

3. 超伝導電磁石の基礎

高エネルギー加速器研究機構

鈴木 研 人

目次

超伝導電磁石の基礎

1	はじめに	3-1
2	第II種超伝導体の特性	3-1
2.1	GLコヒーレンス長と上部臨界磁場 B_{c2}	3-1
2.2	ピン留め効果と臨界電流密度	3-2
2.3	硬い超伝導体の磁化	3-3
2.4	臨界状態モデル	3-5
2.5	Flux jump	3-8
2.6	磁化による磁場精度の影響	3-10
3	実用超伝導ケーブルの特性	3-12
3.1	NbTi 素線 - 極細多芯線	3-12
3.2	超伝導電磁石用ケーブル Rutherford cable	3-13
4	クエンチ保護	3-18
4.1	MPZとMQE	3-18
4.2	Quench propagation velocity	3-20
4.3	クエンチ検出	3-20
4.4	MIITs	3-21
4.5	クエンチ保護技術	3-21
4.6	Quench training	3-24
5	まとめ	3-25
6	付録	3-26
6.1	多極成分	3-26
6.2	NbTi 臨界電流密度	3-26
6.3	Load line	3-26
	参考文献	3-27

超伝導電磁石の基礎

1. はじめに

前講義の超伝導基礎で学んだように、超伝導体は外部磁場を排除する特性を持ち、これをマイスナー効果と呼ぶ。この電磁的特性はロンドン兄弟が提唱したロンドン方程式を解く事で導かれ、その実態は超伝導物質の表面に流れる遮蔽電流によって、超伝導体内部に侵入する磁束を表面からロンドン侵入長 λ 程度の距離で減衰させるものである。Hg や Sn などの単体元素金属が主となる第 I 種超伝導体は臨界磁場 B_c 以下でマイスナー状態を形成するが、 $B_c(T=0)$ は 10 mT 程度と非常に小さく、本講義のスコープとなる超伝導電磁石への応用としては不向きである。

では、第 II 種超伝導体ではどうだろうか？この超伝導体は主に合金や化合物で構成されていて、下部臨界磁場 B_{c1} と上部臨界磁場 B_{c2} の 2 つの臨界磁場を有する。 B_{c1} 以下では第 I 種超伝導体と同様のマイスナー状態である。 B_{c1} を超えると、超伝導状態を保ったまま磁束が内部に侵入する。より具体的には、磁束量子 (quantum of flux : $\phi_0 = h/2e$) が超伝導体内部で渦糸 (vortex line あるいは flux line) を形成する。この状態は混合状態 (mixed state)、あるいは渦糸状態 (vortex state) と呼ばれる。もし、外部からかかる磁界が上部臨界磁場 B_{c2} を超えると、超伝導状態は壊れ、常伝導状態へと転移するが、それでも高いものでは数 10 T と第 I 種超伝導体と比べても非常に大きな臨界磁場を有している。この臨界磁場に加えて超伝導性質の善し悪しを決定するのが、臨界電流密度 J_c である。この値が高ければ高いほど、当然たくさんの電流を超伝導体に流す事ができるので、磁石応用にもってこいである。この値を決定しているのは超伝導体内部に侵入した磁束のピン留め力であるが、実用的な超伝導体はいわゆる「硬い超伝導体」と呼ばれ、このピン留め力が強い。例えば硬い超伝導体の代表格である Nb_3Sn の場合だと、目標値ではあるが、将来の欧州の加速器計画 FCC-hh への応用で $J_c=1500 \text{ A/mm}^2$ at 16 T を目

指している[1]。しかし、ピン留め力の強さは言い換えると外部磁界に対して顕著な hysteresis を生み出す事と等価であり、加速器磁石の実運用においては多くの課題・悩みを設計者に与える。本講義では実用的な超伝導体の基礎から始めて、ケーブルの特性、そして電磁石の実運転において重要となるクエンチ保護について述べていく。

2. 第 II 種超伝導体の特性

加速器様超伝導磁石には第 II 種超伝導体が使われている。本章ではこの超伝導体の特性 (磁化) について解説し、実用化に向けてどのような条件が必要かを整理していく。

2.1. GL コヒーレンス長と上部臨界磁場 B_{c2}

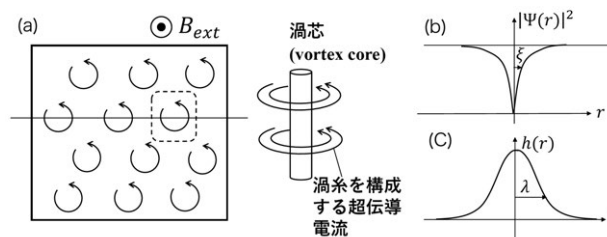


Figure 1: (a) 磁場中に置かれた第 II 種超伝導体に分布する磁束。ピン留め効果は無視している。この時 Abrikosov vortices と呼ばれる三角格子状に渦糸は配置される[2]。なお、渦糸を構成する超伝導電流のネット効果により超伝導体内部では電流値は正味 0 となる。(b) GL 理論で登場する秩序パラメータの分布。渦糸中心軸周りでは超伝導は部分的に壊れていて、コヒーレンス長 ξ 程度で回復する。(c) 局所磁場 $h(r)$ の分布。

第 I 種及び第 II 種超伝導体の定量的な切り分けは Ginzburg-Landau (GL) theory において導かれる以下の GL parameter (κ) で決める事ができる：

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \begin{cases} > \frac{1}{\sqrt{2}} & (\text{type II}) \\ < \frac{1}{\sqrt{2}} & (\text{type I}) \end{cases} \quad (2-1)$$

ここで ξ は GL コヒーレンス長と呼ばれる。既に述べたように、第 II 種超伝導では $B_{c1} < B < B_{c2}$ の混合状態においては、磁束は渦糸の形で侵入する (Figure 1a 参照)。この時、渦糸間には斥力が生じ、Abrikosov 格子とよばれる三角格子状に配置

されるのが最も安定とされる[2]。渦糸の中心軸周りでは超伝導状態が部分的に破壊されており、これが ξ 程度で回復し(Figure 1b)、磁場はロンドン侵入長 λ 程度で減衰する(Figure 1c)。Table 1には各超伝導物質の λ と ξ をまとめている。一般的に λ は物質によって大きな違いはない事がわかっているが、表をみるとわかる通り、 ξ は物質によって大きく異なる事がわかる。この中で In, Pb, Sn は第 I 種に属し、Nb は第 II 種に属している。

Table 1: 各物質のロンドン侵入長 λ と GL コヒーレンス長 ξ

Material	λ (nm)	ξ (nm)
In	24	360
Pb	32	510
Sn	~30	~170
Nb	32	39

なお、第 II 種超伝導体の上部臨界磁場 B_{c2} はコヒーレンス長と量子磁束を用いて以下のように表せる：

$$B_{c2}(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)} \propto T_c - T \quad (2-2)$$

ここで、 T_c は転移温度を表す。よって、 $\kappa \gg 1$ を満たす物質を用いれば、臨界磁場及び転移温度が高くなり実用的な第 II 種超伝導体という事になる。ここで実用的、という意味は大電流を流す事ができ、5-10 T の磁場中で運用できる、という意味として解釈していただきたい。

2.2. ピン留め効果と臨界電流密度

コヒーレンス長が短くなればと実用的な超伝導体になる事を学んだ。一方臨界電流密度はどうだろう？今、混合状態($B_{c1} < B < B_{c2}$)において超伝導体に侵入した磁束が一様に分布している場合を考える。この状態で電流密度 \vec{J} を流してみよう(Figure 2)。 n_L を単位面積あたりの渦糸数、 \vec{z} を磁束方向の単位ベクトルとすると、以下のローレンツ力が渦糸に働く：

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times n_L \phi_0 \vec{z} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2-3)$$

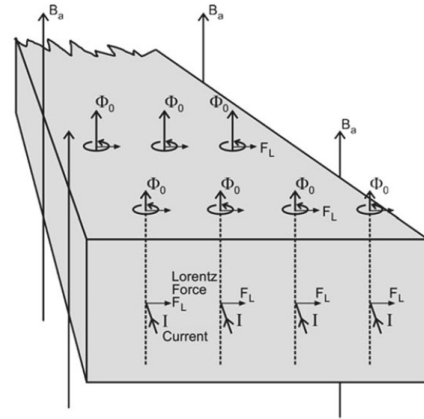


Figure 2: 磁束フロー[3]。第 II 種超伝導体内に形成する渦糸にローレンツ力(F_L)が働く事で起こる。

このように、ローレンツ力は電流とは垂直方向に働く。この力によって渦糸が速度 v_L で動いたとすると以下の電場が誘起される：

$$\vec{E} = \vec{v}_L \times \vec{B} \quad (2-4)$$

渦糸が等速運動していると仮定した場合、ローレンツ力と摩擦力(v_L に比例)とが釣り合っていて、この摩擦係数を η とすると、各渦糸の運動方程式は：

$$\eta \vec{v}_L = \vec{J} \times \phi_0 \vec{z} \quad (2-5)$$

で与えられる。式(2-5)を式(2-4)に代入する事で：

$$\vec{E} = \frac{\phi_0 B}{\eta} \vec{J} \quad (2-6)$$

$$\rho_{FF} \equiv \frac{\phi_0}{\eta} B \quad (2-7)$$

と磁束フロー抵抗 ρ_{FF} が求まり、これは外部磁場に対して比例関係にある事がわかる。抵抗が生じると言う事はエネルギー散逸が発生する、という事である。実質的に磁束フロー抵抗が生じた時の電流密度が臨界電流密度という事になる。

さて、磁束フローが生じやすい状況は超伝導磁石への応用としてはよろしくない。もっと言うと、現実の第 II 種超伝導体ではこの状況は例外的であり、実際には不純物や欠陥などによって局所的に超伝導が壊れていて、磁束はこういったピニ

Table 2: 高い上部臨界磁場・転移温度をもつ第 II 種超伝導体一覧 ([3] より引用)

Material	Crystal structure	T_c (K)	B_{c2} (T) at 4.2K	J_c (A/mm ²) at 4.2K at B (T)
Nb-Zr	A-2	9.5	11	1×10^2 (6 T)
Nb-Ti	A-2	9.3	11	1×10^4 (7 T)
Nb ₃ Sn	A-15	18.3	23	2×10^2 (20 T)
Nb ₃ Al	A-15	18.9	32	1.5×10^2 (16 T)
Nb ₃ (Al,Ge)	A-15	20.5	41	1×10^4 (12 T)
Nb ₃ Ga	A-15	20.3	34	
Nb ₃ Ge	A-15	23.2	37	1×10^3 (21 T)
V ₃ Si	A-15	17.0	23.5	1×10^1 (10 T)
V ₃ Ga	A-15	15.2	23	1×10^3 (20 T)
V ₂ (Hf,zr)	C-15	10.1	23	3×10^3 (6 T)

ングサイト(pinning site)にトラップされる。ピン留めされた磁束にはピン留め力(pinning force) F_p が働き、これがローレンツ力 F_L と釣り合う事で磁束フローは生じない。とはいえ、電流をどんどん上げればローレンツ力は上昇し、いずれは磁束フローが生じる。この時のピン留め力 F_{pc} と臨界電流密度 J_c の関係は以下ようになる：

$$\vec{F}_{pc} = -\vec{J}_c \times \vec{B} \quad (2-8)$$

ピン留め力を高める事で、臨界電流密度 J_c が向上するが、このピン留め力の強い第 II 種超伝導体が「硬い超伝導体 (hard superconductor)」と呼ばれる。Figure 3 は、硬い超伝導体の代表格 NbTi と Nb₃Sn について、ピン留め力を B_{c2}/B の関数で表したものである。

これまでに実用化が検討されてきた硬い超伝導体を Table 2 にまとめている。化合物である A15 系の超伝導体では優れた臨界電流密度・臨界磁場・転移温度を有する事がわかる。しかし後で述べるように超伝導電磁石で使用するケーブルは極細芯化が必須でありそのケーブル技術の確立、加えて要求される機械特性から、現状では NbTi が最も実用的な超伝導体である。

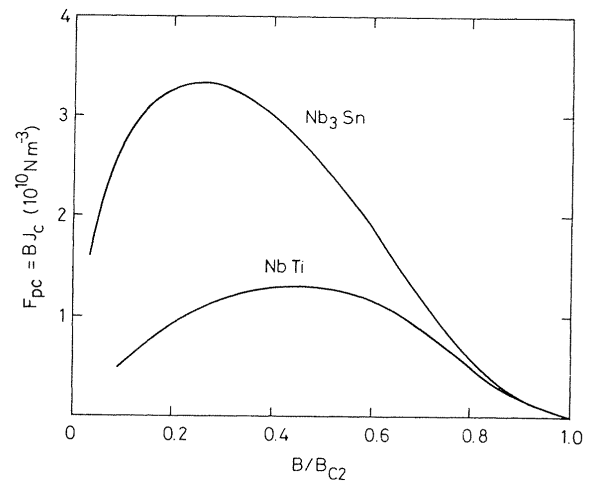


Figure 3: NbTi と Nb₃Sn のピン留め力 [4]

2.3. 硬い超伝導体の磁化

ピン留め効果を考慮しない第 II 種超伝導体の場合を考えよう (Figure 4)。この時、 $B < B_{c1}$ の領域では第 I 種超伝導体と同様にマイスナー状態であり、外部磁場の内部への侵入を完全に排除するため、磁化は外部磁場に対して比例関係にある。しかし、既に述べたように、外部磁場が B_{c1} を超えると、磁束が侵入し渦糸を形成するため、内部の磁束密度は $B = n_L \phi_0$ となり、磁化は減少して

いく。これまでの過程は外部磁場に対して可逆反応(reversible response)である。

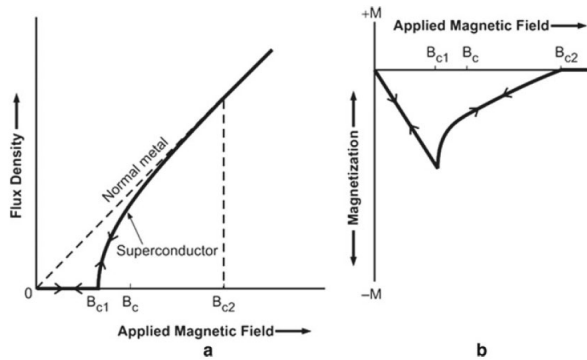


Figure 4: ピン留め効果を考慮しない時の第 II 種超伝導体内部の磁束密度(a)と磁化(b) [3]

では、ピン留め効果を考慮した場合はどうなるだろうか(Figure 5)。この時、渦糸はピンニングサイトにトラップされ、自由に動く事ができないため、外部磁場が B_{c1} を超えた直後でも内部の磁束密度は緩やかに立ち上がっている。磁場を下げていった場合は、サイトから渦糸は動く事ができず、結果的に磁束密度曲線も磁化曲線も不可逆(irreversible)な振る舞いを示す。また、外部磁場を戻したとしても内部の磁束密度は完全に排除できておらず、これによる残留磁化がみられる。

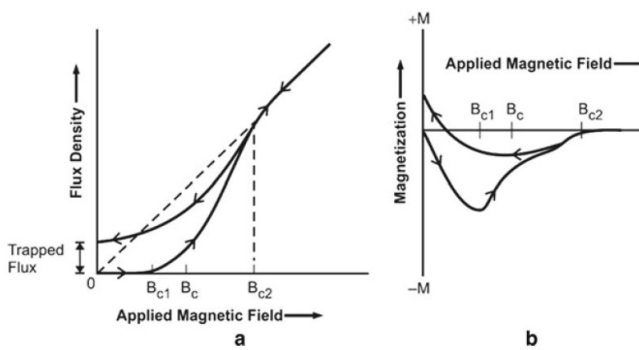


Figure 5: ピン留め効果を考慮した第 II 種超伝導体内部の磁束密度(a)と磁化(b) [3]

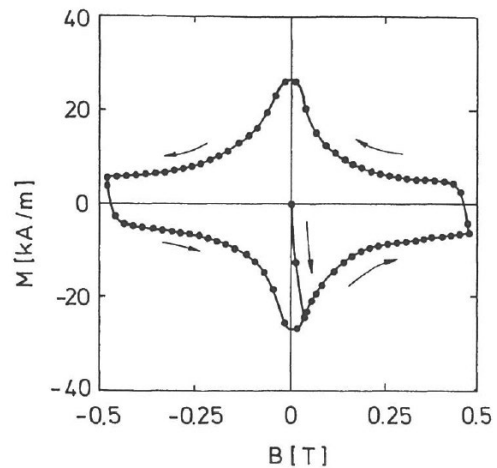


Figure 6: 極細多芯線 NbTi の磁化曲線 [5]

Figure 6 に硬い超伝導体である NbTi 極細多芯線の磁化曲線(測定値)を示す。 $(B, M) = (0, 0)$ が始点となり、矢印の方向に沿って外部磁場を変化させている。磁化は常に外部磁場の変化の方向に対して反磁性的な振る舞いを示す。このような磁化の hysteresis はエネルギー損失を伴い、以下の式に示す磁化損失 Q が発生する：

$$Q_{hyst} = \oint M(B)dB \quad (2-9)$$

すなわち、この損失は磁化曲線のループ面積分に相当し、超伝導体内部に発生する熱損失となる。当然、磁化が大きければこの損失は大きくなると理解いただけると思う。

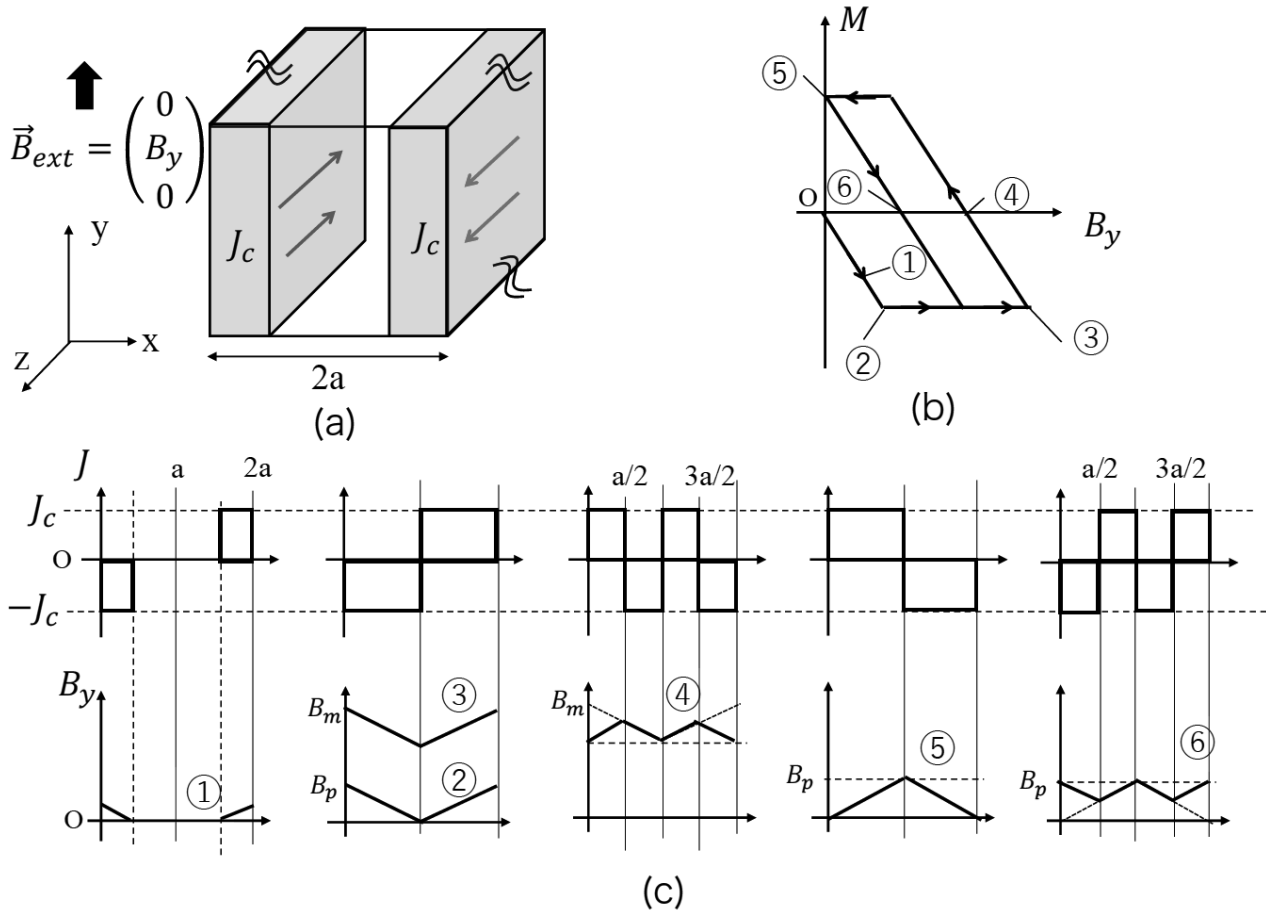


Figure 7: 超伝導 slab を用いた臨界状態モデル。(b)超伝導 slab の磁化曲線(M-B)。(c)各 B_y における slab 内部の電流密度分布と磁束密度分布。初めは磁場に晒されていない virgin state としている。

2.4. 臨界状態モデル

硬い超伝導体の磁化の定式化は Bean らによって行われた[6]。このモデルは臨界状態モデル (critical state model: CSM) と呼ばれ、磁化の hysteresis を定量的に説明できる。CSM によると内部に染み込んだ磁束は臨界電流密度 J_c によって追い出される(遮蔽される)。Figure 7(a)に示すように、slab と呼ばれる y 方向と z 方向が無限大に大きい超伝導の厚板(厚み $2a$)に対して y 方向に外部磁場 B_{ext} をかけていく。なお、この厚板の初期状態は磁場にさらされていない virgin state とする。Ampere の法則により、磁界 H の curve ($\nabla \times \vec{H}$) は電流密度を生み出す。CSM ではこの電流密度の値を J_c と一致すると考える：

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}_{ext} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \hat{z} = J_c \hat{z} \quad (2-10)$$

超伝導体内部に侵入する磁束密度を最も短い距離で遮蔽するように、局所磁場に依らない一定値 J_c が流れていると考えるのである。この電流は遮蔽電流 (shielding current または persistent current) とも呼ばれる。Figure 7 (b) に hysteresis curve の各過程①-⑥における slab 中の電流密度分布及び磁束密度の分布を示す。Virgin state から外部磁場を徐々に上げていくと、内部に磁束が侵入する (①) が、これは臨界電流密度 J_c で遮蔽される。この時、内部の磁束密度は式(2-10)より以下の式で表される：

$$B(x) = B_y - \mu_0 J_c x \quad (2-11)$$

外部磁場を上げていくと、slab 全体に磁束が侵入する (②)。この時の外部磁場の値を B_p とすると：

$$B_p = \mu_0 J_c a \quad (2-12)$$

となる。この B_p は「penetration field」と呼ばれる。さて、この後外部磁場を B_m まで上げたとしても内部の電流密度分布に変化は生じない (③)。これは磁化が変化しない事と同義である。外部磁場を B_m から下げていくと、Figure 7 (c)④に示すように新たな遮蔽電流の層が現れる。さらに下げていき外部磁場を 0 まで落としたとしても遮蔽電流は残り、残留磁化が現れる (⑤)。このようにして、CSM は硬い超伝導体の hysteresis を上手く説明でき、実験でも再現されている [7]。さて、⑥の過程に注目しよう。磁化が残っている状態で外部磁場を B_p まで上げた場合、virgin state の時と比べて磁化分布は異なり 0 となる。これは超伝導電磁石の運用を考えた時、virgin state から運転した時と、一度電流値を落として再び電流値を上げた時の途中過程の磁場分布は異なる事を意味する。実際の運転では一度超伝導線材には penetration field 以上の磁場を経験させて、その後また電流値を落とし、再び電流値を上げてから運転を行う。

Bean が提唱した CSM では、マイスナー状態の時に見られる可逆過程は無視し、また局所磁場によらず J_c は常に一定値をとるとしている。CSM をベースとして、 J_c の局所的な磁場依存性を考慮したのが Kim らであり [8]、以下の式を与えた：

$$J_c(B) = \frac{\alpha(T)}{B+B_0} \quad (2-13)$$

ここで、 B_0 は物質によって変化する定数で実験的に求めている。 $\alpha(T)$ も物質によって変化する

定数だが、温度に依存する事がわかった。この依存性はピン留めされた磁束が熱励起によってピン留めポテンシャルの障壁を乗り越えて別のピンングサイトに移動する flux motion に起因する事が後に証明された [9][10]。この現象は「flux creep」と呼ばれる。

では再び CSM に立ち返り、外部磁場を上昇する過程における磁化 M を求める：

$$M = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \frac{B_y}{\mu_0} \quad (2-14)$$

ここで \bar{B} は slab 内の平均磁束密度であり、以下の式で与えられる：

$$\bar{B} = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} B(x) dx = \frac{B_y^2}{2aJ_c} = \frac{\mu_0 B_y^2}{2B_p} \quad (2-15)$$

式(2-15)を式(2-14)に代入して：

$$M = \frac{B_y}{\mu_0} \left(\frac{B_y}{2B_p} - 1 \right) \quad (0 \leq B_y \leq B_p) \quad (2-16)$$

$$M = -\frac{1}{2} J_c a \quad (B_y > B_p) \quad (2-17)$$

となる。式(2-17)より磁化は slab の大きさと比例関係にある事がわかる。

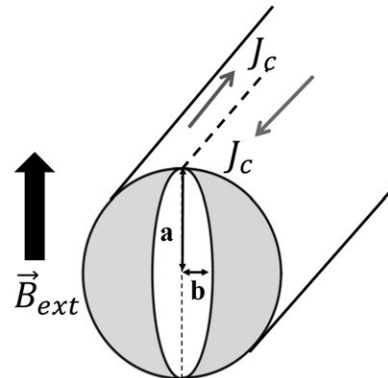


Figure 8: 臨界状態モデルをワイヤーに適用した場合

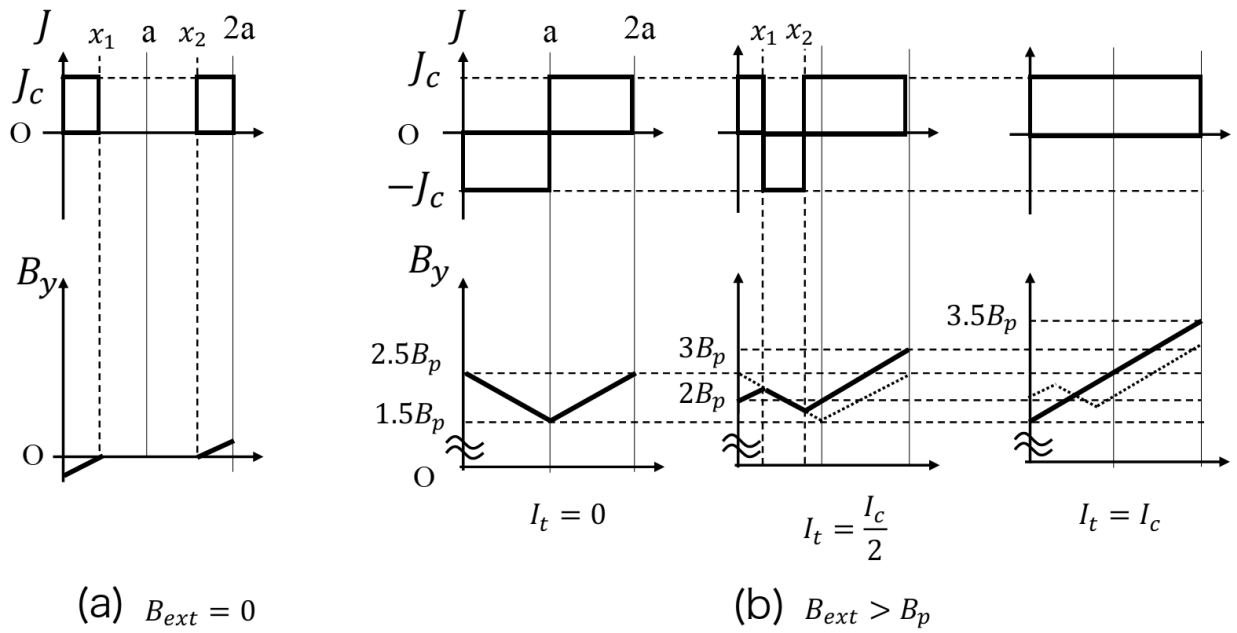


Figure 9: 臨界状態モデルにおいて超伝導 slab に輸送電流が存在する場合の電流密度・磁束密度分布。(a)外部磁場が存在しない場合。(b) Penetration field 以上の外部磁場が存在する状態で通電した場合。

さて、実際にはこのような slab 型の超伝導体を磁石に使用する事はなく、後に述べるように極細多芯型のワイヤーを用いる。その時の磁化モデルも CSM をベースとして考える事ができる (Figure 8)。外部磁場 B_{ext} を上げていき、Penetration field に達する前は電流 (J_c) は外殻を Bipolar 的に流れ、芯内部の楕円で示されている部分には電流は存在しない。この「空白部分」の楕円の長軸半径 a (ワイヤー半径と常に一致)、短軸半径 b とすると、磁化及び penetration field は次のようになる：

$$M = -\frac{4}{3\pi}J_c \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)a, \quad (0 \leq B_{ext} \leq B_p) \quad (2-18)$$

$$M = -\frac{4}{3\pi}J_c a, \quad (B_{ext} > B_p) \quad (2-19)$$

$$B_p = \frac{2\mu_0 J_c a}{\pi} \quad (2-20)$$

ここまで輸送電流の事は考慮してこなかったが、実際には磁石に通電して励磁をする訳だから当然無視できない。CSM によると超伝導体内部には電流密度は常に J_c の値である。簡単のため Figure 9 (a) に示した slab のモデルで考える。ここで示すように外部磁場 $B_{ext} = 0$ で電流 I_t (A/m:

ampere per unit length) を流す。 J_c は常に一定と考えるとその存在範囲は：

$$x_1 = 2a - x_2 = \frac{I_t}{2J_c} \quad (2-21)$$

となる。 $x = 2a, 0$ でそれぞれ正負の B_y が見られるが、これは輸送電流が生み出す自己磁場が ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{I_t}{2a}$) が見えていて、その値は：

$$B_y(x = 2a) = \mu_0 J_c \times \frac{I_t}{2J_c} = \mu_0 \frac{I_t}{2} \quad (2-22)$$

では、外部磁場が存在する状態で通電するとどうなるだろう？ Figure 9(b) に示すように初め slab は penetration field 以上の外部磁場を経験させておく (文献[11]に倣い $B_{ext} = 2.5B_p$ とする)。そして、臨界電流の半分 ($I_t = \frac{I_c}{2} = J_c a$) の値まで通電する。この時輸送電流が生み出す磁場の影響で：

$$B_y(x = 0) = 2.5B_p - \mu_0 \frac{I_t}{2} = 2B_p \quad (2-23)$$

$$B_y(x = 2a) = 2.5B_p + \mu_0 \frac{I_t}{2} = 3B_p \quad (2-24)$$

となり、Figure 9 (b)の中央に示すような分布となる。なおここで式(2-12)と $I_t = J_c a$ を用いた。さらに電流値を上げていき臨界電流に達したとき($I_t = I_c = 2J_c a$)と Figure 9 (b)の右端の分布となる。さて、Figure 9(b)の slab の磁化を考えてみよう。式(2-15)より slab 内の平均磁束密度を求めると各々のケースにおいて：

$$\bar{B} = 2B_p \quad (I_t = 0) \quad (2-25)$$

$$\bar{B} = 2.25B_p \quad \left(I_t = \frac{I_c}{2}\right) \quad (2-26)$$

$$\bar{B} = 2.5B_p \quad (I_t = I_c) \quad (2-27)$$

と計算できる。これらを用いて式(2-14)より：

$$M = -\frac{J_c}{2}a = M_0 \quad (I_t = 0) \quad (2-28)$$

$$M = -\frac{J_c}{4}a = \frac{1}{2}M_0 \quad \left(I_t = \frac{I_c}{2}\right) \quad (2-29)$$

$$M = 0 \quad (I_t = I_c) \quad (2-30)$$

となり、輸送電流が上がるに従って下がる。詳細な計算をする事で磁化は電流値に対して線形に減少する事が確かめられる。磁化の減少は slab だけでなく、Figure 8 に示すワイヤーの計算でも確かめられる。詳細は省くが、輸送電流値に対して以下のように減少する[12]：

$$M(J_t) = \left\{1 - \left(\frac{J_t}{J_c}\right)^2\right\} M(0) \quad (2-31)$$

ここで、 J_t は輸送電流をワイヤー面積で割った電流密度($J_t = \frac{I_t}{\pi a^2}$)である。

2.5. Flux jump

1960 年代より硬い超伝導体を用いた線材が使われるようになるが、臨界電流よりも十分低い電流値でクエンチ（常伝導転移）が生じる問題に見舞われた。定性的には以下のような原因で起こると考えられる。対象となる超伝導体サンプルには磁場が引加されていて混合状態 ($B_{c1} < B < B_{c2}$) にあるとする。この時何らかの理由で入熱 (ΔQ) が加わると、サンプルの持つ熱容量(C)に応じて 1) 温度が上昇 ($\Delta T = \frac{\Delta Q}{\Delta C}$)、そして 2) 臨界電流密度が

下がる。すると、サンプル内にはさらに磁束が侵入し、この磁束侵入により 3) サンプル内には電場 ($\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$) が生じ、ジュール熱(Δg)が発生する事で 4) 温度が上昇するという帰還ループを生む。1)-4) がカスケード的に起こってしまうと、温度上昇が延々と続き、冷却が間に合わなければやがて転移温度 T_c を超え、最終的に超伝導状態が壊れる＝クエンチするに至ってしまう。このようなカスケード現象は「flux jump」と呼ばれる。

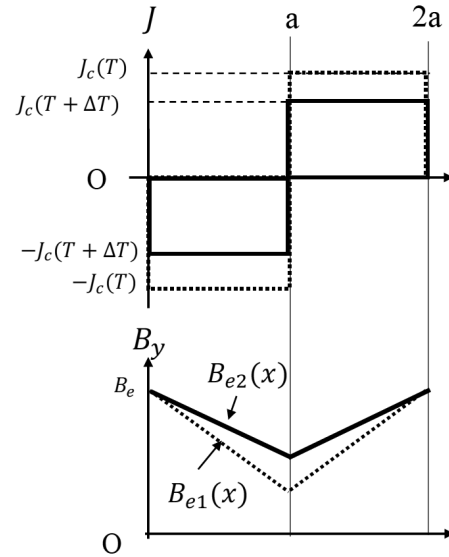


Figure 10: 温度上昇後の slab 内部の臨界電流密度及び磁束密度分布。

それでは、flux jump が起こる磁気不安定性の条件を Figure 7 に示した slab モデルを用いて調べよう。Slab には y 方向に $B_e (> B_p)$ 磁場がかかっているとする。Slab の温度が上昇し、

$$J_c(T) \rightarrow J_c(T + \Delta T) = J_c(T) - \Delta J_c$$

と変化したとする (Figure 10)。なおここでは、 $\Delta J_c > 0$ としている。この時 slab 内の磁束密度 ($0 \leq x \leq a$)は式(2-11)より：

$$B_{e1}(x) = B_e - \mu_0 J_c(T)x \quad (2-32)$$

$$B_{e2}(x) = B_e - \mu_0 (J_c(T) - \Delta J_c)x \quad (2-33)$$

この差分 $\Delta B_e(x) = B_{e2}(x) - B_{e1}(x)$ は次のようになる：

$$\Delta B_e(x) = \mu_0 \Delta J_c x \quad (2-34)$$

磁束の侵入に伴い、電場が発生する：

$$\begin{aligned} \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} &= - \int \frac{\Delta B_e(x)}{\Delta t} \cdot d\vec{S} \\ \Leftrightarrow \oint (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{l} &= - \int \frac{\Delta B_e(x)}{\Delta t} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (2-35)$$

ここでストークスの定理を用いた。電場方向は Figure 7(a)の z 方向と一致する。また、 $x=a$ においては、対称性のため $E(a) = 0$ である。z 方向の任意の長さ L 分の経路積分を $x \leq x' \leq a$ の範囲に限定して式(2-35)を計算すると電場の位置依存性が得られる：

$$\begin{aligned} (E(x) + E(a))L &= -\mu_0 \frac{\Delta J_c}{\Delta t} L \left(\int_x^a x' dx' \right) \\ \Leftrightarrow E(x) &= -\mu_0 \frac{\Delta J_c}{\Delta t} \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \end{aligned} \quad (2-36)$$

よって y,z 方向において単位長あたりに発生するジュール熱(Δg)は $0 \leq x \leq a$ の範囲で(J_c は-z 方向に流れている事に注意して)：

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^a -J_c E(x) \Delta t dx &= \mu_0 J_c \Delta J_c \frac{1}{2a} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= \mu_0 J_c \Delta J_c \frac{a^2}{3} \end{aligned} \quad (2-37)$$

となる。今、臨界電流密度の温度依存性を次のように線形と仮定する：

$$J_c(T) = J_c \frac{T_c - T}{T_c - T_{op}} \quad (2-38)$$

ここで、 T_{op} は運転温度とし、 J_c は T_{op} における当初の臨界電流密度とする。 ΔT 変化した際の臨界電流密度の変化 ΔJ_c は式(2-38)より：

$$\Delta J_c = J_c \frac{\Delta T}{T_c - T_{op}} \quad (2-39)$$

となるので、エネルギーバランスは式(2-37)と式(2-39)を用いて：

$$\Delta Q + \Delta g = C \Delta T$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta Q &= \left(C - \mu_0 J_c^2 a^2 \frac{1}{3(T_c - T_{op})} \right) \Delta T \\ \Leftrightarrow \Delta Q &\equiv \tilde{C} \Delta T \end{aligned} \quad (2-40)$$

となり、 \tilde{C} が実効的な熱容量を与える。この式より、磁気不安定性を与える条件は $\tilde{C} < 0$ となるケースであり、以下の stability parameter (β) を導入して条件を決める事ができる：

$$\frac{\mu_0 J_c a^2}{c(T_c - T_{op})} = \beta < 3 \quad (2-41)$$

また、slab の大きさ a について解くと：

$$a < \sqrt{\frac{3C(T_c - T_{op})}{\mu_0 J_c^2}} \quad (2-42)$$

と、磁気不安定性が起こる slab 幅の条件を導く事ができる。同様の条件は Figure 8 のワイヤーの場合でも計算ができて[5]：

$$r_{max} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{C(T_c - T_{op})}{\mu_0 J_c^2}} \quad (2-43)$$

が flux jump を起こさないワイヤーの最大許容半径という事になる。NbTi の例を式(2-43)に当てはめてみる。運転条件として $T_{op} = 4.2$ K、 $B_e = 5$ T を選び、 $J_c \sim 3000$ A/mm²、 $T_{op} = 7.2$ K、 $C = 5.6 \times 10^3$ J/(m³K) とすれば、 $r_{max} = 30$ μ m となる。オーダーとしては数+ μ m がワイヤー半径に許される最大の大きさである。なお、ここまでの議論では断熱条件下における磁気安定性「adiabatic stability」について述べてきた。それでは、外部との熱交換があった場合はどうなるだろう？ジュール熱が発生する状況下では拡散係数 D_m を用いた拡散方程式が当てはまる：

$$D_m \nabla^2 \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad D_m \nabla^2 \vec{j} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (2-44)$$

ここで、 $D_m = \mu_0 / \rho$ であり、 ρ は抵抗率であり、磁束密度あるいは電流密度が時定数 $\tau_m \propto 1/D_m$ で拡散する事を意味する。一方外部との熱やりとりがある場合、物質は：

$$D_t \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-45)$$

と熱拡散係数 $D_t = \frac{k}{c}$ (k :熱伝導率) を用いた拡散方程式に従う。 $D_m \gg D_t$ の場合、外部との熱伝達が間に合わず磁束が短時間で一気に拡散する事を意味し、これまで議論した「断熱条件」と一致する。一方 $D_m \ll D_t$ の場合は上記と逆で熱伝達 (この場合は冷却) によって磁束の拡散が抑えられる。このように周りとの熱の出入りを考慮した安定条件は「dynamic stability」と呼ばれる。この議論から、 $D_m \ll D_t$ を満たす物質を超伝導体と併用する事で、安定性が増す事が理解いただけると思う。そして、このような条件を満たす「安定化材」としては銅が有効 ($\rho \sim 10^{-8} \Omega\text{m}$ 、および $k \sim 1 - 10 \text{ Wcm}^{-1}\text{K}^{-1}$) であり、後に述べる NbTi Rutherford cable の母材としても使用されている。

2.6. 磁化による磁場精度の影響

磁化の影響は磁気安定性だけでなく、実際に磁石が生み出す磁場精度に対しても影響する。実例を用いて紹介しよう。LHC 高輝度アップグレード (HL-LHC[13]) 向けに製造しているビーム分離型超伝導双極磁石(D1)[14]では LHC の Main dipole の outer cable を用いている。このケーブルは極細多芯ワイヤーの NbTi Rutherford cable を用いているが、これを構成する1本の素線(strand)と、素線を構成する超伝導フィラメントの諸元を Table 3 に示す。このケーブルを用いた D1 のノーマル6極成分(b_3)¹の電流依存性を Figure 11 に示す。ここでは実際に測定された結果 (Measured)、フィラメント磁化 (遮蔽電流) を考慮しない計算値(Calc.1)、そして考慮した場合の計算値(Calc.2)を載せている。Figure 11 に示すように、低電流領域では Calc.2 及び実測値ともに hysteresis な b_3 が現れていて、フィラメント磁化を考慮しない Calc.1 との違いが見て取れると思う。一方で高電流領域では Calc.1 も Calc.2 (そして実測値) も同じような b_3 となっている。これは

¹ 多極成分については付録 6.1 で述べる。

式(2-31)でも示したように、輸送電流値が臨界電流に近づくにつれフィラメント磁化が減少する効果が見えている。(尚、定格電流値は 12.11 kA でこの時の Load line ratio (負荷率)²は 77%程度である)。

Table 3: HL-LHC D1 に用いている NbTi Rutherford ケーブルの諸元[15]

Parameter	Unit	Value
Strand		
Filament diameter	μm	6
# of filaments in a strand		6425
J_c at (T, B)=(1.9K, 7T)	A/mm ²	2100
$\mu_0 M$ at (T, B)=(1.9K, 0.5T)	mT	23
Cable		
Strand diameter	mm	0.825
#. of strand in a cable		36
Mid-thickness width	mm	1.480
Keystone angle	degree	0.90
Cable I_c at $B=7 \text{ T}$	A	12960
Cu/SC ratio		1.9

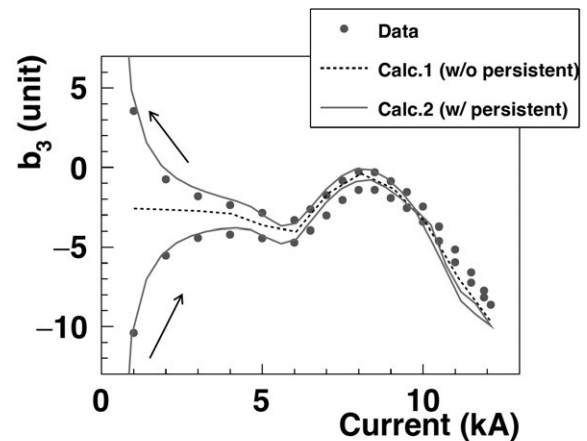


Figure 11: HL-LHC D1 磁石で測定されたノーマル6極成分 (b_3) の電流依存性

フィラメント磁化が磁場精度に影響する他の要因としては flux jump が挙げられる。将来の高磁場超伝導電磁石向けの線材候補として Nb₃Sn

² Load line ratio (負荷率) については付録 6.3 で述べる。

が挙げられるが、これは **Table 2** に示したように NbTi と比べて転移温度及び上部臨界磁場といった性能が大きく上回っていて、液体ヘリウム温度 (4.2 K) で非常に高い J_c ($\sim 3000 \text{ A/mm}^2$ at $B=10 \text{ T}$ 、RRP¹法) が得られる。一方で現状のテクノロジーではフィラメント径が $\sim 50 \mu\text{m}$ (RRP 法と PIT²法の場合)と制限されており、かつ高い J_c を有する事から、低磁場領域において flux jump が起こる (Figure 12)。Flux jump instability は磁場精度にも影響を与える事が報告されている。Figure 13 は HL-LHC 向けに製造されている 11T dipole [16] の flux jump 発生時の磁場変動を示す [17]。最大で $\sim 60 \text{ ppm}$ ほどの変化が見られる。

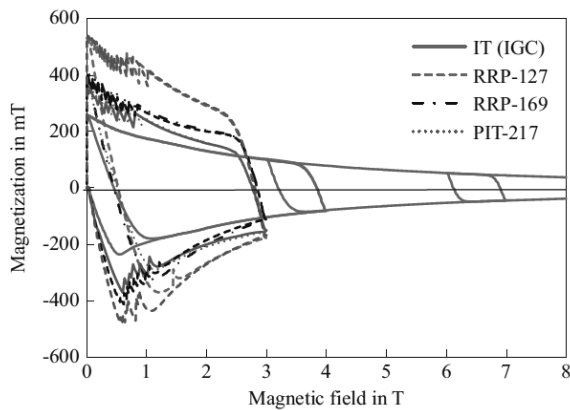


Figure 12: Nb₃Sn 線材の磁化曲線 [18]。Flux jump の影響によって低磁場領域 ($B < 1 \text{ T}$) においてノコギリのような曲線が見られる (RRP-/PIT-Nb₃Sn)。

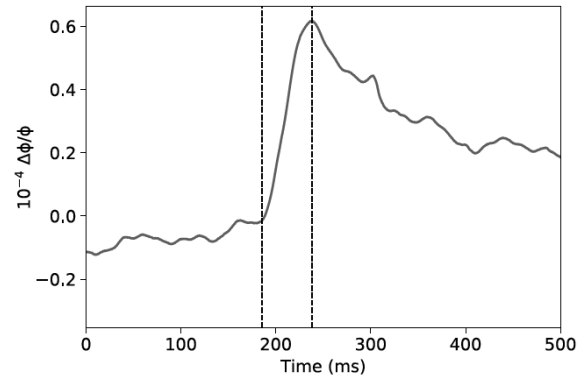


Figure 13: HL-LHC 11 T dipole の測定中に見られた磁場変動 [17]。波線領域が flux jump 出現時に該当する。

¹ Rod Restack Process® の略。Oxford Instrument Science and Technology (OIST) が独自に開発した Nb₃Sn の線材開発技術。銅母体に Sn と Nb ロッドを埋め込んで線引き加工・熱処理を行う「内部拡散法」をベースとした技術で、この方法で生成した Nb₃Sn 線材は HL-LHC の low- β 4 極磁石 (MQXF) [33] や 11T dipole [16] に利用されている。

² Powder in Tube の略。NbSn₂ 粉末を銅母体に埋め込んだ Nb のチューブに詰めて線引き加工・熱処理を行う方法。

3. 実用超伝導ケーブルの特性

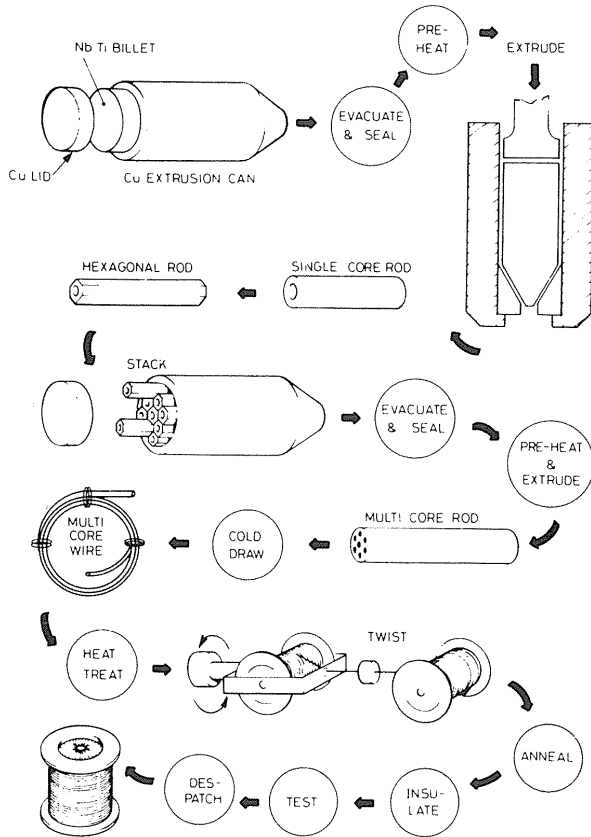


Figure 14: NbTi の極細多芯線(素線)の製造方法[4]

前章の議論から、磁化がもたらす磁気不安定性や磁場精度への影響を考慮して、(ワイヤーであれば)非常に細い硬い超伝導体を用いる必要があると理解いただけたと思う。本章では実用超伝導線材として最も使用されている NbTi のケーブルに注目して、このケーブル構造や電磁特性について解説していく。

3.1. NbTi 素線 – 極細多芯線

NbTi は合金であり、展性や延性に優れているだけでなく安価である事から、現在最も普及されている超伝導線材である。高い転移温度 T_c は 30-42%の重量比で Ti を添加する事で得られ、約 10 K である。上部臨界磁場 B_{c2} は 4.2 K において 11.5 T である。さて、これまでの議論から細いワイヤーが磁気安定性に優れる事がわかったが、電流を流すとなると幾多ものワイヤーを束ねる必要がある。実用的なワイヤーは極細多芯線

(Multifilamentary composite wire) であり、Figure 14 の工程によって製造される。NbTi 合金棒を母体となる銅 (copper matrix) に埋め込んでから線引きし、hexagonal rod 形状にしてデッドスペースをなくし再スタック・線引き加工を繰り返す事で得られる。途中焼きなまし(annealing)をする事で、リボン状の Ti の α 相が析出し、これがピンングサイトとして働き、臨界電流密度が向上する。最終的には超伝導部である NbTi フィラメント径は数 μm と非常に細いものまでに仕上がる (Figure 15 参照)。

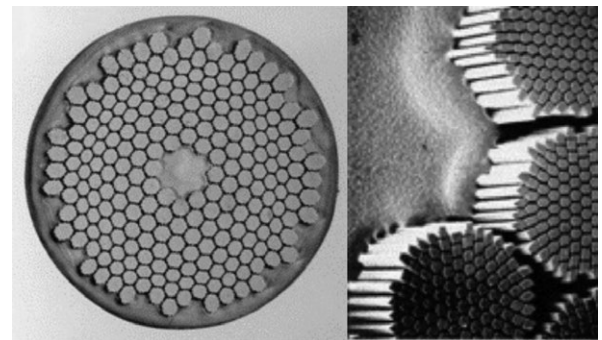


Figure 15: NbTi の素線[19]。(左) 1本あたりの素線($\phi 0.825 \text{ mm}$)には~6300 本もの NbTi フィラメント($\phi 5 \mu\text{m}$)が埋め込まれていて、極細多芯線を構成する。(右)NbTi フィラメントの拡大写真。

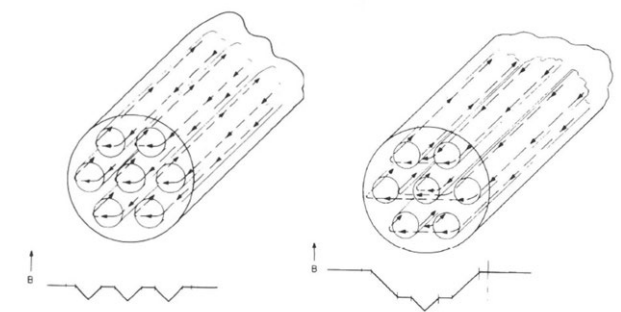


Figure 16: Interfilament coupling current (IFCC)[4]。本来であれば左のような振る舞いを示してほしいが、変動磁場に対して右のように Copper matrix を介して遮蔽電流ループが形成されてしまう。

さて、このように非常に細い超伝導フィラメント NbTi と Cu との複合材を得る事で、flux jump に対して「adiabatic stability」、「dynamic stability」の2つの安定条件が満たされ、超伝導電磁石への応用には一見問題がなさそうである。

しかし、実際には電気抵抗率の低い copper matrix が超伝導フィラメント間の遮蔽電流の「橋渡し」として働いてしまう。すると、静的磁場に対して、遮蔽電流が単一フィラメントで閉じていたのが (Figure 16 左)、変動磁場に対しては copper matrix を介してフィラメント間で渦電流を形成してしまう (Figure 16 右)。この電流は inter-filament coupling current (IFCC) と呼ばれる。IFCC が形成されてしまうと、copper matrix 内部でジュール熱を発生するだけでなく、超伝導フィラメントに対して付加的な磁場をもたらすため、磁気不安定を招き、最悪の場合 flux jump をもたらしてしまう。そのため、極細多芯線そのものを撚る (twist) 事で電流ループの面積を減らす工夫がなされる (Figure 14 工程中 “twist” に相当)。Figure 17 に NbTi 極細多芯線がツイストされている実際の様子を示す。IFCC の時定数および磁化は以下のように定式化できる [4][20] :

$$\tau_{if} = \frac{\mu_0}{2\rho_{eff}} \left(\frac{L_p}{2\pi}\right)^2 \quad (3-1)$$

$$M_{if} = \frac{2}{\mu_0} \frac{dB_i}{dt} \tau_{if} \quad (3-2)$$

ここで L_p は超伝導フィラメントのツイストピッチ (twist pitch) であり、自乗で IFCC の減衰に効いてくる。 ρ_{eff} は IFCC が copper matrix を横切る際の抵抗率 (effective transverse resistivity) である。 \dot{B}_i はフィラメント内に誘起される変動磁場で外部磁場 B_{ext} の掃引速度が遅い場合は $\dot{B}_i \sim \dot{B}_{ext}$ である [4]。フィラメントの撚り線ピッチ ~ 10 mm、 $\rho_{eff} \sim 10^{-8} \Omega\text{m}$ として IFCC の減衰時定数 τ_{if} を計算すると ~ 10 ms となる。この時、 $M_{if} \sim 0.02 \dot{B}$ (単位: T) であるので、メインリング衝突加速器用磁石の磁場掃引速度が 0.01 T/s 程度である事を考えると IFCC による磁化の影響は小さい事がわかる。しかしツイストピッチの自乗で磁化の値は大きくなる事を忘れてはいけない¹。

¹ ツイストピッチだけでなく、copper matrix の抵抗率にも効いてくる。磁気不安定性やクエンチ保護の観点からは抵抗率は低い方が良いが、その分 IFCC による磁化は大きくなる。素線を横切る transverse な抵抗率のみ高い異方性のある抵抗率を持った素線が理想的とされている。



Figure 17: NbTi 極細多芯線ツイスト [4]。内部の様子を観察するため、銅被覆部をエッチングしている。

3.2. 超伝導電磁石用ケーブル Rutherford cable

ここまで、NbTi の素線構造を説明してきた。素線一本あたりに流せる臨界電流 I_c を計算してみる。熱安定性において重要変数となる Copper-to-superconductor ratio (超伝導体に対する銅比) λ 、素線面積 A とすると :

$$I_c = J_c A \frac{1}{1+\lambda} \quad (3-3)$$

であるから、 $A = 1 \text{ mm}^2$ 、 $\lambda = 2$ 、 $J_c = 3000 \text{ A/mm}^2$ ($T = 4.2 \text{ K}$ 、 $B \sim 5 \text{ T}$ を仮定) とすれば、 $I_c = 1000 \text{ A}$ である。素線一本にもそこそこの電流を通電できるが、超伝導電磁石ではより高い電流を流す事ができるよう、極細多芯線を寄せ集めてケーブル化する。ケーブル化の利点としては、大電流通電だけでなく、超伝導コイルの巻線数を減らす事によるコイルの低インダクタンス化が挙げられる。AC 的な利用 (代表的にはシンクロトロン加速器用磁石) においては、低インダクタンス化によって磁石の Inductive な電圧を抑える事ができる。加速器用超伝導電磁石に主に用いられる大電流ケーブルは英国の Rutherford-Appleton 研究所が開発した Rutherford cable である。このケーブルの構造を Figure 18 に示す。0.5-1.5 mm の素線を 20-40 本撚り合わせて 2 層のフラットな形状をしている。また、素線は撚り線ピッチ (transposition pitch) の長さで場所が全て入れ替わる fully transposed な配置となっている。ケーブル断面は Figure 18 に示すようにキーストーン角度をつける。この外周には厚さ $25 \mu\text{m} - 50 \mu\text{m}$ で幅 10 mm -

20 mm のポリイミドテープを 50%重ね合わせて螺旋状に巻いたものに、接着剤を塗布したガラステープあるいはポリイミドテープを数 mm の隙間を設けながら巻き付けていく (Figure 19)。こうする事で超伝導ケーブルへの冷却経路を完全に塞がないようにしている。

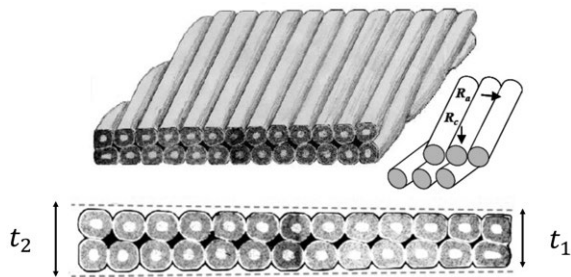


Figure 18: Rutherford cable の構造(左上)。隣り合う素線間の接触抵抗 (R_a) とクロスしている素線間の交差抵抗 (R_c)。Rutherford cable の断面はキーストン (赤破線) の形をしている (下)。

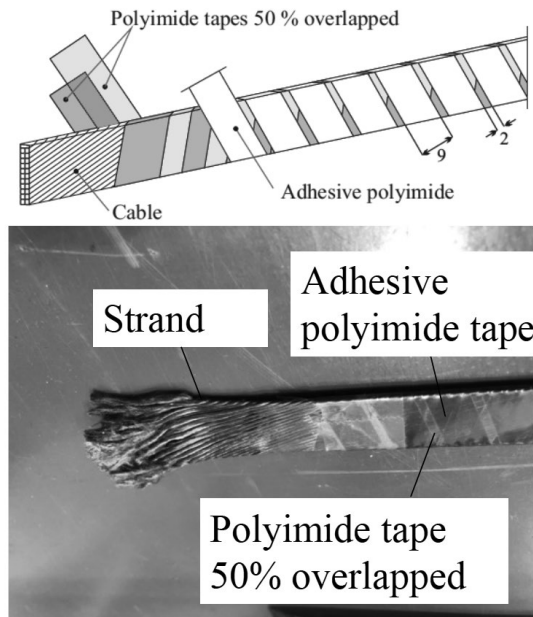


Figure 19: Rutherford cable の外観 ([36]より一部引用)。

ケーブルにはキーストン角を設けているため、両端では厚みが異なる($t_1 < t_2$, Figure 18 参照)。キーストン角 α_t はケーブル幅 w とすると $\alpha_t = \tan^{-1}(\frac{1}{2}(t_2 - t_1)/w)$ であり、この角度をつけるため t_1 は素線径を d_s とすると、Compaction

factor: $\eta = t_1/2d_s$ だけ圧縮させている。このキーストン角度を設ける事によって超伝導電磁石コイルに流れる電流分布は理想的な $\cos \theta$ 分布に近づく (Figure 20)。コイル内径が小さくなるほど、 η を小さくする必要があるが、NbTi ケーブルの場合下限値は 0.75 とされている。

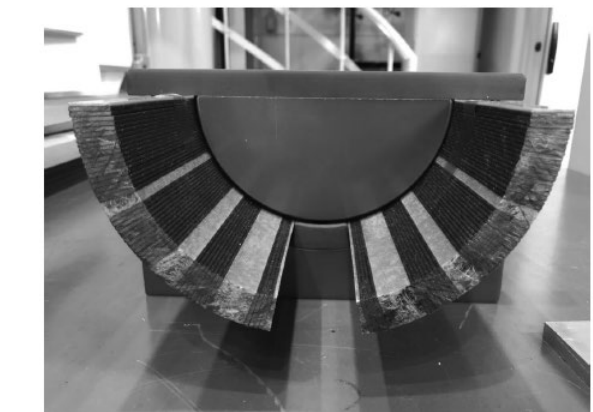
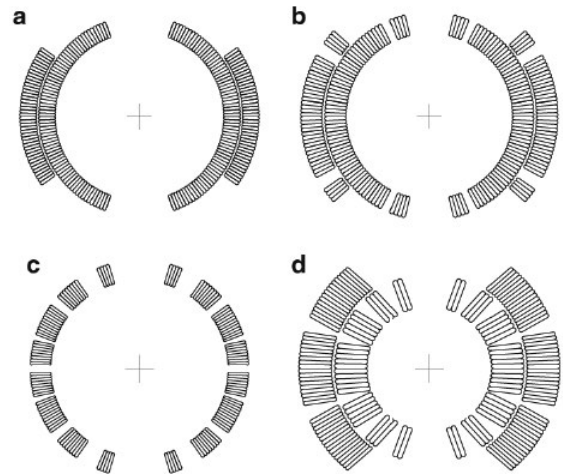


Figure 20: 超伝導電磁石コイルの断面。(上)各加速器で使用されてきた $\cos \theta$ 磁石で(a) Tevatron (b) HERA (c) RHIC (d) LHC。(下) HL-LHC D1 磁石 ($\cos \theta$ 磁石)の下側コイル切断面。

素線を束ねたケーブル内では、変動磁場に対して素線同士の間で結合する inter-strand coupling current (ISCC) が発生する。Rutherford cable の場合、ISCC は交差抵抗 R_c (Figure 18 参照) を介して形成されるケース (Figure 21)、あるいは隣り合う素線間の接触抵抗 R_a (Figure 18 参照) を介して電流ループが形成されるケースがある。この電流解析は Rutherford cable を張り巡らせて

いる素線のネットワークモデル化をする事で可能となる[20][21]。Figure 22 にネットワークモデルの一例を示す。詳細は文献を参考にさせていただきたいので、ここではエッセンスだけ述べる。このモデルでは素線は無限に細い線電流と近似しており、Figure 22 に示すように各ノードに出入りする電流値はキルヒホッフの法則に従うとし、また、ノードによって閉じられる各ループにおいて変動磁場 $\vec{B} = (\dot{B}_x, \dot{B}_y, \dot{B}_z)$ が働いた際のファラデー法則を解く事。つまり各ノード・閉回路においては以下が成立する：

$$\sum I_{str} + \sum I_a + \sum I_{crs} = 0 \quad (3-4)$$

$$\sum R_a I_a + \sum R_c I_{crs} + \sum U_s = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (3-5)$$

ここで、 U_s は素線にかかる電圧であり、素線臨界電流 $I_{c, str}$ を超えた場合 ($I_{str} > I_{c, str}$) のみ発生する ohmic な電圧成分と、周りの閉回路からの相互インダクタンスの inductive な電圧成分から成る。その他パラメータの意味は Figure 22 を参照されたい。また \vec{A} は注目するネットワーク回路の閉曲面の面積を表す。素線に流れる電流についてはケーブルに流す輸送電流 I_t と以下の関係式が成り立つ：

$$\sum I_a + \sum I_{str} = \sum I_a + \sum I_{is} + \sum I_{t, str} = I_t \quad (3-6)$$

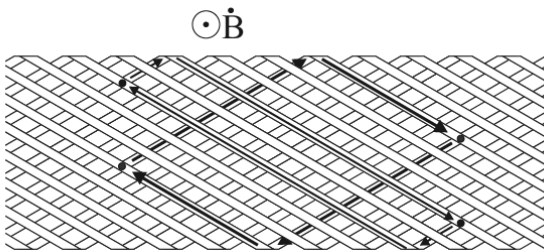


Figure 21: Rutherford cable 内の inter-strand coupling current (ISCC) が作るループパターン例 [36]。上図の場合 ISCC は交差抵抗を介してループを形成している。

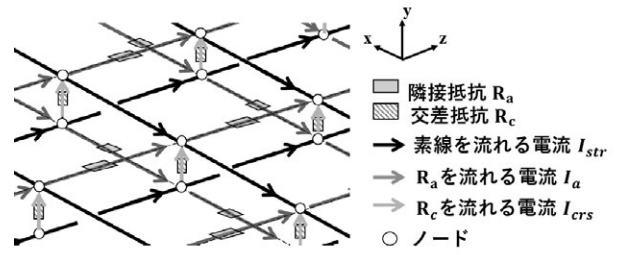


Figure 22: Rutherford cable のネットワークモデル (立体的にイメージしないと分かりにくい)

ここで、 I_{is} は ISCC、 $I_{t, s}$ は輸送電流の各素線に流れる分である。各ノード・閉回路に対して式(3-4)、(3-5)、(3-6)を用いて有限差分法(Finite Difference Method: FDM)を用いて解く事で、各素線を通る ISCC の時間発展分布が求められる(Figure 23)。このように、Rutherford cable の中心付近で時定数は長くなり、またそのオーダーは 0.1~1 s である事がわかる。

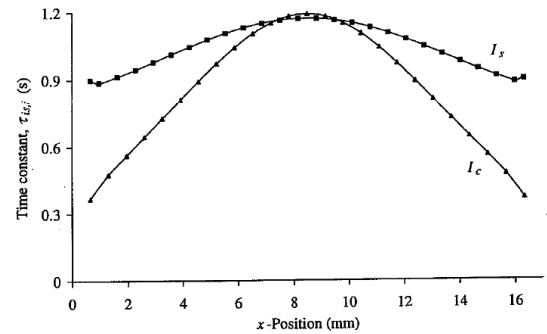


Figure 23: ISCC (図中 I_s) と I_{crs} (図中 I_c) の時定数分布 [20]。ストランド数 26、撚り線ピッチ長 0.1 m、 $R_a = R_c = 1 \mu\Omega$ 、 $w=17$ mm、 $t_1 = t_2 = 2.6$ mm としている。

ISCC は IFCC と同様に変動磁場が発生する事で生じる結合電流であり、磁場精度に対しても影響を与える。IFCC の場合、前節で議論したように、シンクロトロン加速器に要求される一般的な磁場掃引速度 0.01 T/s の変化率であればほとんど影響がない。ISCC の磁化については先のネットワークモデルでも計算できるが、Wilson によると [22]：

$$M_n^c = -\frac{1}{120R_c} \frac{dB_n}{dt} L_{pc} N_s (N_s - 1) \frac{w}{t} \quad (3-7)$$

$$M_n^a = -\frac{1}{3R_a} \frac{dB_n}{dt} L_{pc} \frac{w}{t} \quad (3-8)$$

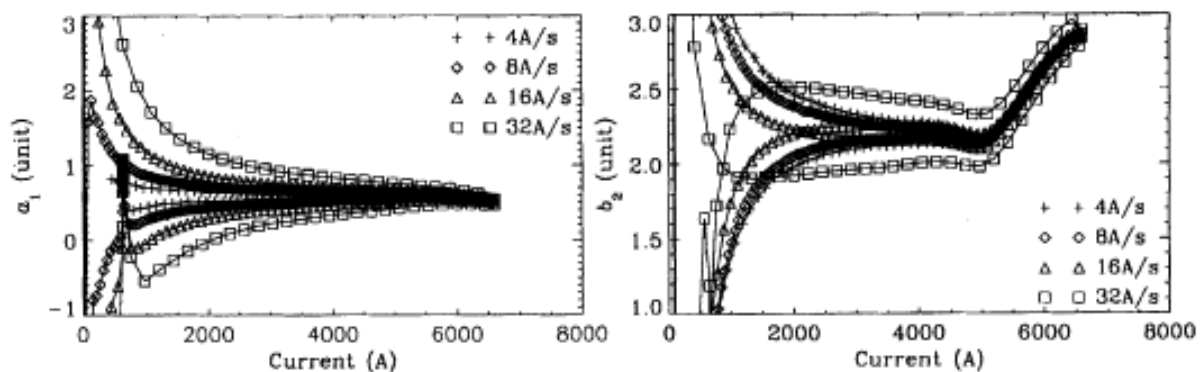


Figure 24: SSC dipole magnet 「DCA312」の多極成分の磁場掃引速度依存性[23]。Unallowed な成分(b_2)が生じているが、交差抵抗 R_c のばらつきに起因している事がわかっている

ここでは、磁場は Rutherford cable のブロードな面に垂直にかかっているとしている。 L_{pc} はケーブルの撚りピッチ長、 N_s はケーブル内の素線数、 t は平均的なケーブル厚み $((t_1 + t_2)/2)$ である。上付き添字 c, a はそれぞれ交差抵抗を介した結合、隣接抵抗を介した結合を表す。Figure 23 と同じケーブル条件で計算すると $M_n^c \sim 4.5\dot{B}$ (単位: T)、 $M_n^a \sim 0.3\dot{B}$ (単位: T) と IFCC の時と比べて磁化のサイズが1-2桁大きい事がわかる。さらに ISCC は磁石に沿って流れる電流方向が存在するため、これにより Figure 24 に示すように多極成分の磁場掃引速度の依存性が見えてくる。さらに交差抵抗 R_c がケーブル内でばらつきがあると、磁石の対称性が崩れて Unallowed な多極成分が生じる事がわかっている[23]。

3.3. Decay and snapback

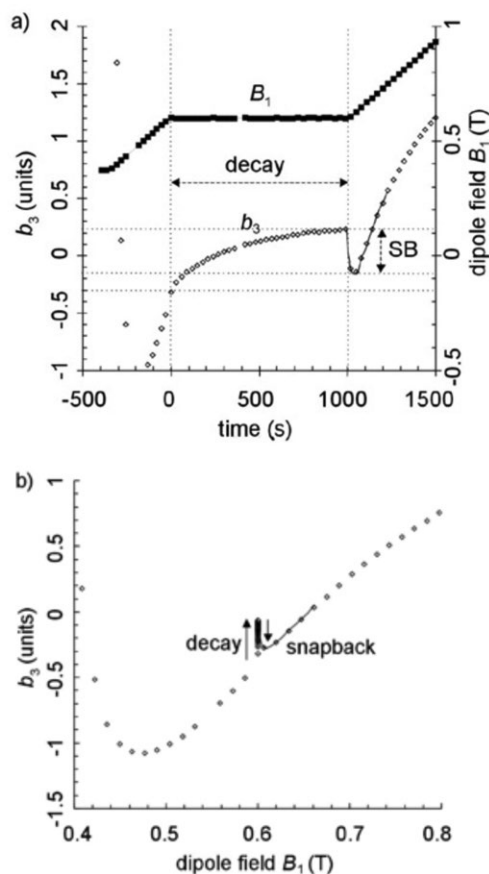


Figure 25: decay and snapback の例[24]

これまでの節では素線内部で生じる結合電流 (IFCC) とケーブル内部で生じる結合電流 (ISCC) のダイナミクスについて触れてきた。実際に磁石を運用してみるとこれらの結合電流だけでは説明できない現象が起きる事がわかった。

それが「decay」と「snapback」と呼ばれる現象である。加速器運転では入射器からのビームを何度も入れるため長い時間入射電流で保持する必要があるが、この時ノーマル6極磁場が長時間にわたって変動（decay）し、電流値を上昇すると snapback が起こる現象が観測された（Figure 25）。当初は超伝導線材の flux creep が原因と疑われてきたが、磁場変動率や過去の励磁履歴に依存して変動率が変化する事実を説明できない事がわかった[25]。

このメカニズムについてはさまざまな調査が行われ、徐々に現象が明らかとなり[26][20]、実験的にも確認された[24]。これまでの磁化の議論ではケーブルにかかる変動磁場の空間分布は一様だと考えた。しかし、実際の磁石ではコイルエンドの領域では磁場や交差抵抗の大きさに勾配が生まれる事¹、またコイルケーブル同士や電流リードを繋ぐスプライス部のジョイント抵抗がある影響によって、変動磁場が生じるとコイル全体に偏流が生じる。この時の時定数は偏流が流れる回路のインダクタンスと抵抗で決まるが、これが10 s から 10^5 s といった非常に幅広いスケールとなる。この偏流は Boundary-Induced Coupling Current (BICC)や Super-Currents と呼ばれている²。BICC が発生すると長い時間スケールで、偏流の分布が変化し、撚り線ピッチ単位で局所的な磁場変化を発生させていく。この磁場変化が外部磁場と反平行に起こるとこれは線材磁化と同じ方向のため、部分的に full penetration が起こり、これによってケーブル長に沿った線材磁化の平均が下がる（Figure 26）。これが「decay」の原因となる。

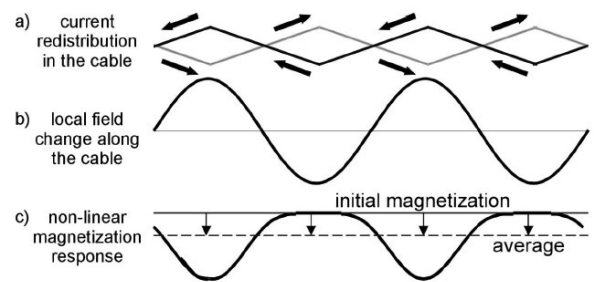


Figure 26: Decay が発生するメカニズム[24]。偏流が変化し撚り線ピッチ単位で局所的な磁場変化を生み出す事で線材磁化が変化する。

一方再び電流を上昇させる（つまり、外部磁場を変化させる）事によって線材磁化が decay から「回復」する。これが「snapback」の原因となる。Decay and snapback は Nb_3Sn 線材を用いた HL-LHC 11T dipole でも観測されているが、「decay」が $NbTi$ 超伝導電磁石の時とは異なった振る舞いを示す事が報告されている[27]。

¹ エンド付近に生じる交差抵抗の勾配は contact pressure の勾配や磁気抵抗の違いに起因する。

² ISCC との違いがなかなか分かりにくいですが、BICC はネットワークモデルにおいて周期的な境界条件を設けない場合にも発生するようだ [12]。

4. クエンチ保護

超伝導電磁石運転において非常に重要な技術要素がクエンチ保護である。特に大型な加速器用磁石となると内部に蓄積されるエネルギー ($LI^2/2$) が数 MJ にも達する。一旦クエンチが発生するとどうなるだろう？クエンチは不可逆な過程であり、そのまま電流を流し続けると超伝導電磁石コイルは焼損してしまう。そのため、電流遮断をする必要があるが、コイルが常伝導化した状態で長々と遮断させていると、クエンチ発生箇所の温度 (ホットスポット温度) がジュール熱によってどんどん上昇して結局コイルが焼損する。こういった熱プロセスを調べていくため、以下のエネルギーバランスの式を用意しよう：

$$C \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \rho J^2 + g - g_q \quad (4-1)$$

ここで、 C は単位体積あたりの超伝導ケーブルの熱容量 ($J/m^3/K$)、 k は熱伝導率 ($W/m^2/K$)、 ρJ^2 はジュール熱 (W/m^3)、 g_q は冷媒による除熱 (W/m^3) である。 g はジュール熱以外の発生熱 (W/m^3) であり、その分類と発生時のタイムスケールおよび発生熱量を Figure 27 に示した。

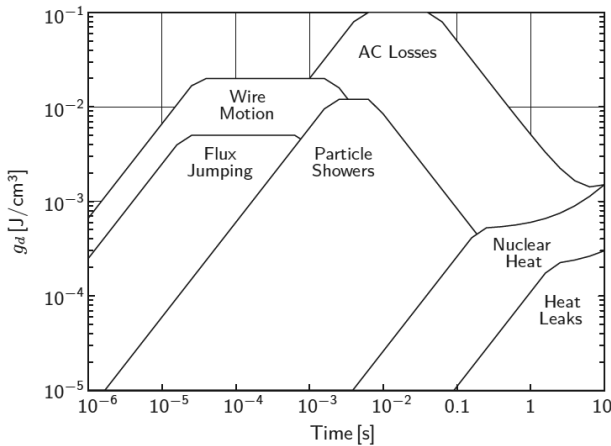


Figure 27: 超伝導電磁石に発生するジュール熱以外の発生熱分類[11]

本章では、式(4-1)を基本として、超伝導電磁石を保護するための基礎的な考え方について説明していく。なお本章で登場する超伝導電磁石は NbTi Rutherford cable によって巻線された超伝導電磁石コイルと仮定する。

4.1. MPZ と MQE

式(4-1)に示すように、超伝導コイルは熱 (ρJ^2 あるいは g) が発生した際、周りからの熱伝導や冷媒による冷却とのバランスによって温度が決定される。この時クエンチが起こる条件を考えてみる。簡単のため、超伝導ワイヤー単体のモデルとし、ジュール熱以外の熱は考慮しないとする。初期状態でワイヤ温度は T_{He} だったとして、長さ l_{nz} にわたって転移温度 T_c を超えた場合を考える (Figure 28)。この状態で温度のバランスがとれているとした場合に式(4-1)は：

$$\rho J^2 A l_{nz} = 2kA \frac{T_c - T_{He}}{l_{nz}} + hpl_{nz}(T_c - T_{He}) \quad (4-2)$$

と表される。ここで、 A はワイヤーの断面積、 h は冷媒の熱伝達率 ($W/m^2/K$)、 P は perimeter である。式(4-2)のバランスが崩れた時の常伝導部の拡がり超伝導ワイヤをクエンチに導くと考える事ができる。この時の長さ l_{mpz} とすると、

$$l_{mpz} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2k(T_c - T_{He})}{\rho J^2} + \frac{hp}{A}(T_c - T_{He})} \\ \sqrt{\frac{2k(T_c - T_{He})}{\rho J^2}} \quad (\text{断熱条件時}) \end{cases} \quad (4-3)$$

となる。

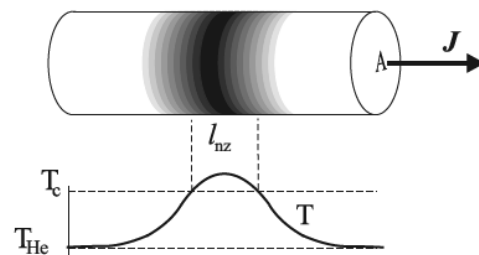


Figure 28: 超伝導ワイヤの温度分布[36]。長さ l_{nz} にわたって転移温度 T_c を超えた場合。

LHC main dipole の outer layer に用いられている Rutherford cable (Table 3) の MPZ (断熱条件下) について様々な copper matrix の

RRR¹(Residual resistivity ratio)に対して計算した結果を Figure 29 に示す。電流密度は J_c と一致させている。また、初期温度は超流動ヘリウム温度 1.9 K としていて、式(4-3)の物性値 k, ρ は Cu の値を用いている。磁場による依存性は主にジュール熱 (つまり臨界電流密度) の磁場依存性が効いている²。MPZ の大きさは数 mm-数十 mm のオーダーであるが、copper matrix の RRR にも依存し、より高 RRR の線材ほど熱擾乱に対して安定である事がわかる³。

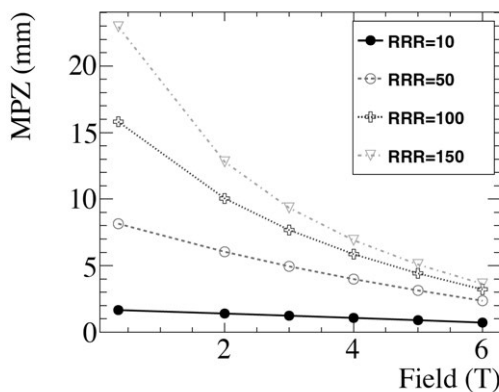


Figure 29: NbTi Rutherford cable (Table 3) の断熱条件下において計算した MPZ。運転温度は 1.9 K を仮定している。

MPZ を形成するのに必要な最小エネルギーは Minimum quench energy (MQE)等と呼ばれるが、長手方向の MPZ 拡がりのみを考慮すれば：

$$MQE = A \int_{L_{MPZ}} \int_{T_{He}}^{T_c} C dT dz \quad (4-4)$$

と求まる。Figure 29 の MPZ (RRR=150) をもとに、式(4-4)から求めた MQE の磁場依存性を Figure 30 に示す。尚、ここで求めている MPZ および MQE は臨界電流 J_c に匹敵する電流値における計算で、かつ断熱条件下の議論である事に注意されたい。Figure 31 には LHC main dipole の inner cable をサンプルとして測定した MQE を

示す。ケーブルやその他条件が異なるものの、オーダーについては断熱条件下における計算値結果とおおよそ一致している事がわかる。

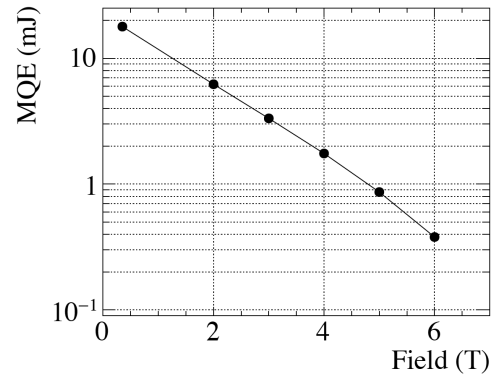


Figure 30: NbTi Rutherford cable (Table 3)の断熱条件下において計算した MQE(RRR=150)。運転温度は 1.9 K を仮定している。

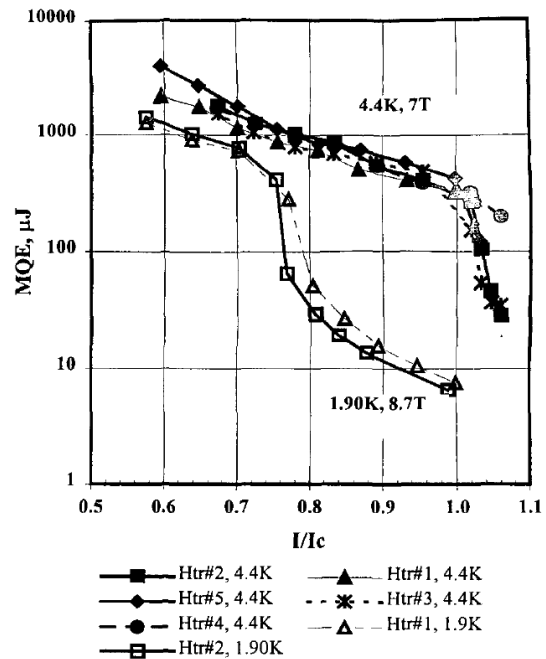


Figure 31: LHC main dipole の inner cable の MQE (測定値) [28]

¹ RRR は NbTi Rutherford cable の 293 K の抵抗率と 10 K の抵抗率との比 ($\rho(293K)/\rho(10K)$) である。

² NbTi Rutherford cable の臨界電流密度の磁場依存性については付録 6.2 を参照のこと。

³ (再掲) IFCC による磁化を抑えたいのであれば逆に Transverse な抵抗率を上げる必要がある。よって理想としては抵抗率に異方性を持たせるのがよい。

ところで、MQE と Figure 27 の関係からクエンチに至る主要な発生要因が見えてくる。この中でも「AC loss」、「Flux jump」、「Wire motion」については、超伝導電磁石コイル（ワイヤ）において発生する「Intrinsic」な熱要因であり、その値は $10 \mu\text{J}/\text{cm}^3 - 0.1 \text{J}/\text{cm}^3$ と幅広い。AC loss は交流損失とも呼ばれるが、IFCC や ISCC 等による Eddy current による結合損失の事である。パルス磁石など早い励磁 ($\sim 1 \text{T/s}$) を要求する磁石等で問題となるが、今回の議論からは外す。Flux jump についてはフィラメント径を数 μm まで細くする事で、磁気不安定性による熱損失は $0.1 \text{mJ}/\text{cm}^3$ のオーダーまで落とし込む事ができる[29]。そうすると、3つの「Intrinsic」な発生要因として残るのは「Wire motion」であり、後述するようにこれは超伝導電磁石のクエンチトレーニングにおける主な発生要因でもある。文献[29]によれば、超伝導素線 1mm^2 の長さ 1mm に渡ってローレンツ力 4kN/m が働いた場のエネルギーは $40 \mu\text{J}$ ($=40 \text{mJ}/\text{cm}^3$) at $B=10 \text{T}$ であり、Figure 31 と比べてわかるように、比較的高い磁場下における MQE に匹敵する事がわかる。

後述するように、磁石の性能を高めるためにクエンチトレーニングを行うが、この時の主なクエンチ発生要因はこの wire motion¹（機械的擾乱）であり、これを繰り返してトレーニング性能を徐々に上げていく。

4.2. Quench propagation velocity

式(4-1)を一次元に帰着した以下の式（断熱条件下）に書き換える：

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{vC}{k} \frac{dT}{dx} + \frac{\rho J^2}{k} = 0 \quad (4-5)$$

ここで、 $\partial T/\partial t = -v dT/dx$ (v は定数) とした。この式を温度について解き ($\propto \exp(ax)$)、境界条件や初期条件を与える事で v について求める事ができる：

¹ Nb_3Sn のような含浸コイルの場合は樹脂のクラックが主な要因とされている。

$$v = \frac{l}{c} \sqrt{\frac{\rho K}{T_c - T_{He}}} \quad (4-6)$$

この v は常伝導部 ($T > T_c$) が発展し伝播していく速さと考え事ができ、クエンチ伝播速度 (Quench propagation velocity) と呼ぶ。Figure 29 と同じケーブル変数・運転条件で計算した伝播速度を Figure 32 に示す。磁場依存性がみられ、高磁場になるほど速くなるが、オーダーは数十 m/s である事がわかる。

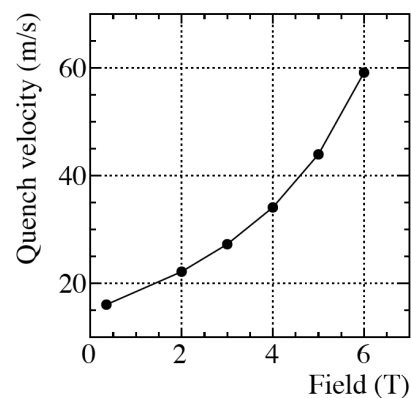


Figure 32: NbTi Rutherford cable (Table 3)の断熱条件下で求めたクエンチ伝播速度

4.3. クエンチ検出

従来より用いられてきたクエンチ検出方法として、クエンチ時に発生する電圧（クエンチ電圧）を検出する方法がある。同じコイル2つで構成される磁石（2極磁石）の場合、コイル両端と中点に電圧タップを配置し、2つのコイル両端電圧の差分（バランス電圧）をとる。こうする事で Inductive な電圧を相殺する事ができ、Ohmic な抵抗成分による電圧上昇のみを測定する事ができる。クエンチ検出器は主には Figure 33 に示すようなブリッジ回路構成となっている。片方のコイルにクエンチ電圧が発生するとバランス ($V_{balance}$) が崩れる。検出器にはクエンチ検出閾値 ($V_{threshold}$) および判定時間 (t_{valid}) を設定す

る。判定時間や閾値を大きくとればその分確度が高くなるが、次節に示すようにホットスポット温度はどんどん上昇してしまう。通常の超伝導磁石の運用だと、判定時間を 10 ms、閾値を 0.1 V と設定する場合が多い。尚、このためにクエンチ発生から検出までの時間遅れ ($t_{\text{detection}}$) が生じるが、クエンチ保護を検討する場合、この時間差も考慮して保護設計を進めていく必要がある。

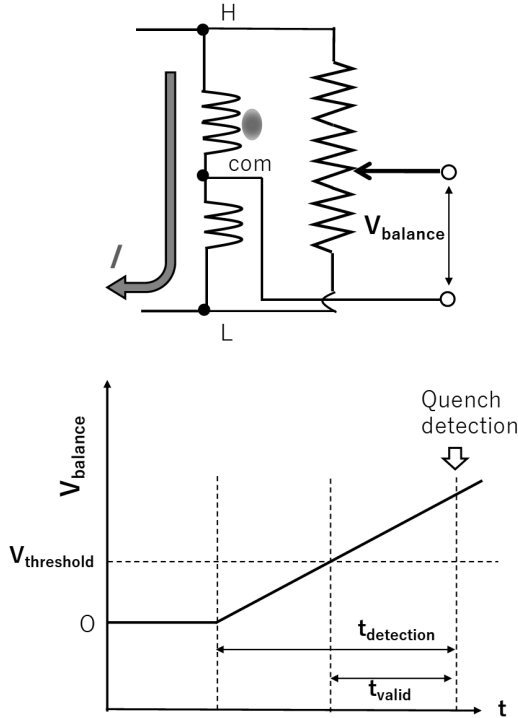


Figure 33: (上) バランス方式を用いたクエンチ検出方法 (下) クエンチ発生時のバランス電圧の変動と検出までの流れ。

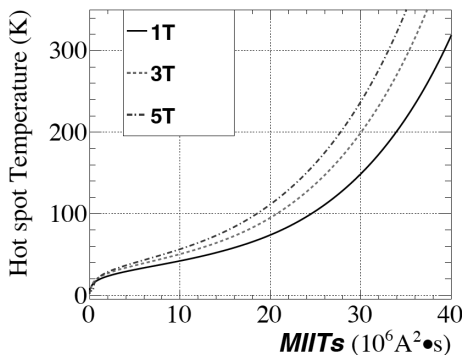


Figure 34: Table 3 に示す Rutherford cable の MIITs 曲線

4.4. MIITs

クエンチが発生する条件や発生後の伝播について説明してきたが、発生後どれくらいの時間で超伝導磁石を保護 (= 電流遮断) する必要があるだろうか? MQE 以上の熱が入り超伝導コイルを構成するケーブルにクエンチが生じた場合、その箇所 (ホットスポット) ではジュール発熱によってどんどん温度が上昇し不可逆の過程を進む。周りからの伝導冷却や冷媒冷却の効果を無視した断熱条件下で式(4-1)を表すと、このケーブルの温度上昇過程は:

$$J^2 dt = \frac{c}{\rho} dT \leftrightarrow I^2 dt = \frac{cA^2}{\rho} dT \quad (4-7)$$

と表せる。ここでケーブルの断面積をAとした。両辺を積分する事で:

$$MIITs = \int_0^{te} I^2(t) dt = A^2 \int_{T_{He}}^{T_{max}} \frac{c(T)}{\rho(T)} dT \quad (4-8)$$

と、MIITs (単位:MAAs あるいは kA²s) と呼ばれる量を導出する。この式から、クエンチが生じた時点 ($t = 0$) から電流値の二乗を時間積分する事で、 $t = t_e$ の時の超伝導ケーブルのホットスポット温度 (T_{max}) を推定する事が可能となる。ここで、Table 3 に示す Rutherford cable (LHC main dipole outer layer)の MIITs 曲線を Figure 34 に示す。磁場の影響で変化が生じているが、これは主に Cu の磁気抵抗の影響である。通常ホットスポット温度は 300 K が Practical limit とされるが、この温度に至るまでの MIITs は外部磁場によって変化するが 30-40 の範囲と見積もる事ができる。

4.5. クエンチ保護技術

では、実際にクエンチ発生後はどれくらいの速さで電流遮断をする必要があるだろうか? HL-LHC D1 磁石を例に考えてみる。超伝導磁石コイルに発生する抵抗は無視して遮断にかかる時定数 τ とすると、減衰関数は $I_{op} e^{-\frac{t}{\tau}}$ となる (I_{op} :運転電流) で、電流値が下がり切るところまで時間積分すると、 $MIITs = I_{op}^2 \tau / 2$ となる。例えば運転電

流として I_{op} と13 kAに設定しよう。D1磁石のおよそ最大運転電流値に相当する。この時、 $MIITs = 30$ で遮断するために許される時定数は約350 msと見積もる事ができる。

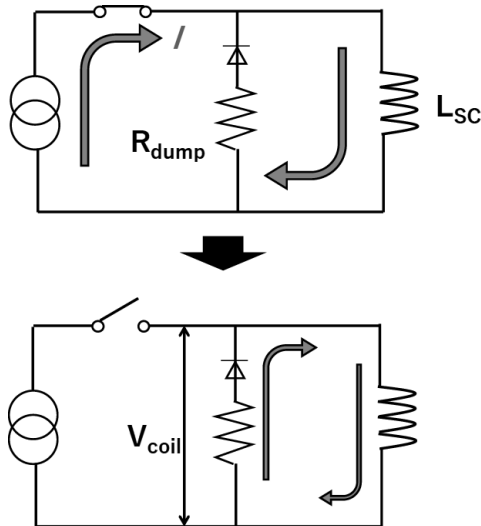


Figure 35: 外部抵抗を用いた超伝導コイル保護。(上) 通常運転時。(下) クエンチ時。

4.5.1. 外部抵抗を用いた保護

蓄積エネルギーを外部抵抗(R_{dump})によって消失させる方法がある (Figure 35)。超伝導電磁石のインダクタンス L_{sc} とし、超伝導コイル内部で進展する抵抗は無視すると、時定数 $\tau = \frac{L_{sc}}{R_{dump}}$ となる。 $L_{sc} = 25$ mHとし (HL-LHC D1磁石と同じインダクタンス)、先ほどの計算から $MIITs < 30$ に抑えるには $R_{dump} > 72$ m Ω とすれば良い事がわかる。それでは $R_{dump} = 72$ m Ω として、遮断させてみよう。電流は R_{dump} (と保護ダイオード) を通るため、超伝導電磁石コイルの両端には抵抗両端で生じる電圧と同じ分の電圧(V_{coil})がかかる (保護ダイオードの電圧効降分は無視している)。遮断した瞬間は超伝導電磁石には $V_{coil} = I_{op}R_{dump} \sim 930$ Vと1 kV近くの電圧がかかる事がわかる。これは一つの例ではあるものの、高インダクタンス・高電流化によって、超伝導電磁石の蓄積エネルギーは増加してくるため、外部抵抗の

みで保護しようとする、コイル両端電圧の問題が生じてくる¹。

4.5.2. クエンチ保護ヒーターを用いた保護

速やかな遮断を実現する方法としてクエンチ保護ヒーター(QPH)がある。これは単体で使う場合や、外部抵抗と組み合わせて用いる場合がある。コンセプトを Figure 36 に示す。磁石の励磁回路とは別に保護ヒーター回路を用意して、保護ヒーター回路はエネルギーを蓄えるキャパシタバンクで構成されており、クエンチ検出時にはトリガ信号に応じてスイッチが閉じ (サイリスタスイッチを使用)、直列に繋がっているヒーターには時定数 $\tau = R_{QPH}C$ で立ち下がるパルス的な電流が流れる。ここで R_{QPH} はQPHの抵抗、 C はキャパシタバンクの電気容量である。すると、磁石はヒーター温めた箇所からクエンチ伝播によってコイル全体が常伝導転移していく。自身の発熱によって蓄積エネルギーを消失させる、というものである。

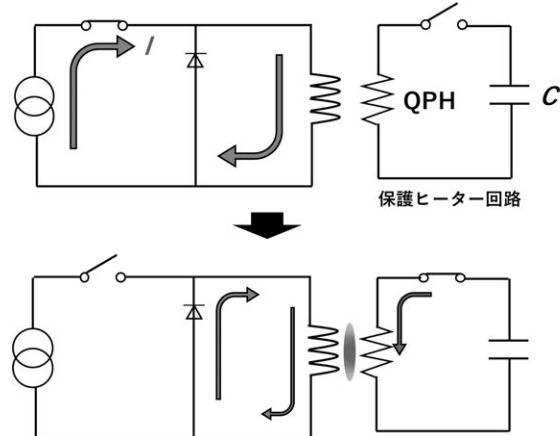


Figure 36: クエンチ保護ヒーターを用いた超伝導コイル保護。磁石回路とは別の保護ヒーター回路を用意し、クエンチ検出と共にコンデンサに貯めたエネルギーをヒーターの熱エネルギーに変えて磁石を昇温させる。(上) 通常運転時。(下) クエンチ発生時。

¹ 一般化はできないが、設備の制限であったり、使用する絶縁材や冷媒のブレイクダウン電圧 (を安全計数で割った値) 等が目安になるかと思う。

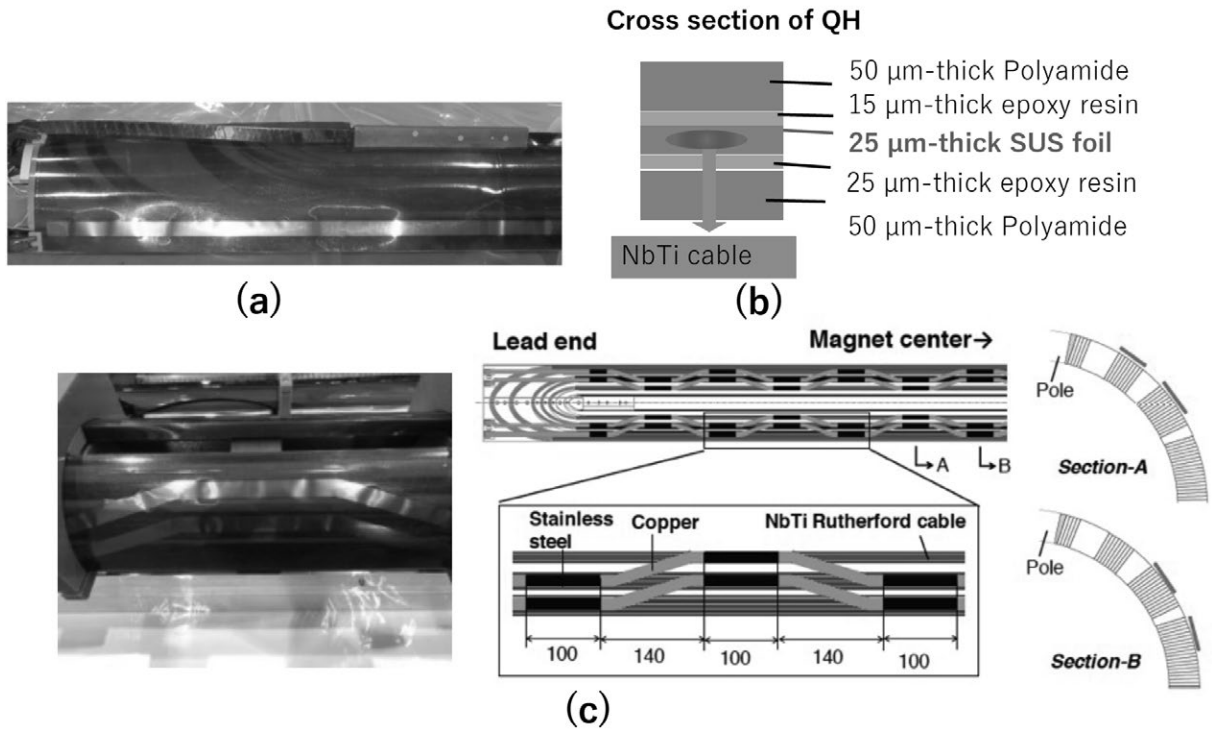


Figure 37: (a) HL-LHC D1 磁石モデル 1 号機に採用していた 1 本ストリップヒーター。(b)ヒーターの断面。(c)モデル磁石 2 号機以降に採用した zigzag 型ヒーター。

QPH はコイル外周に巻きながら組み付ける。HL-LHC D1 磁石では、当初は Figure 37(a)に示す幅 15 mm、厚み 25 μm の SUS フォイルでできた 1 本のヒーターストリップであった。その断面構成を Figure 37 (b)に示している。しかし、これのヒーター形状では効果的に磁石全体を昇温できず、定格電流においては *MIITs* 計算からホットスポット温度が 300 K を超えてしまう事が判明した[30]。そこで、シミュレーションを用いながら設計を行い、最終的には Figure 37 (c)に示すような 2 本ストリップの zigzag 型を採用することになった[31]。

ヒーターステーション（発熱が生じる部分）は主に SUS である。Figure 37 (c)の設計では SUS 長は MPZ よりも大きい 100 mm ととっているが、これは Rutherford cable の撚り線ピッチに合わせているためであり、また途中で Cu を介しているのは、QPH 全体の抵抗値を調整するためである。QPH の発熱密度(J/cm^2)は SUS 部分の全面

積 A_{SUS} と放電時に QPH にかかる QPH 電圧を V_{QPH} ($\sim 800 \text{ V}$)として次のように書ける：

$$Q = \frac{V_{\text{QPH}}^2}{R_{\text{QPH}}A_{\text{SUS}}} \cdot R_{\text{QPH}}C = \frac{V_{\text{QPH}}^2}{A_{\text{SUS}}} C \quad (4-9)$$

Figure 38 に、HL-LHC D1 磁石（モデル磁石 3 号機）試験時に測定した発熱密度 Q とクエンチ検出時間も考慮した *MIITs* 合計値の関係について示した。ここではキャパシタ充電電圧を変化させながら試験を行なっているが、低い充電電圧（つまり低い発熱密度）においても *MIITs* は上限値以下である。また、シミュレーションを用いた計算結果では、前節に述べた磁石の条件（ $L_{\text{SC}} = 25 \text{ mH}$ 、 $I_{\text{op}} = 13 \text{ kA}$ ）においても十分保護できる事がわかっている[31]。

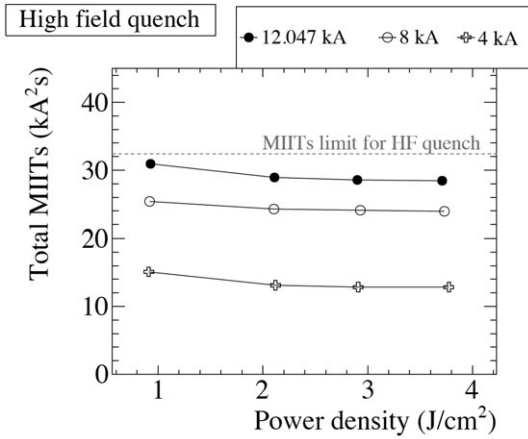


Figure 38: 各通電流における QPH の発熱密度と MITs の関係。HF は High field の略で 5 T に相当する。

外部抵抗なしで QPH を用いた場合、コイルのインダクタンスと内部に発展する抵抗の LR 直列回路とみなす事ができる。この時の内部の各コイルターン電圧の発展の様子を Figure 39 に示した。ここでは部分的にヒーターが動作しなかった場合の様々な failure case の計算結果を載せている。コイル両端では外部に電圧降下の要因がないため常に 0 となる。HL-LHC D1 磁石の場合、接地電圧に対して高々 400 V at 13 kA とわかる。

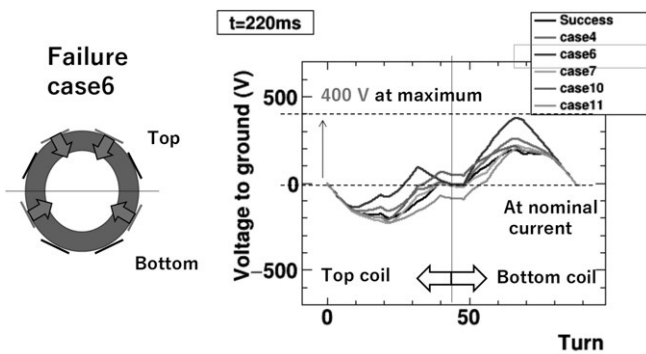


Figure 39: クエンチ保護ヒーター使用時のコイル内部のコイルターン毎の電圧 (計算値)。t=0 において電流遮断と共にヒーターを発動させている。各曲線は部分的にヒーターが動作しなかった場合の様々な Failure case について解析した結果を表している。

4.5.3. CLIQ を用いた保護

Nb₃Sn 線材を用いた高電流による高磁場磁石の場合、許される遮断時定数が数+ms オーダーと迫り、QPH では遮断が間に合わない。そのため、「CLIQ (Coupling-loss Induced Quench system)」と呼ばれる新たなシステムが開発され [32]、HL-LHC の low-β 4 極磁石 (MQXF) に採用されている [33]。CLIQ の回路図を Figure 40 に示す。28.2 mF、500V のキャパシタバンクをサイリスタとダイオードを介して超伝導コイルの中心と接続している。クエンチを検出すると、このサイリスタスイッチが叩かれ、I_c がリードを介して超伝導コイルに流れる。この時、RLC 回路となるため、コイル側には輸送電流に加えてある周波数 (~数十 Hz) を持った電流値が重畳し、これがコイルの中で局所的な磁場変化を生む。磁場変化によって Eddy current (IFCC と ISCC 等) が誘起され、これによる結合損失 (Coupling loss) によって、超伝導コイルが温まるという仕組みである。QPH の場合、熱の拡がりにはクエンチ伝播速度 (数十 m/s) に委ねられるが、CLIQ を使用すると僅か 10 ms 以下で全体が常伝導転移する [34]。MQXF の場合、遮断時定数をさらに短くする目的で CLIQ に加えて QPH も同時使用した保護設計となっている。

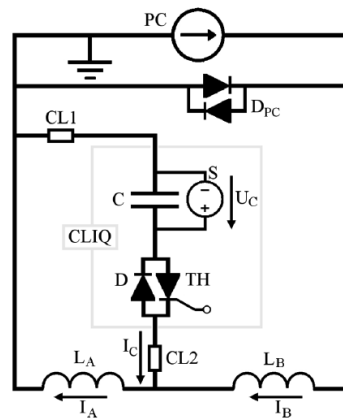


Figure 40: CLIQ を用いた保護回路 [32]

4.6. Quench training

製造直後の超伝導磁石を冷却中で励磁すると、SSL あるいは定格電流値よりも低い電流値で

クエンチが起きる。すでに議論したようにクエンチを引き起こす原因については様々であるが、その一つにローレンツ力を起因とする「wire motion」がある。僅か $10\ \mu\text{m}$ 動いただけで MQE 以上の発熱が生じる可能性があることは既に述べたが、このような動きを与えないように十分な機械補強を与える事で、この超伝導ワイヤーの機械擾乱はいずれ収束していく。この超伝導コイルに対する機械的補強、つまりローレンツ力に打ち勝つための応力はコイル組み立ての段階で与える事で実現できるが、これは「予備応力」等と呼ばれる。そして、電流値を上げていきクエンチを繰り返しその性能をあげていく過程は「Quench training」と呼ばれる。一方、予備応力が十分でないと、定格電流に到達できず、常に低い電流値でクエンチが起きてしまう。トレーニング試験では、磁石の昇温を一旦挟む過程 (Thermal cycle) を入れ再び冷却し、トレーニングメモリが残っているかも確認する。もし、昇温前のトレーニングが十分でなければ、再び定格電流値よりも低い電流でクエンチが始まり、再度トレーニングが必要となる。トレーニング回数が少ない超伝導電磁石が「良い超伝導電磁石」という事だ。

5. まとめ

加速器用途に主眼を置き、超伝導電磁石に用いる硬い超伝導体の基本的な振る舞いから、実用的なケーブルへと応用する際に生じる様々な熱・電磁現象について述べてきた。このテキストでは全てを網羅できていないため、興味が湧いた方は是非自身で文献を調べていただきたい。基礎的な部分については M.N.Wilson 著の「Superconducting Magnets」(Oxford University Press) が挙げられる。ここでは、超伝導電磁石設計における基礎が詰まっていて、おそらく最もスタンダードな教科書と思う。より専門的な超伝導電磁石の教科書としては K.H.Mess ら著の「Superconducting Accelerator Magnets」(Wspc)、また、磁場やクエンチについて詳細な計算過程を教えてくれるのは S. Russenschuk 著の「Field Computation for Accelerator Magnets」(WILEY) が挙げられる。Y.Iwasa 著の「Case Studies in Superconducting Magnets」では教科書のタイトルにある通り、様々な例を交えて説明されているので、非常にわかりやすい。また、筆者もよく参考にするのが CERN Accelerator School (CAS) の教科書である。超伝導電磁石の部分については「Superconductivity in Particle Accelerator (1995)」が大変参考となると思う。

今回は NbTi を中心として話した。将来の高磁場加速器に向けては Nb₃Sn や高温超伝導体の導入が不可欠であるが、様々な技術課題を残している。一方、比較的最近見つかった超伝導 MgB₂ は、安価でかつ液体水素温度で超伝導化するため、社会実装に向けた研究開発が盛んになり始めている。超伝導電磁石開発というのは、高エネルギー物理実験等の基礎科学向け～社会応用という多岐にわたってニーズのある特異な研究分野だと思う。その動向は常に目まぐるしく変わっているので、今後 10 年でもしかするとパラダイムシフトが起るかもしれない。

6. 付録

6.1. 多極成分

Figure 41 に示す座標系において、磁石内部の位置 $z = re^{i\theta} = x + iy$ における磁場成分は以下のような式で記述できる：

$$\mathbf{B} = B_y + iB_x = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + iA_n) \left(\frac{x+iy}{r_0} \right)^{n-1} \quad (6-1)$$

ここで、 r_0 は参照半径、 n は多極磁場の n 次成分を示す（2 極磁石 $n=1$ 、4 極磁石 $n=2\dots$ ）。 B_n 、 A_n はそれぞれノーマル多極磁場、スキュー多極磁場である。磁場精度を言う時は、通常多極磁場を主成分 B_0 （2 極磁場の場合は B_1 ）で規格化した以下の値を指す場合が多い：

$$\begin{cases} b_n = \frac{B_n}{B_0} \times 10^4 \\ a_n = \frac{A_n}{B_0} \times 10^4 \end{cases} \quad (6-2)$$

単位は unit である。

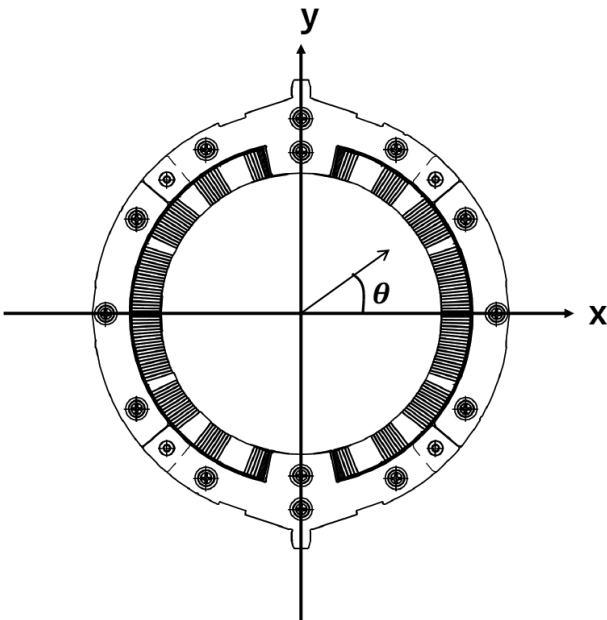


Figure 41: 磁石の2次元座標系定義

6.2. NbTi 臨界電流密度

NbTi 電流密度の磁場・温度依存性は以下のように実験的に求められている[35]：

$$J_c(B, T) = \frac{J_c^{ref} c_0 B^{\alpha-1}}{B_c(T)} \left(1 - \frac{B}{B_c(T)} \right)^{\beta} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{1.7} \right)^{\gamma} \quad (6-3)$$

ここで、 J_c^{ref} は 4.2 K、5 T における臨界電流密度で、 c_0 、 α 、 β 、 γ はフィット変数である。また、

$$B_c(T) = B_c(T=0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{1.7} \right) \quad (6-4)$$

である。

6.3. Load line

ある運転温度 T_{op} において、磁場に対する臨界電流（あるいは臨界電流密度）を Figure 42 のように書けたとする（例えば式(5-3)などから）。この時、予想される磁場から通電可能な最大の電流値 I_{max} が求まり、運転電流値 I_{op} との比 (I_{op}/I_{max}) が求まる。この比は Load line ratio あるいは負荷率と呼ばれる。

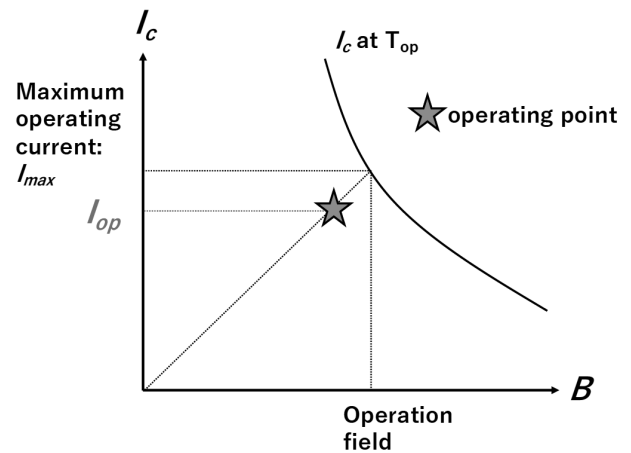


Figure 42: Load line

参考文献

- [1] A. Abada, et. al., “FCC-hh: The Hadron Collider,” *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **228**, 755–1107 (2019).
- [2] A.A. Abrikosov, “On the magnetic properties of superconductors of the second type (English translation),” *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (Soviet Union)* **5**, 1174 (1957).
- [3] R.G. Sharma, “Superconductivity”, Springer Cham (2015) <https://doi.org/10.1007/978-3-319-13713-1>
- [4] M.N. Wilson, “Superconducting Magnets”, Oxford University Press, Oxford, 1983
- [5] K.H. Mess, et. al., “Superconducting Accelerator Magnets”, World Scientific, 1996
- [6] C.P. Bean, “Magnetization of hard superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **8**, 250 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.8.250>
- [7] H.T. Coffey, “Distribution of magnetic fields and currents in Type II superconductors,” *Cryogenics* **7**, 73 (1967). [https://doi.org/10.1016/S0011-2275\(67\)80031-6](https://doi.org/10.1016/S0011-2275(67)80031-6)
- [8] Y.B. Kim, et. al., “Critical Persistent Currents in Hard Superconductors”, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 306 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.306>
- [9] P.W. Anderson, “Theory of Flux Creep in Hard Superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **9**, 309 (1962). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.309>
- [10] P.W. Anderson and Y.B. Kim, “Hard Superconductivity: Theory of the Motion of Abrikosov Flux Lines,” *Rev. Mod. Phys.* **36**, 39 (1964). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.36.39>
- [11] Y. Iwasa, “Case Studies in Superconducting Magnets,” Springer New York NY, 2009. <https://doi.org/10.1007/b112047>
- [12] S. Russenschuck, “Field computation for Accelerator Magnets,” WILY-VCH, 2010
- [13] L. Rossi and O. Bruning, “High luminosity large hadron collider”, CERN, Geneva, Switzerland, Rep. CERN-ATS-2012-236, 2012.
- [14] T. Nakamoto, et. al., “Model magnet development of D1 beam separation dipole for the HL-LHC upgrade”, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **25**, 4000505 (2015). <https://doi.org/10.1109/TASC.2014.2361404>
- [15] L. Rossi, “Superconducting Cable and Magnets for the Large Hadron Collider”, CERN-LHC-Project-Report-694.
- [16] A. V. Zlobin, et. al., “11-T Twin-Aperture Nb₃Sn Dipole Development for LHC Upgrades,” *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **25**, 4002209 (2015). <https://doi.org/10.1109/TASC.2014.2367312>
- [17] J. Coello de Portugal et. al., “Impact of flux jumps in future colliders,” *Phys. Rev. Accel. Beams.* **23**, 011001 (2020). <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.23.011001>
- [18] D. Schoerling and A. Zlobin, “Nb₃Sn Accelerator Magnets,” Springer Cham (2019). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-16118-7>
- [19] <https://lh-machine-outreach.web.cern.ch/lh-machineoutreach/components/cable.htm>.
- [20] A.P. Verweij, “Electrodynamics of Superconducting Cables in Accelerator Magnets,” Ph.D. thesis University of Twente, 1995.
- [21] A.Devred and T. Ogitsu, “Influence of Eddy Currents in Superconducting Particle Accelerator Magnets using Rutherford-type Cable,” CERN-CAS, 93 (1996). <https://doi.org/10.5170/CERN-1996-003.03>
- [22] M.N. Wilson, et. al., “Design Studies on Superconducting Cos θ Magnets for a Fast Pulsed Synchrotron,” *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **12**, 313 (2002). <https://doi.org/10.1109/TASC.2002.1018408>
- [23] T. Ogitsu, et. al., “Influence of Inter-strand Coupling Current of Field Quality of Superconducting Accelerator Magnets,” *Particle Accelerator* **57** (1997).
- [24] M. Haverkamp, “Decay and Snapback in Superconducting Accelerator Magnets,” Ph.D. thesis University of Twente, 2003.
- [25] A. Devred, et. al., “Time Decay Measurement of the Sextupole Components of the Magnetic Field in a 4-cm Aperture, 17-m-long SSC Dipole Magnet Prototype”, SSCL-462, FERMILAB-Conf-91/148 (1991).
- [26] L. Krempasky, et. al., “Influence of a Longitudinal Variation of dB/dt on the Magnetic Field Distribution of Superconducting Accelerator Magnets,” *Appl. Phys. Lett.* **66**, 1545 (1995). <https://doi.org/10.1063/1.113641>
- [27] S. I. Bermudez, et. al., “Decay and Snapback in Nb₃Sn Dipole Magnets,” *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **27**, 4002306 (2017). <https://doi.org/10.1109/TASC.2016.2633980>
- [28] A.K. Ghosh, et. al., “Minimum Quench Energy Measurement on Prototype LHC Inner Cables in Normal Helium at 4.4 K and in Superfluid He at 1.9 K,” *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **9**, 257 (1999). <https://doi.org/10.1109/77.783285>

- [29] L. Bottura, “Cable stability,” CERN Yellow Report, CERN-2014-005.
- [30] K. Suzuki, et. al., “Quench Protection Heater Study With the 2-m Model Magnet of Beam Separation Dipole for the HL-LHC Upgrade,” IEEE Trans. Appl. Supercond, **28**, 4002505 (2018).
<https://doi.org/10.1109/TASC/2017.2776938>
- [31] K. Suzuki, et. al., “Performance of the Quench Protection Heater for the HL-LHC Beam Separation Dipole,” IEEE Trans. Appl. Supercond., **30**, 4701206 (2020).
<https://doi.org/10.1109/TASC.2020.2971458>
- [32] E. Ravaioli, et. al., “New, Coupling Loss Induced, Quench Protection System for Superconducting Accelerator Magnets,” IEEE Trans. Appl. Supercond., **24**, 0500905, (2014).
<https://doi.org/10.1109/TASC.2013.2281223>
- [33] E. Todesco, et. al., “The High Luminosity LHC interaction region magnets towards series production,” Supercond. Sci. Technol. 34, 053001 (2021). <https://doi.org/10.1088/1361-6668/abdba4>
- [34] E. Ravaioli et. al., “Protecting a Full-Scale Nb₃Sn Magnet With CLIQ, the New Coupling-Loss-Induced Quench System,” IEEE Trans. Appl. Supercond., **25**, 4001305, (2015).
<https://doi.org/10.1109/TASC.2014.2364892>
- [35] L. Bottura, “A practical fit for the critical surface of NbTi,” IEEE Trans. Appl. Supercond., **10**, 1054, (2000). <https://doi.org/10.1109/77.828413>
- [36] G.P. Willering, “Stability of Superconducting Rutherford Cables: For accelerator magnets,” Ph.D. thesis University of Twente, 2009.