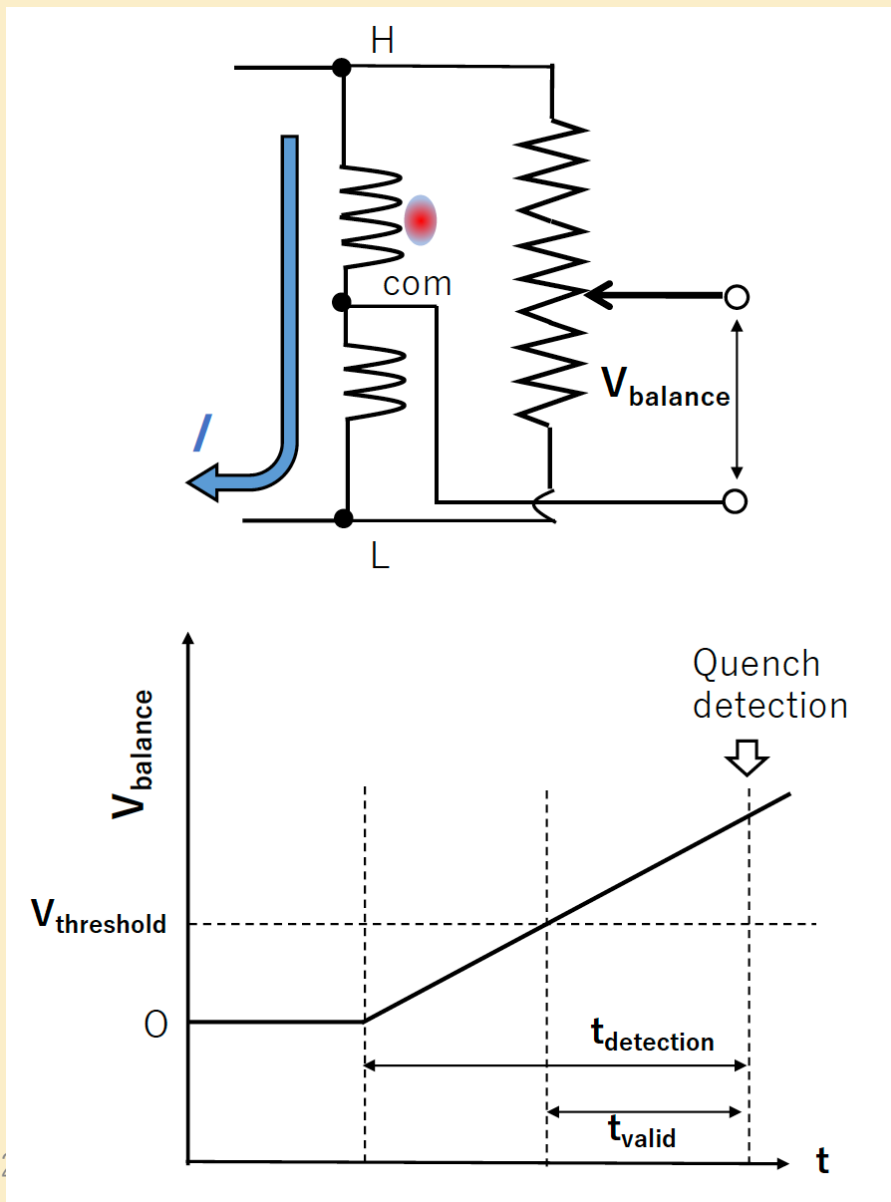


3. クエンチ保護

- MPZ・MQE

- クエンチ検出と保護

クエンチ検出 - バランス電圧検出法



- 磁石の両端と中点（コイル2個で構成されている場合は連結部）のバランス電圧の立ち上がりをブリッジ回路によって検出
- ノイズによる誤検出を防ぐため、検出閾値と判定時間を設ける
 - NbTi magnet: $V_{threshold}=0.1$ V, $t_{valid}=10$ ms

MIITs

MIITsとホットスポット温度の関係

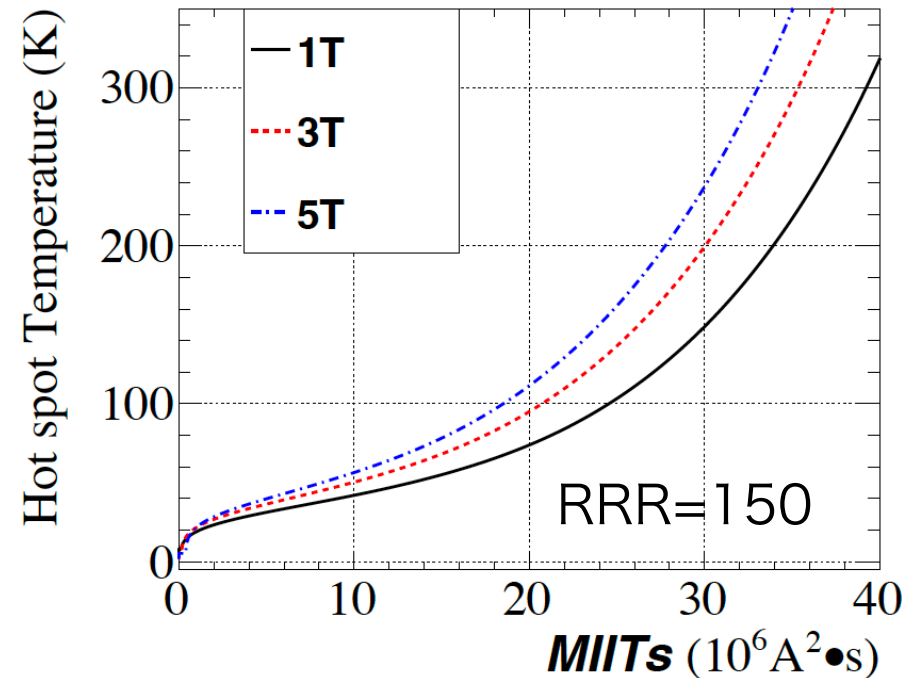
エネルギーバランスの式より：

$$J^2 dt = \frac{C}{\rho} dT \Leftrightarrow I^2 dt = \frac{CA^2}{\rho} dT$$

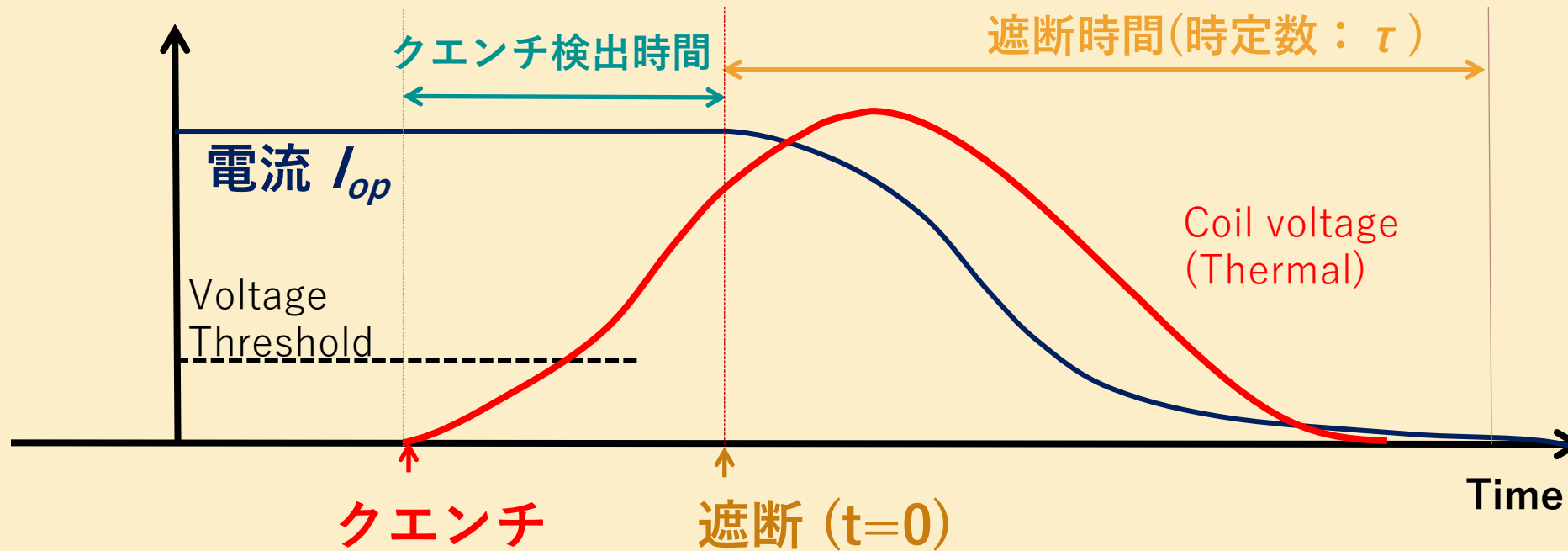
両辺を時間積分：

$$MIITs = \int_0^{te} I^2(t) dt = A^2 \int_{T_{He}}^{T_{max}} \frac{C(T)}{\rho(RRR, B, T)} dT$$

単位: MAAs, kA²s, 10⁶ As



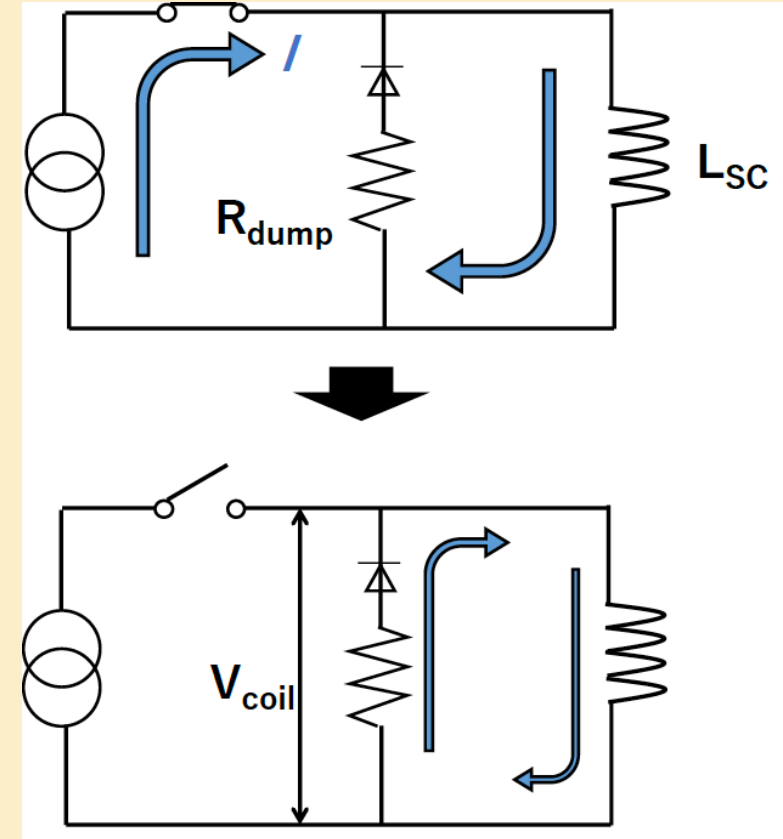
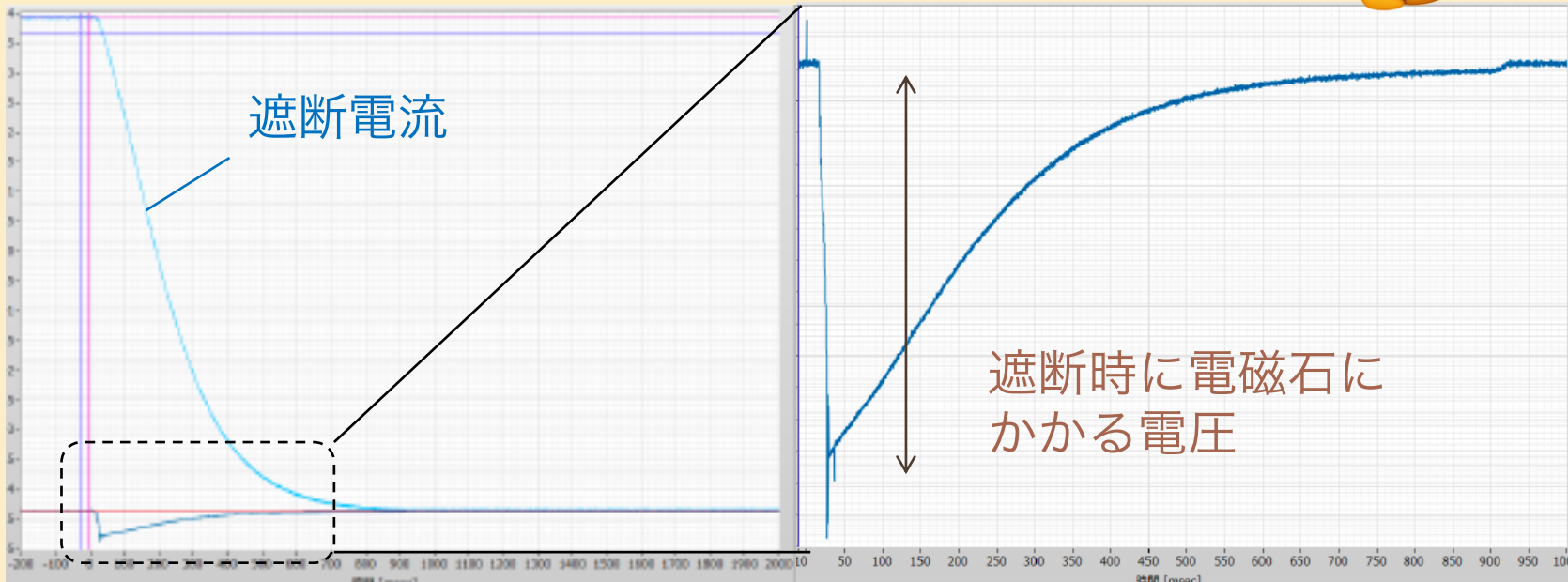
MIITsを用いた磁石保護の考え方



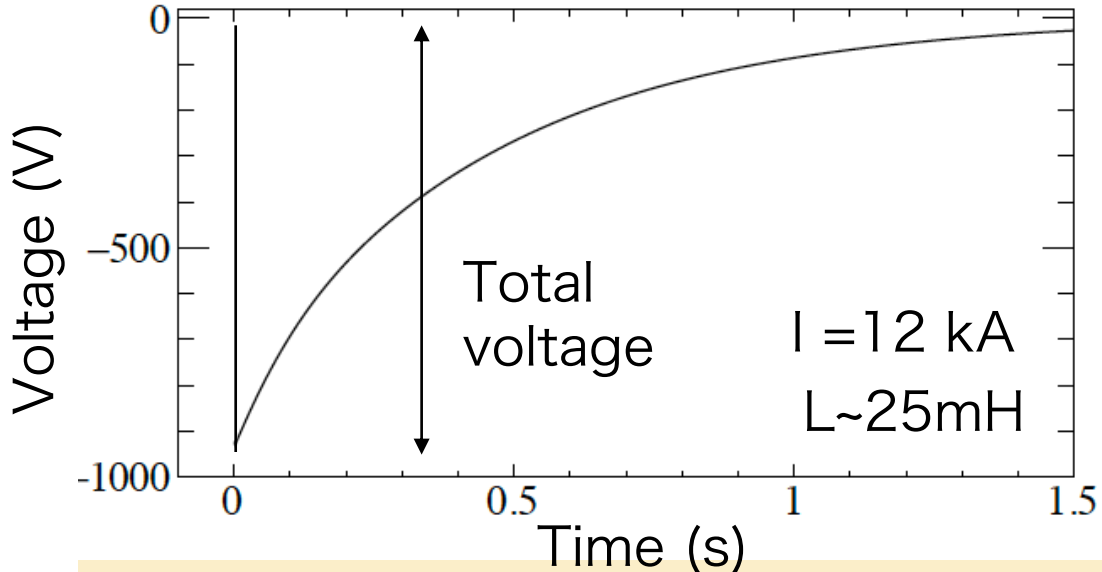
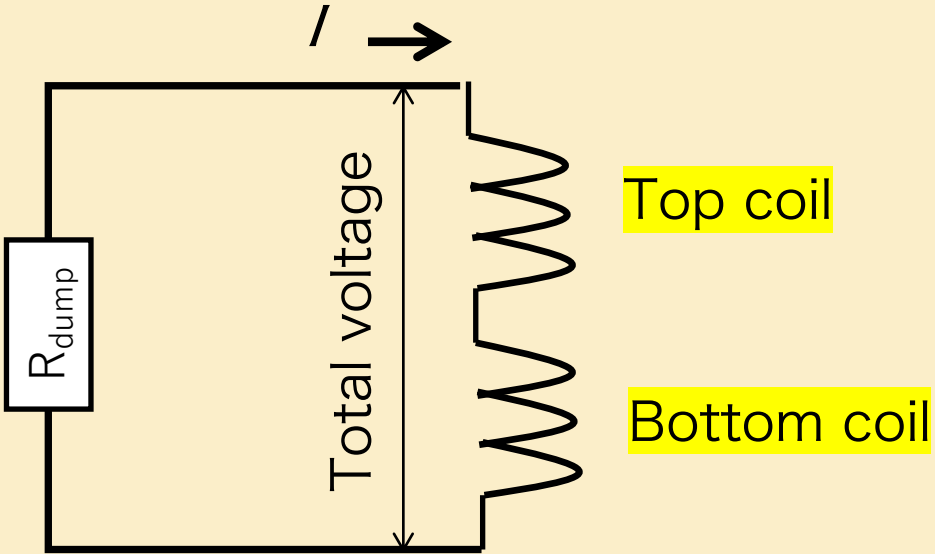
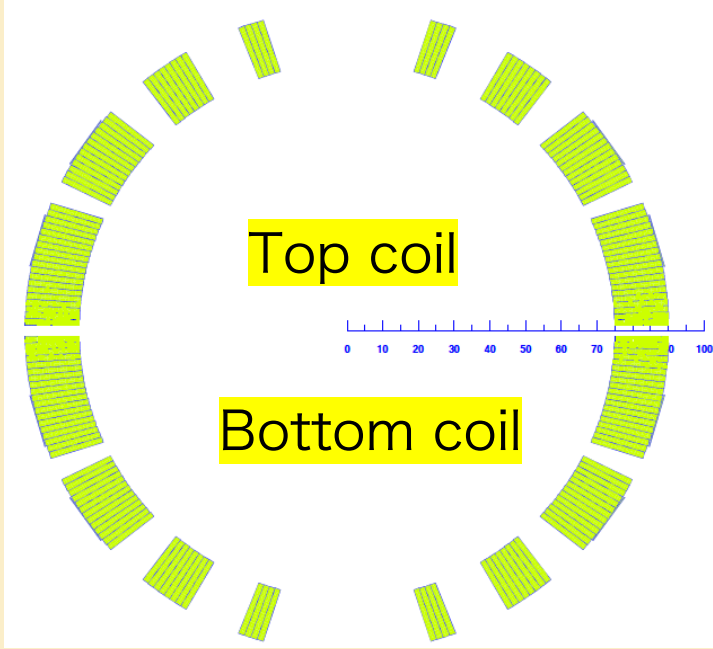
- 電流遮断 : $I(t) = I_{op}e^{-\frac{t}{\tau}}$
- $MIITs = \int_0^{te} I^2(t)dt = I_{op}^2\tau/2$
- $I_{op}=13 \text{ kA}$ とした場合 : $MIITs (t>0) < 30 \rightarrow \tau < 350 \text{ ms}$

超伝導電磁石の保護 - 保護抵抗

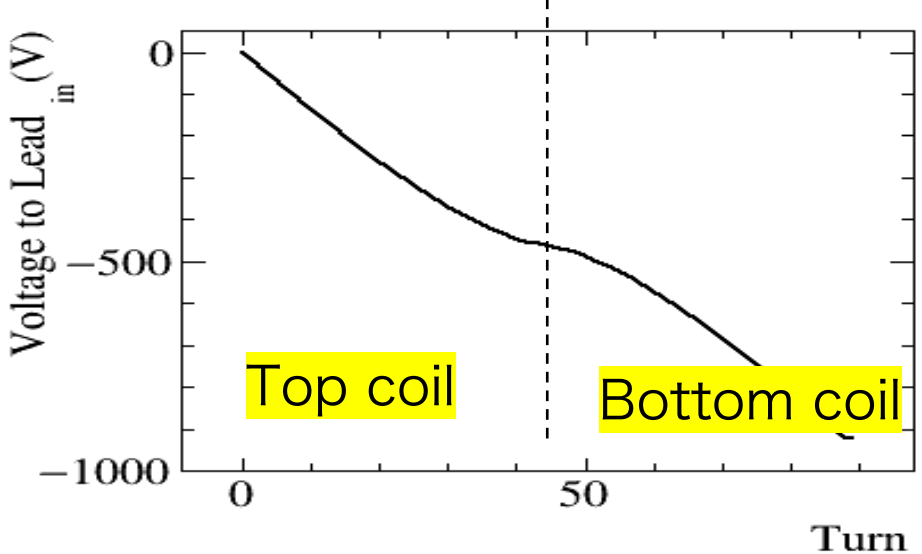
- 磁石のインダクタンス $L=25$ mH とした場合
 - 蓄積エネルギー : $\frac{L}{2} I_{op}^2 \sim 2$ MJ at $I_{op}=13$ kA)
- 電流を $\tau = L/R < 350$ ms で遮断したい
 - 保護抵抗 R_{dump} を並列に接続
 - $R_{dump} > 72$ m Ω \rightarrow **最大電圧 ~ 1 kV at 13 kA**



Simulation w/ $R_{dump}=75\text{ m}\Omega$

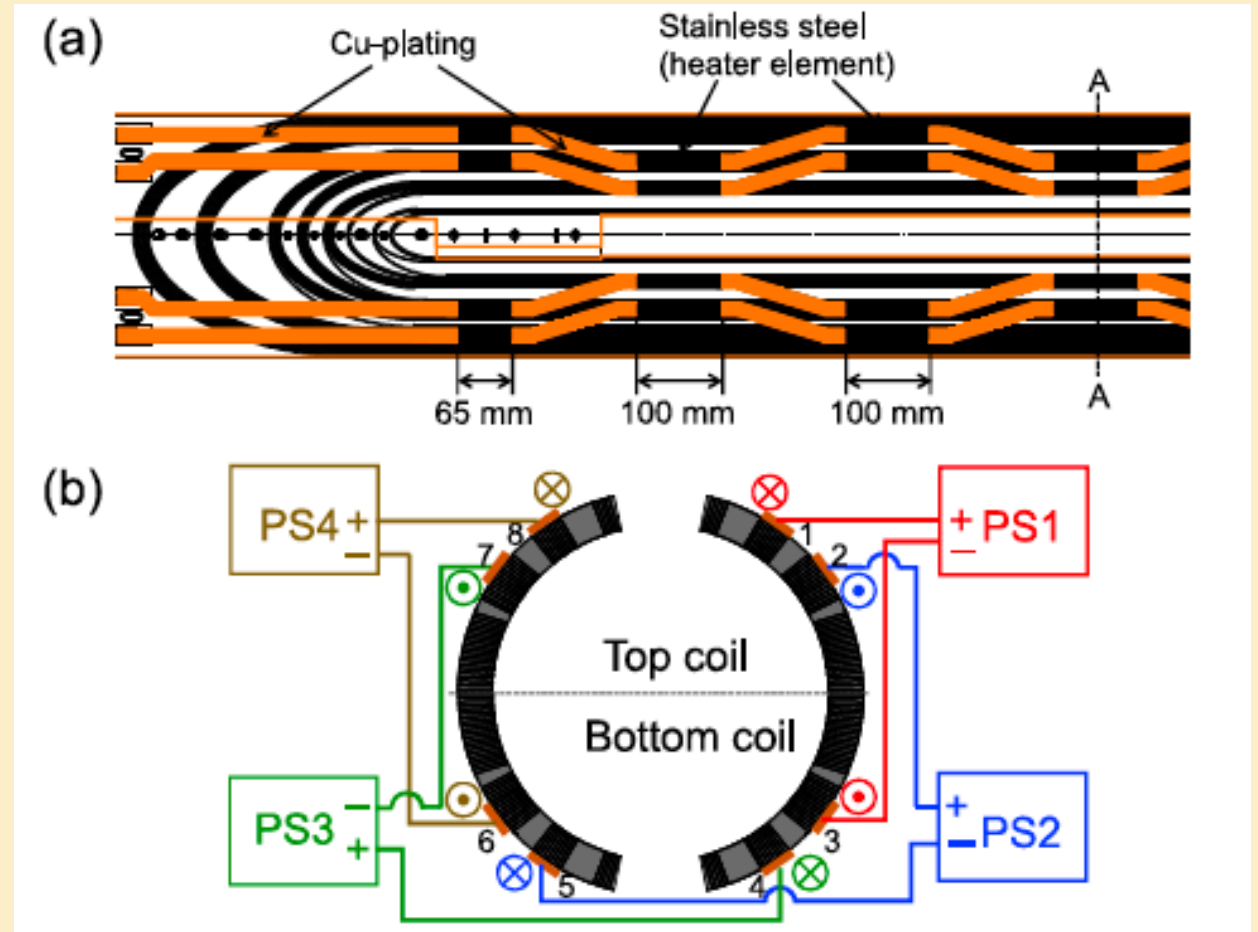
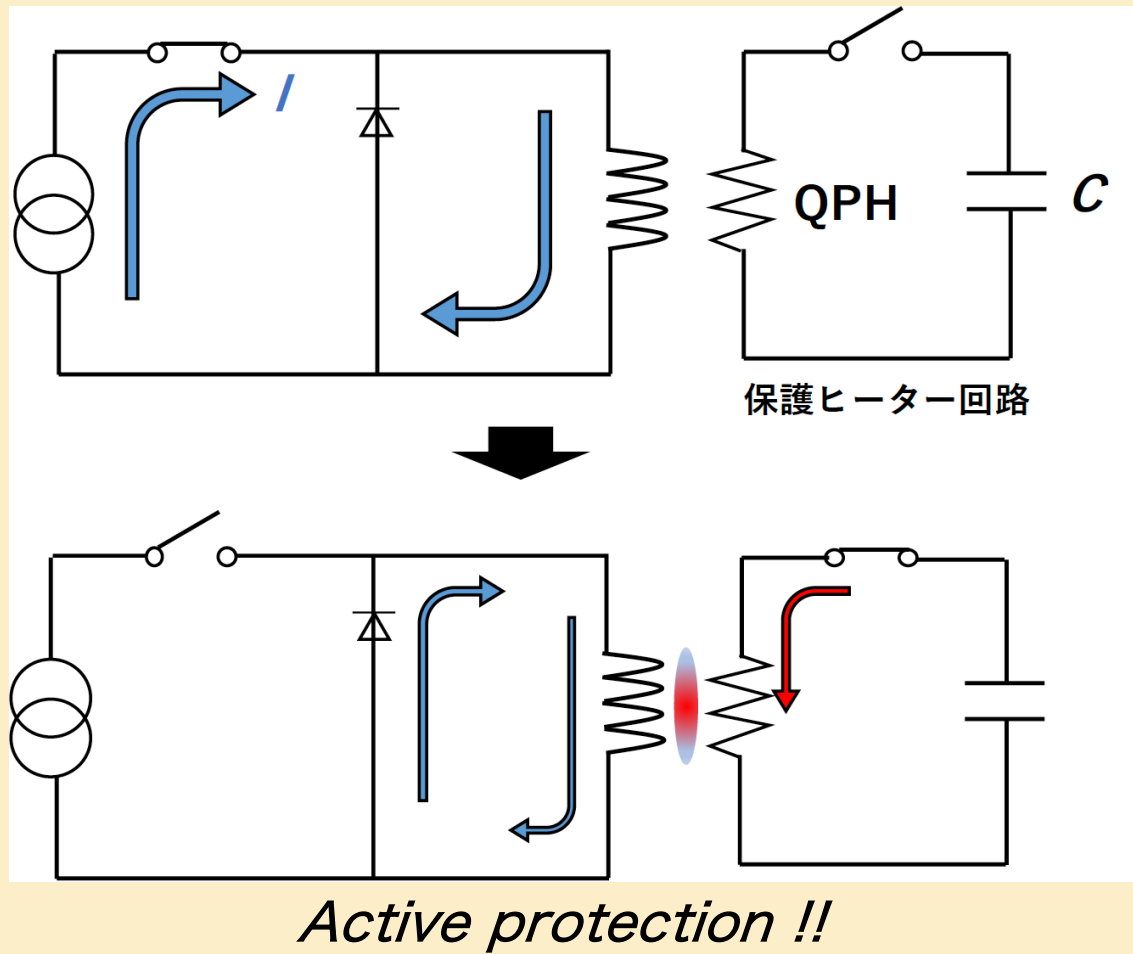


$t=0\text{ms}$ 超伝導電磁石内部の電圧の発展



超伝導電磁石の保護 - 保護ヒーター(QPH)

HL-LHC D1磁石の例

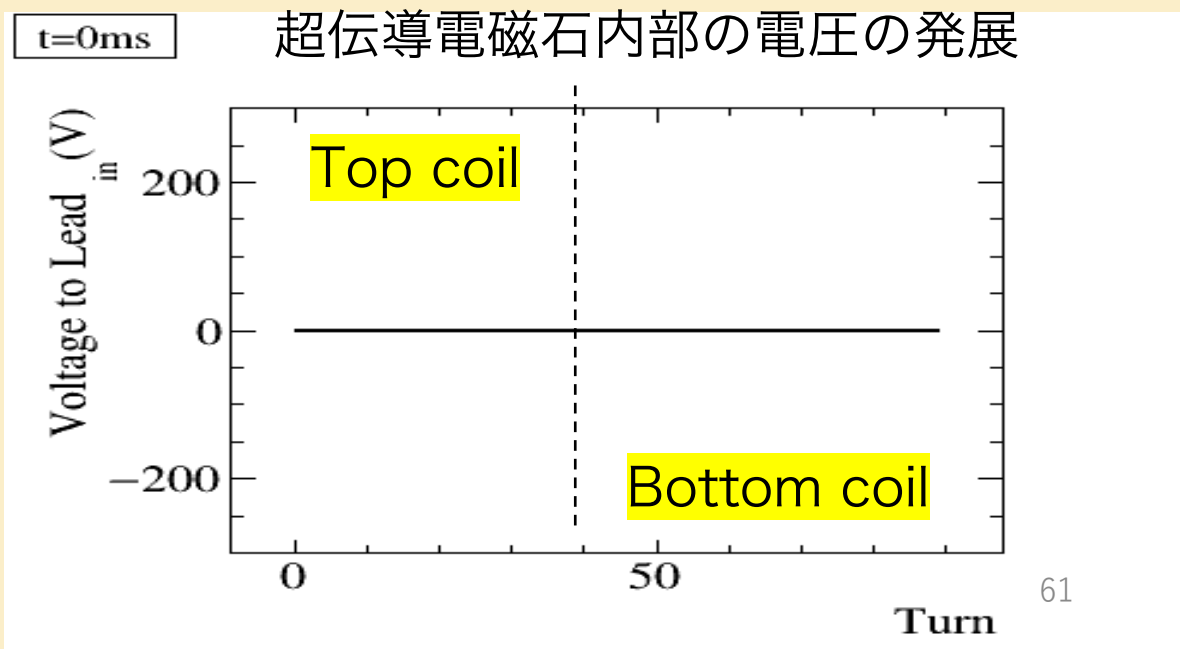
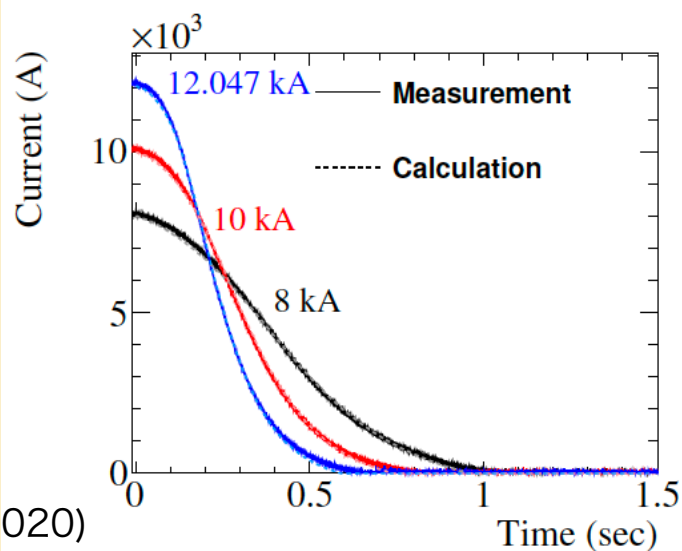
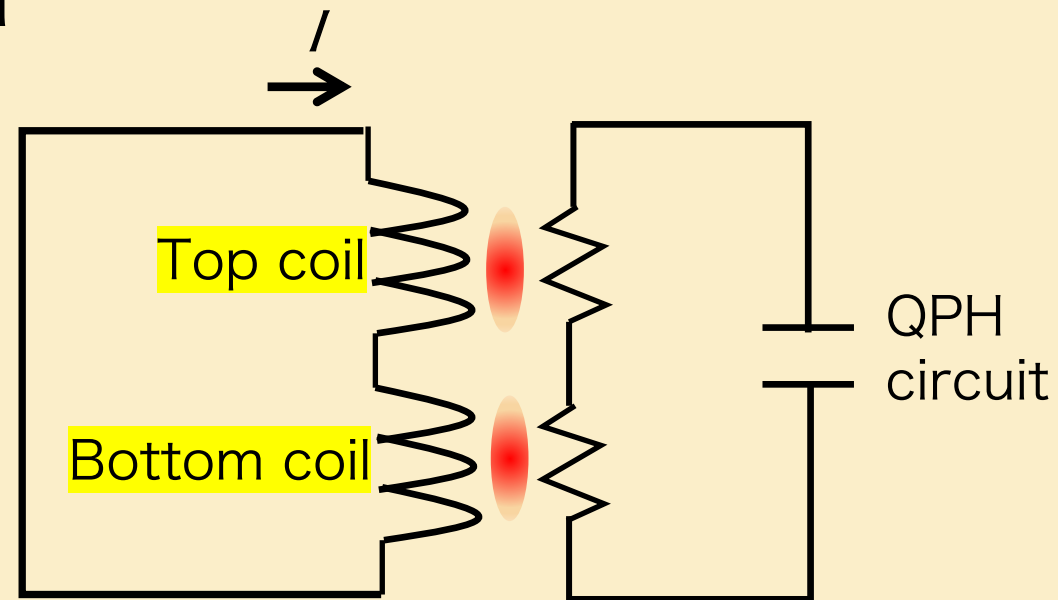
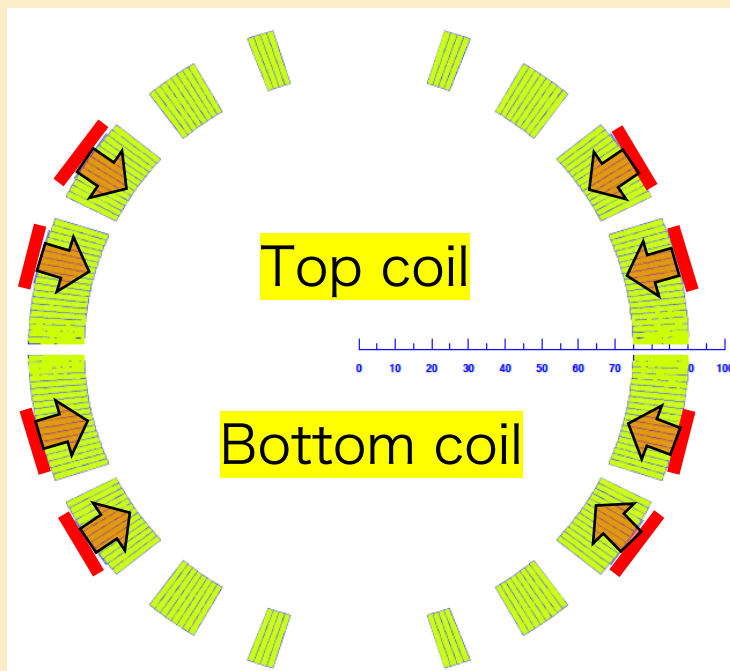


M. Sugano *et al.*, IEEE TASC (2022)

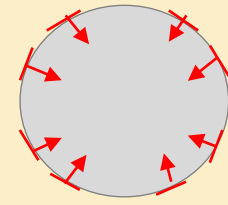
超伝導電磁石の保護 - 保護ヒーター(QPH)



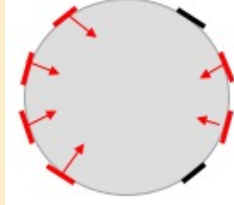
Quench simulation w/ QPH



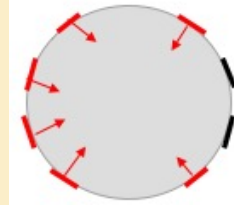
MIITs summary, $I=13000A$, 7m magnet



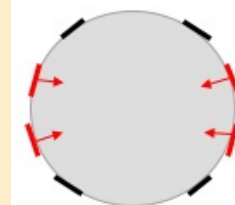
Success



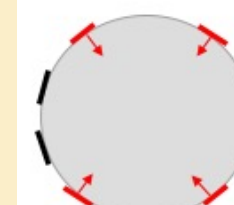
Case1



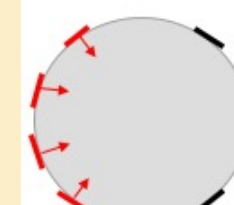
Case2



Case3



Case4



Case5

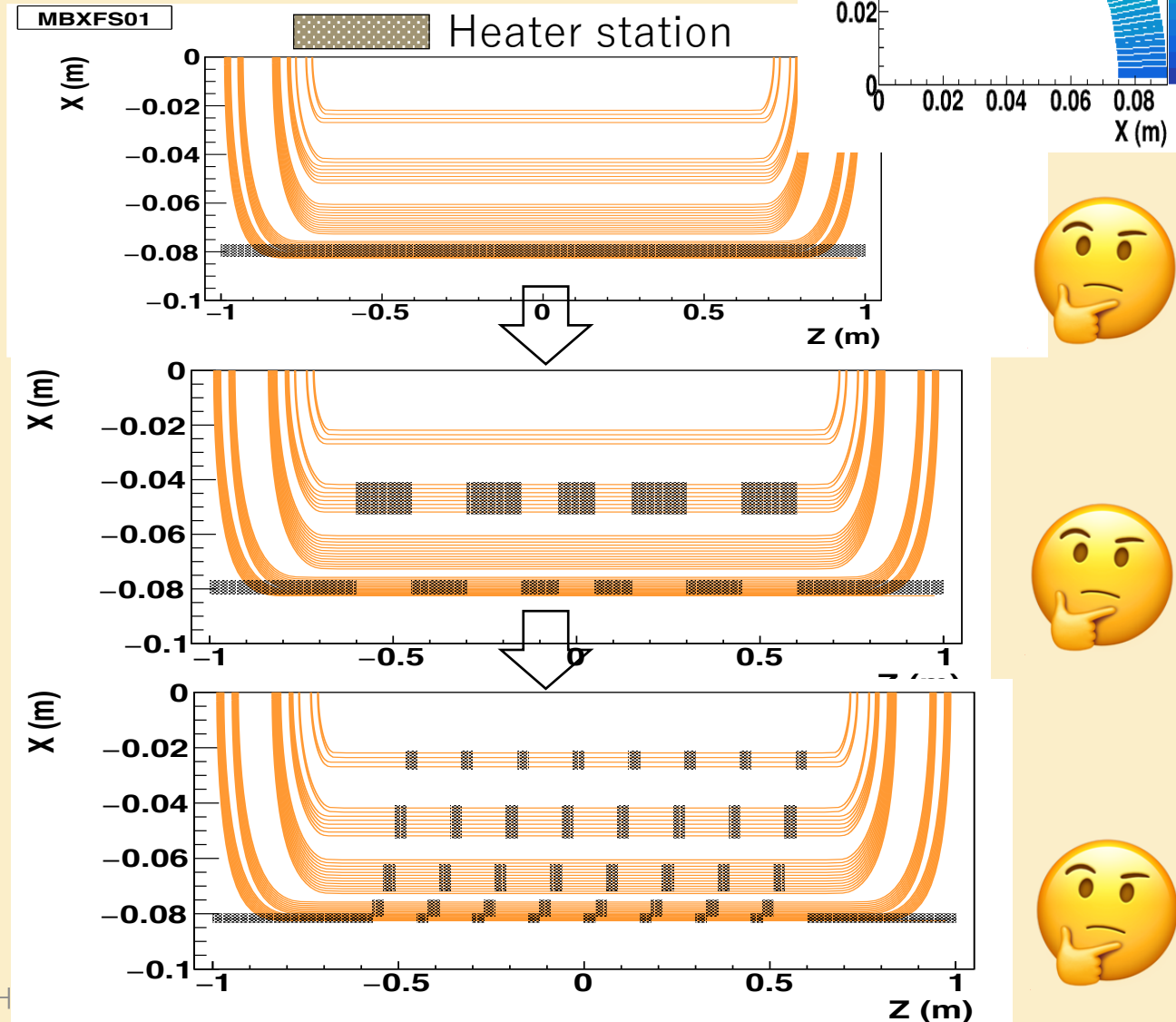
Failure mode

	MIITs counted from the end of t_{valid} (quench integral)
Success	23.9
Failure case1	25.0
Failure case2	25.0
Failure case3	26.6
Failure case4	26.7
Failure case5	27.8

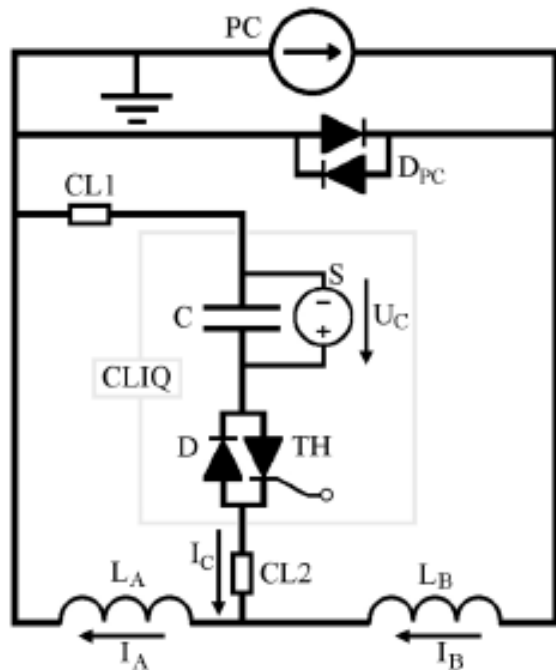
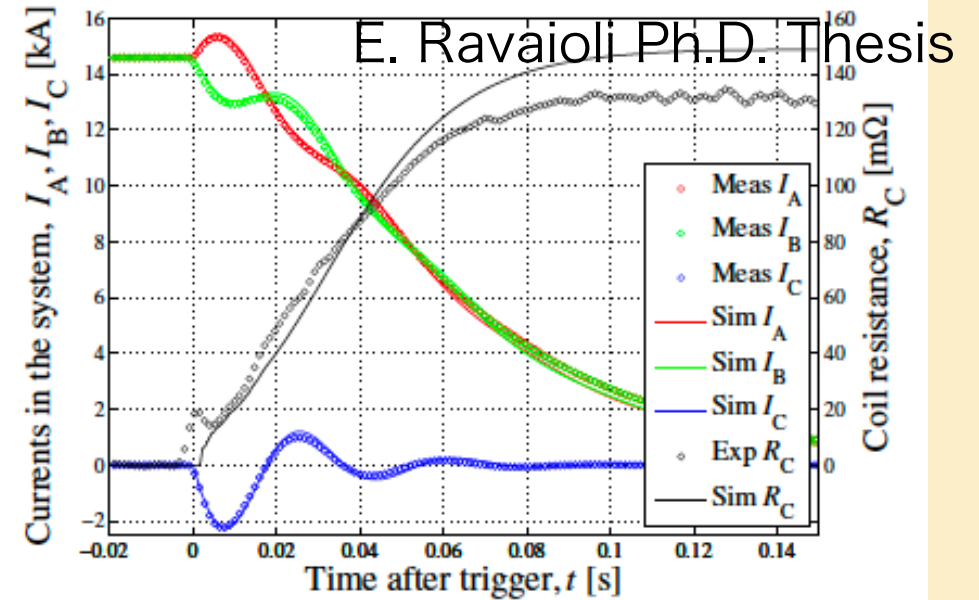
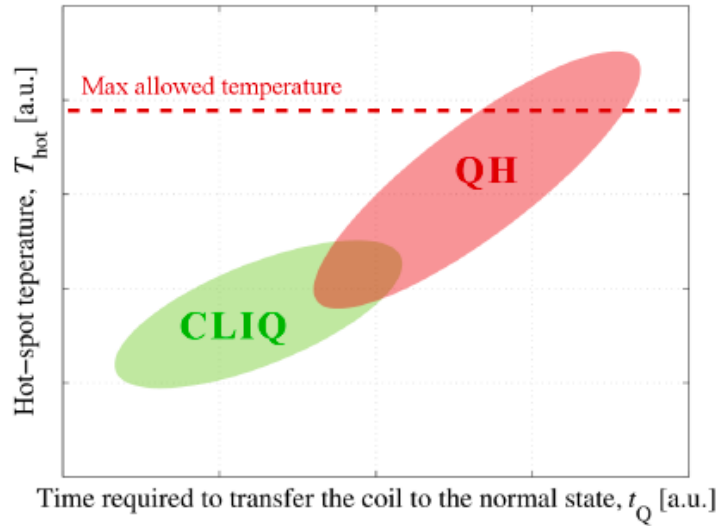
QPH design technique

- ヒーター面積 (長さ)の決定：
 - MPZ
 - Rutherford twist pitch
- ヒーター熱エネルギー密度：
 - MQE
- ヒーター位置：
 - Quench velocity

これまで説明してきた *analytic approach* のノウハウが生きてくる



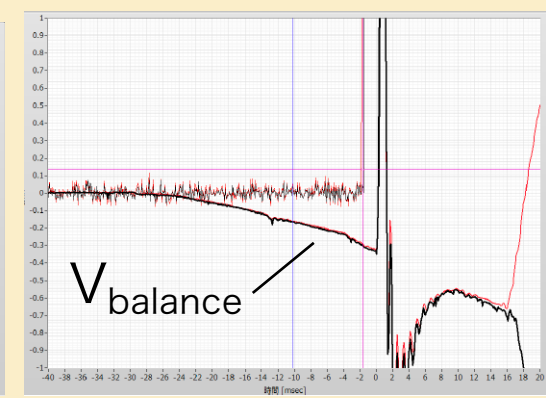
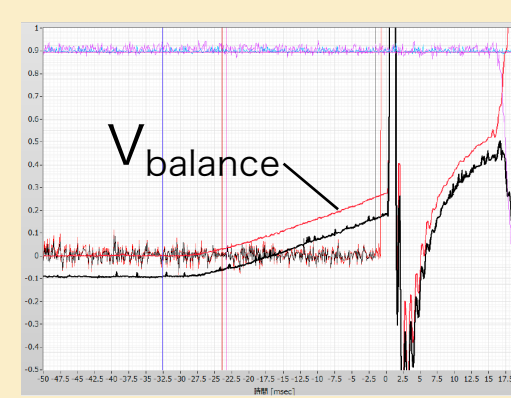
最近のクエンチ保護技術：CLIQ



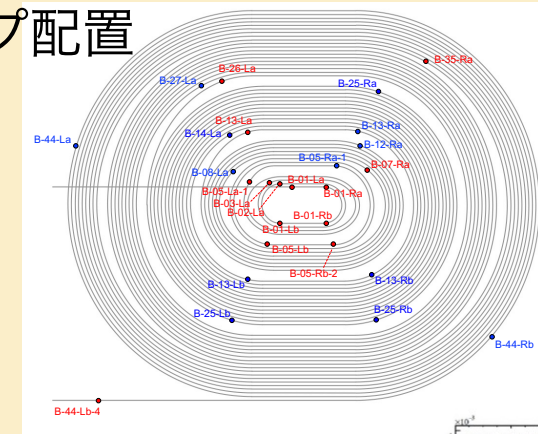
- Nb3Snを用いた高磁場磁石では蓄積エネルギーはより高くなるため、いかに早く電流を遮断できるか、が重要
- CLIQ (Coupling-loss Induced Quench) を用いたクエンチ促進技術
 - HL-LHCのNb₃Sn 4極磁石 (MQXF)に採用
- 低磁場領域ではクエンチまでのエンタルピーマージンが大きい
 - CLIQによる結合損失では不十分のため、実際にはクエンチ保護ヒーターとの併用がなされている

Quench diagnostics - Localization technique

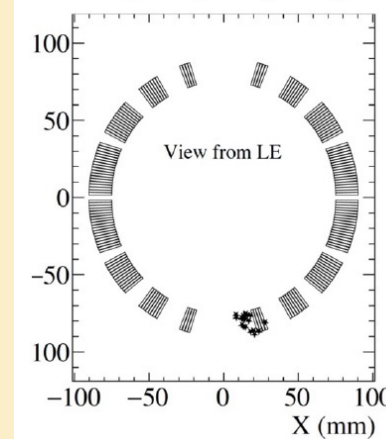
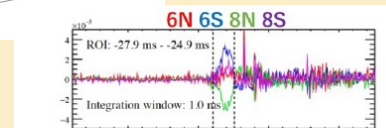
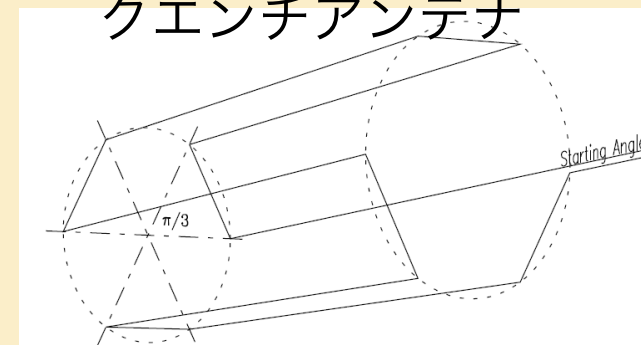
- バランス電圧の極性
 - Rough estimation (コイル単位)
- 電圧タップ
 - Fine segmented (ターン単位)
- クエンチアンテナ
 - 磁石ボアに設置されるピックアップコイルの信号解析
 - 非常に良い精度で周方向同定が可能
 - 長手方向にセグメント化する必要あり
- アコースティックエミッション
 - 超音波解析による位置同定法
 - 含浸コイル(Nb3Sn) の樹脂クラック検知
 - 設備投資が大変。。 ?



電圧タップ配置



クエンチアンテナ



まとめ

- 超伝導電磁石の特性の理解 = Multiphysics
 - 電磁気、熱力学、構造力学。。
- NbTi 線材は加速器の高性能化に大きく貢献してきた
 - ✓ Fermilab → HERA → RICH → LHC
- 日本で開発してきた/している 超伝導磁石についてはこの後の講義を聞きましょう！！

- 超伝導電磁石開発は実は今現在転換期に来ている（のだと思う）
 - Nb₃Sn磁石の初めての運用 in HL-LHC
 - REBCOといった高温超伝導体の実用化（まだできていない）
 - MgB₂の実用化（R&Dははじまったばかり）

パラダイムシフトには
新しいアイデアや力がもっと
もっと必要。
一緒にはじめてみませんか？？？

補足

前講義のおさらい – 秩序変数の導入

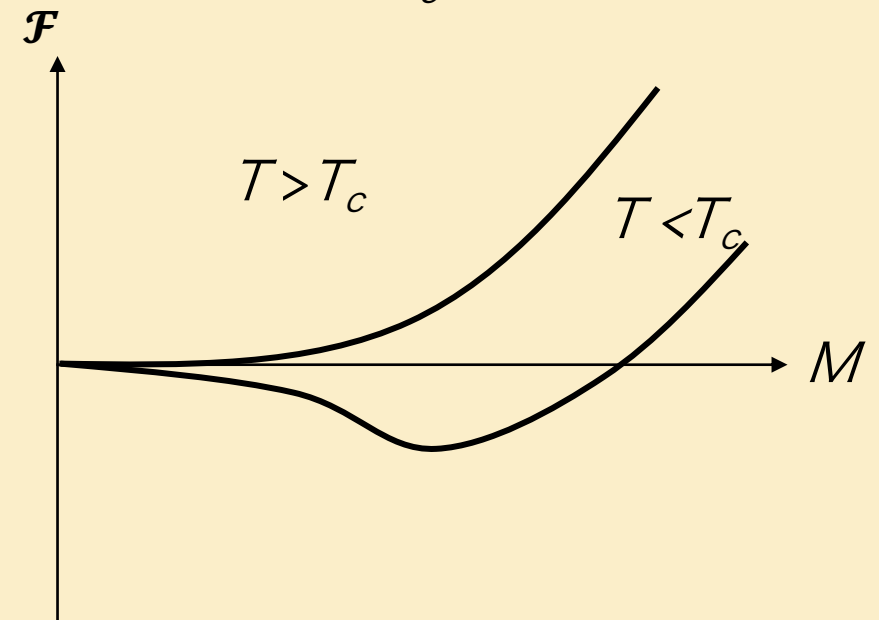
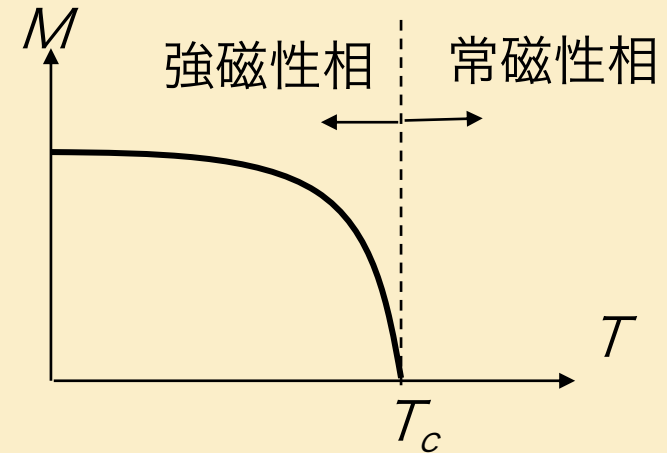
- 系の状態の決定 = 自由エネルギー \mathcal{F} が最小
 - 低温における強磁性相の安定：スピン方向が同じ向き (秩序がある)
 - 強磁性体の場合：秩序変数 = 磁化 M

$$\mathcal{F}(M, T) = \mathcal{F}(0, T) + \alpha M^2 + \frac{\beta}{2} M^4$$

- 相転移を起こすためには： $\alpha(T) = a(T - T_c)$

$$T > T_c : \mathcal{F} = 0 \text{ at } M = 0 \quad (\text{無秩序相})$$

$$T < T_c : \mathcal{F} = 0 \text{ at } M^2 = -\frac{a(T - T_c)}{\beta} \quad (\text{秩序相})$$



ロンドン侵入長とGLコヒーレンス長

Material	λ (nm)	ξ (nm)
In	24	360
Pb	32	510
Sn	~30	170
Nb	32	39

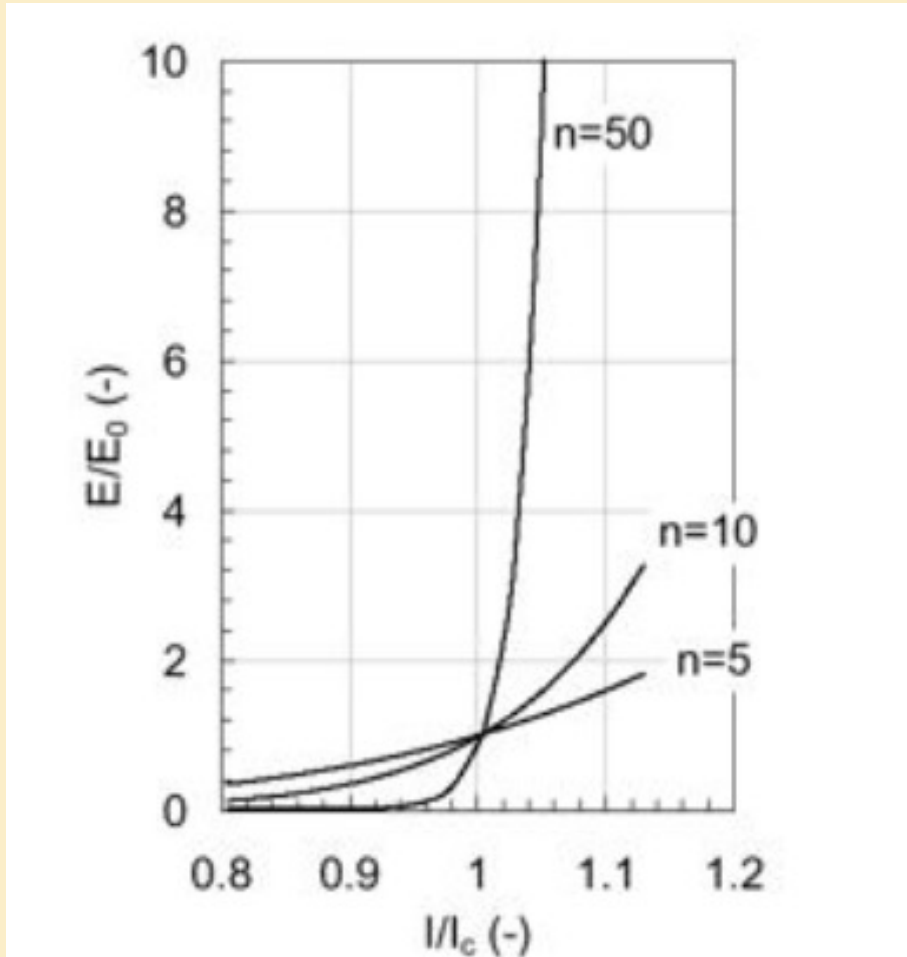
代表的な超伝導材料

	Type	T _c (K)	B _{c1} (T)	B _{c2} (T)	特徴
Pb	I	7.2	-	0.08	-
Nb	II	9.25	-	0.4	-
低温超伝導体LTS					
NbTi	II	9.5	-	11.5	合金・展性があり使いやすい
Nb ₃ Sn	II	18	-	22.5	化合物のため脆い Wind-and-react
REBa ₂ Cu ₃ O ₇	II	92	-	35 (B//ab)	脆い・配向性が重要 印加磁場の向きに対して臨界 磁場（電流）が変化

高温超伝導体HTS

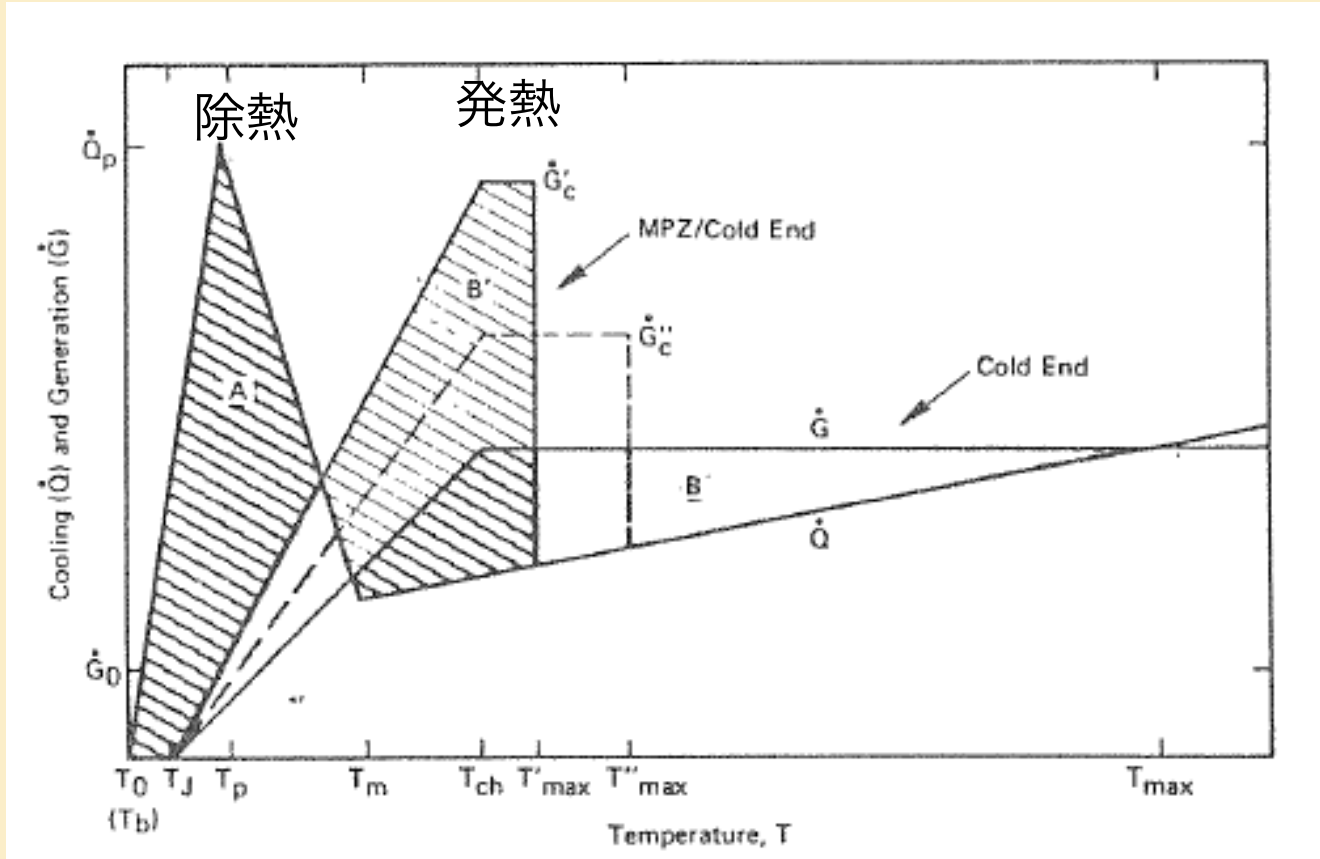
x

NbTi E-J 曲線



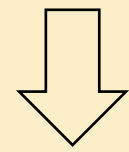
$$E = E_0 \left(\frac{I_{sc}}{I_c} \right)^n$$

Maddockの安定化条件 - equal-area theorem



$$q_J''' + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{wh}{A} (T - T_{he}) = 0$$

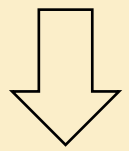
$$S = k \frac{\partial T}{\partial x}$$



$$k \left[\frac{wh}{A} (T - T_{he}) - q_J''' \right] = S \frac{\partial S}{\partial T}$$

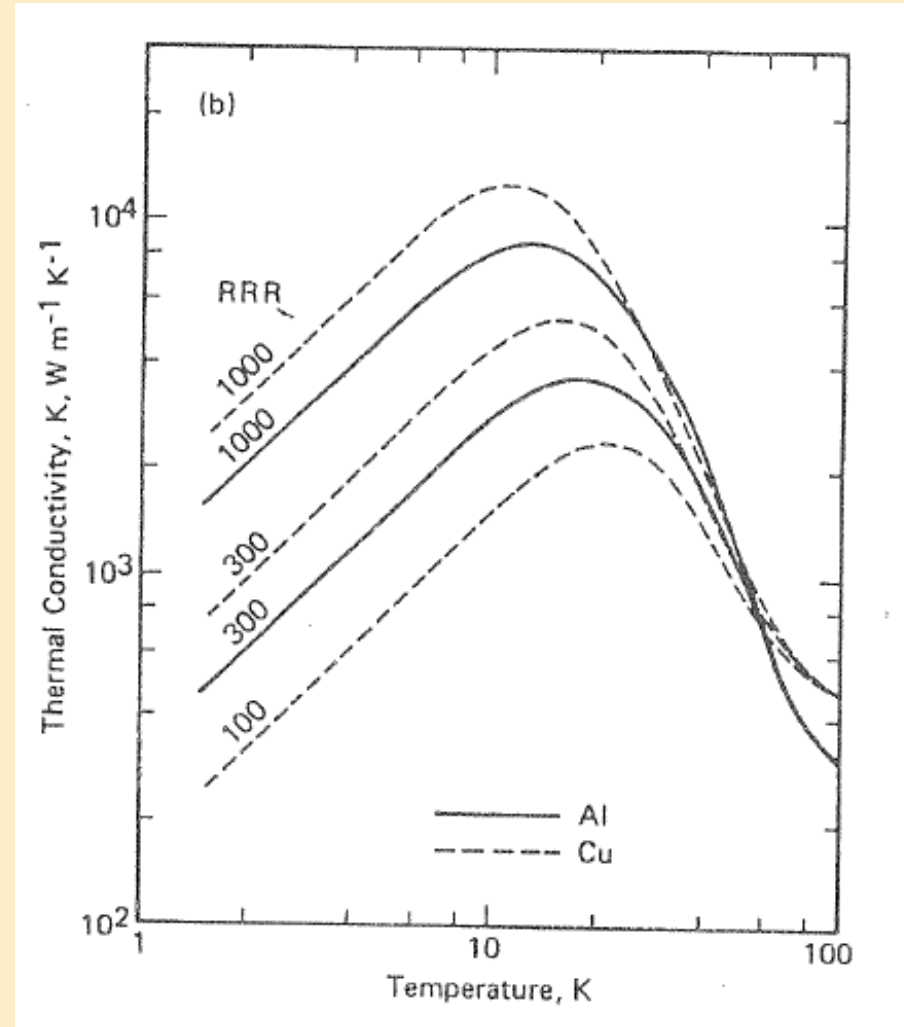
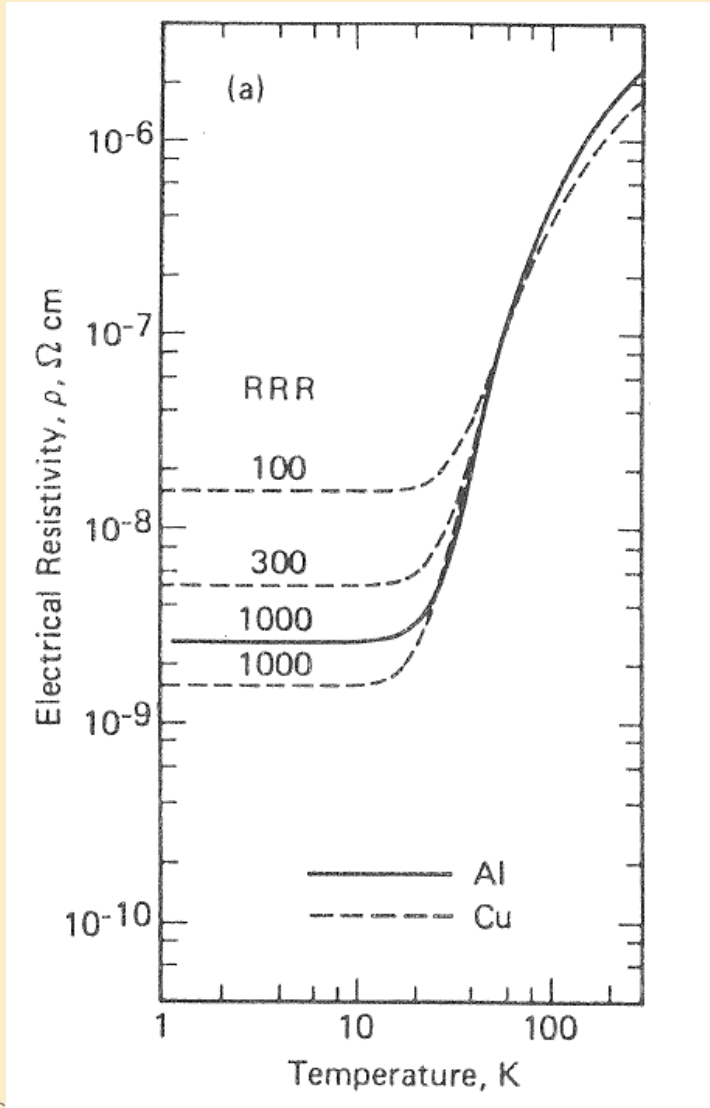
$$\int_{T_{op}}^{T_{eq}} k \left[\frac{wh}{A} (T - T_{he}) - q_J''' \right] = \int_{S_{op}}^{S_{eq}} S dS$$

$$T_{eq} = T_{op} + \frac{A q_J'''}{wh}$$



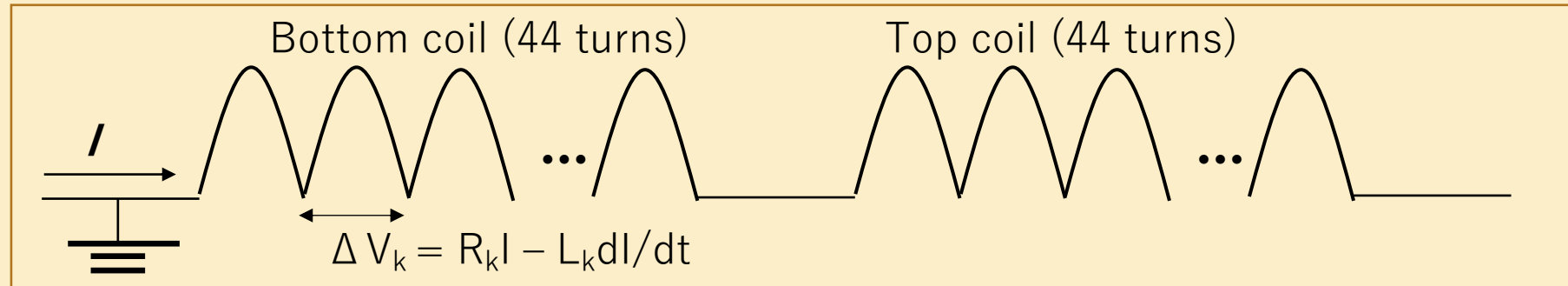
$$\int_{T_{op}}^{T_{eq}} \left[h(T - T_{he}) - \frac{A}{w} q_J''' \right] = 0$$

安定化材



Estimation of the maximum voltage to ground for the 7m-long magnet

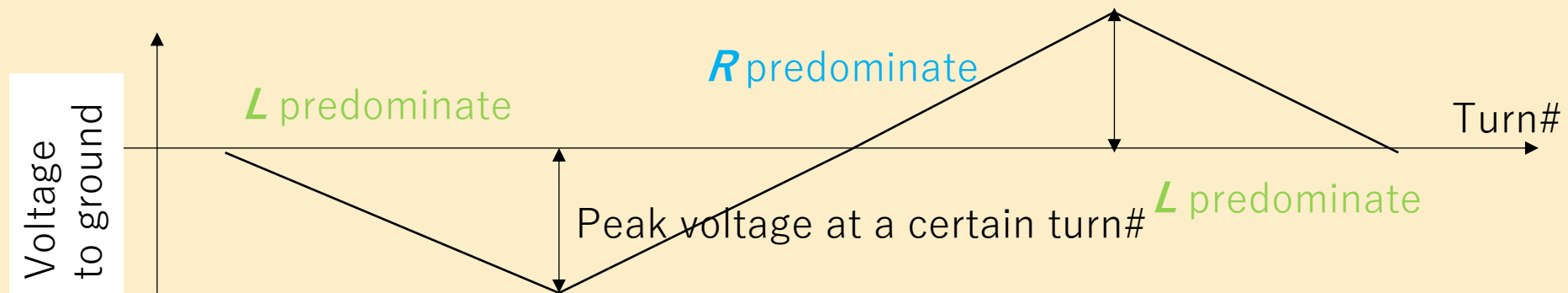
Resistance and mutual inductance are computed for each turn
 (R_k, L_k : k =turn#, 88 turns in total)



Then sum the voltage drops (ΔV_k) until X turns :

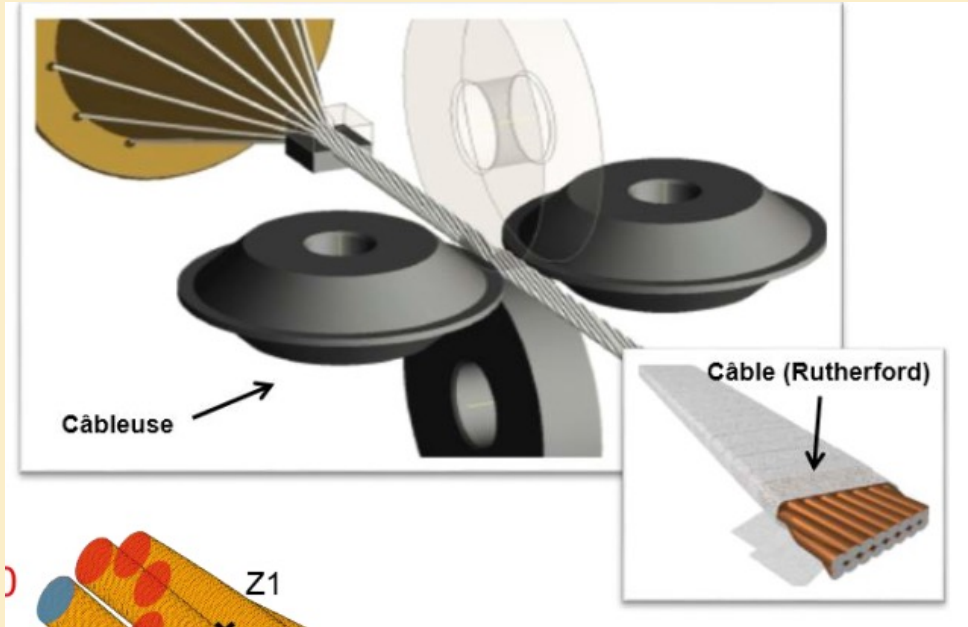
$$V_{\text{to ground}}(X) = \sum_{k=1}^{k=X} \Delta V_k$$

index k : turn# (1-88)



We define the highest $V_{\text{to ground}}(X)$ as the maximum voltage to ground at quench

NbTi Rutherford cableの製造工程



<https://indico.cern.ch/event/1077978/>



