

6. HD 荷電二次ビームライン

高エネルギー加速器研究機構

高 橋 仁

目 次

HD荷電二次ビームライン

1	はじめに	6-1
2	ハドロン実験施設	6-1
3	二次ビームの強度	6-4
4	二次粒子の分離	6-6
4.1	静電セパレータ	6-7
4.2	K1.1BR ビームライン	6-9
4.3	RF セパレータ	6-11
4.4	K10 ビームライン	6-13
5	運動量解析	6-15
5.1	運動量分散整合法	6-15
5.2	HIHR ビームライン	6-17
6	終わりに	6-17
A	ビーム光学の基礎	6-19
A.1	輸送行列	6-19
A.2	輸送行列の組み合わせ	6-21
A.3	四極電磁石の使い方	6-22
	参考文献	6-23

HD 荷電二次ビームライン

1 はじめに

J-PARC では、加速された一次陽子ビームを生成標的に当て、そこで発生する二次粒子を集めて二次ビームとして実験エリアまで輸送し実験ユーザーへと供給している。そのような施設の一つ、ハドロン実験施設 [1, 2] では、現在生成標的が 1 台だけ設置されており、主に π 中間子、 K 中間子、反陽子などの二次ビームを用いて、様々な素粒子原子核物理実験が行われている。

本講義では、これら荷電二次ビームラインの特徴や設計について解説する。まず次節で、各二次ビームラインの特徴とそこでの物理実験を手短に紹介する。その後、これらの二次ビームラインを設計するのに必要な要素を、実際のビームラインでの具体例を見ながら詳しく解説する。なお、本テキストは、筆者による過去の OHO 講義『二次粒子生成標的と二次ビームライン』のテキスト [3] から、ビームラインに関するものを抜き出し、いくつか新しいトピックスを追加した上で全体を再構成したものである。重複する内容が多いが、あらかじめご了承願いたい。最後に付録として、本テキストの内容を理解するのに最低限必要なビーム光学の基礎をまとめたので、必要に応じて参照してほしい。

2 ハドロン実験施設

2023 年時点のハドロン実験ホールのレイアウトを Fig. 1 に示す。主リングで 30 GeV まで加速された一次陽子ビームは、約 2 秒かけて少しずつゆっくりと取り出され (“遅い取り出し”)、ハドロン実験ホールへと輸送されて生成標的 T1 に照射される。そのうちの約 50 % が標的物質と核反応を起こし、残りは素通りして最下流のビームダンプで全て吸収される。T1 標的で発生した π 中間子や K 中間子などの二次粒子を実験エリアへ輸

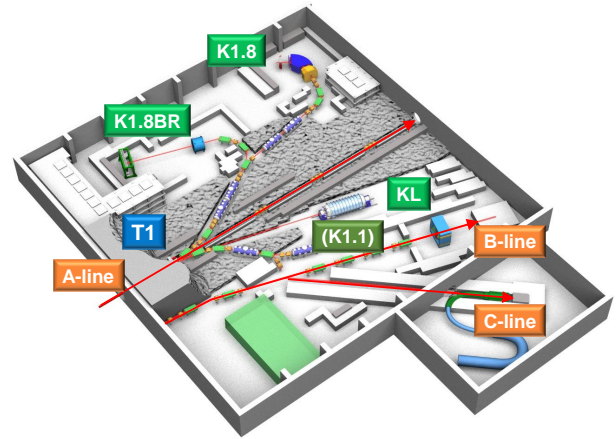


Fig. 1 ハドロン実験ホールのレイアウト。

送してユーザー実験に利用する二次ビームラインが複数設置されており、現在のところ、2 本の荷電二次ビームライン (K1.8、K1.8BR) と 1 本の中性二次ビームライン (KL) がある。この、T1 標的を通過してビームダンプへと至る一次陽子ビームラインを A ラインと呼んでいる。A ラインの途中から一次陽子のうちの一部分のみ (1/1000 以下) を分岐して直接ユーザー実験に使用する一次ビームライン (B ラインと呼ぶ) が 2020 年より稼働した。さらに今年、ビームラインとしては B ラインの途中から分岐する形で、実験ホールの南に建てられたハドロン南実験棟地下へ 8 GeV の一次陽子を全量輸送する新しい一次ビームライン (C ラインと呼ぶ) がビームコミッショニングを開始したところである。

これらのビームラインのうち、K1.8 と K1.8BR ビームラインは、上流部を共有しているため同時並行で実験を遂行することができない。また、C ラインはエネルギーの低い一次陽子ビームを専有して使うので、C ライン運転中は他のビームラインにはビームが出せない。従って、現在のハドロン実験施設で同時に走ることのできる実験数は、B ライン、KL と、K1.8 もしくは K1.8BR いずれか、の 3 つである。そこで、ハドロン実験ホールを広げて A ラインを延長し、そこに第 2 生成標的 T2 と、これまでにない特徴を持った複数の二次ビームラインを設置することで、量と質の両

面でハドロン実験施設をアップグレードしようというハドロン拡張計画が、今盛んに議論されている [4,5]。

拡張されたハドロン実験ホールのレイアウトを Fig. 2 に示す。実験ホールの面積を約 2 倍に拡張し、そこに 4 本の新しい荷電二次ビームライン (HIHR、K10、K1.1、K1.1BR) と、1 本の中性二次ビームライン (KL2) を作る計画である。また、現在は一次陽子ビームラインとして使われている B ラインを二次ビームライン化 ($\pi 20$) する計画もある。

以下、これらの既存及び計画中的の荷電二次ビームラインについて、それぞれの特徴とそこで行われている代表的な物理実験をごく簡単に紹介する。なお、中性二次ビームライン (KL 及び KL2) については別の講義 [6] で詳しく解説されているので、ここでは割愛する。

K1.8 ビームライン

原子核の構成要素である陽子と中性子 (この 2 つをまとめて核子と呼ぶ) は、3 個のクォークが集まってできており、それぞれアップ (u) クォーク 2 個とダウン (d) クォーク 1 個、u クォーク 1 個と d クォーク 2 個から成っている。現在の素粒子物理学における標準理論では、クォークは u、d 以外にストレンジ (s)、チャーム (c)、ボトム (b)、トップ (t) クォークがあり、合計 6 種類である。この中で u、d クォークが最も軽い。クォークは単体では存在できず、3 つのクォークが集まった重粒子 (バリオン)、もしくはクォークと反クォークが 1 個ずつ集まった中間子 (メソン) として存在する。このクォークからできているバリオンとメソンを総称してハドロンと呼ぶ。陽子や中性子もバリオンの 1 種であるが、バリオンには他に s クォークを 1 個含む Λ 粒子や Σ 粒子、s クォークを 2 個含む Ξ 粒子、あるいは c クォークを 1 個含む Λ_c 粒子など、たくさんの種類がある。特に、u、d クォークの次に軽い s クォークを含むバリオンをハイペロンと呼ぶ。陽子や中性子が集まって原

子核を形作るが、その陽子や中性子の兄弟である Λ 粒子なども原子核を構成することができる。陽子や中性子にハイペロンが加ってできた原子核をハイパー核と呼ぶ。ハイペロンは通常は生成されてもすぐに崩壊してしまうが、中性子星の中心部という超高密度環境には安定して存在し得ると考えられており、ハイパー核の性質を調べることで中性子星の内部構造を解明しようという研究が、実験、理論の両面で盛んに行われている。

ハイパー核を作るには、s クォークを含む K^- 中間子を標的原子核に照射するのが最も簡単な方法である。従って、大強度の K^- 中間子ビームを供給するハドロン実験施設は、ハイパー核の実験研究の世界的中心を担っている。中でも、K1.8 ビームラインでは、s クォークを 2 個含む Ξ^- 粒子を大量に生成し、それが原子核中に束縛された Ξ ハイパー核や、 $\Xi^- p \rightarrow \Lambda\Lambda$ 反応によって 2 個の Λ 粒子が原子核内に束縛されたダブル Λ ハイパー核を作って、その性質を調べる実験が主に行われている。 (K^-, K^+) 反応による Ξ^- 粒子の生成断面積が約 1.8 GeV/c で最大になることから、本ビームラインは 1.8 GeV/c の高輝度かつ高純度の K^- 中間子ビームを供給することに最適化されている。最大運動量は 2 GeV/c である。二次ビーム中の K^- 中間子の純度を上げるために、静電セパレータと呼ばれる粒子選別装置を 2 台備える。

静電セパレータによる粒子選別については、4.1 節で詳しく解説する。

K1.8BR ビームライン

K1.8 ビームラインの 1 台目の静電セパレータを過ぎたところで K1.8 ビームラインから分岐し、別の実験エリアにビームを供給するのが K1.8BR ビームラインである。分岐後の偏向電磁石の磁場の制限から、最大運動量は 1.1 GeV/c となっている。

このビームラインでは特に、 K^- 中間子と陽子や中性子が集まってできた K 中間子核の研究が行われている。中間子のもとと、核子の間に

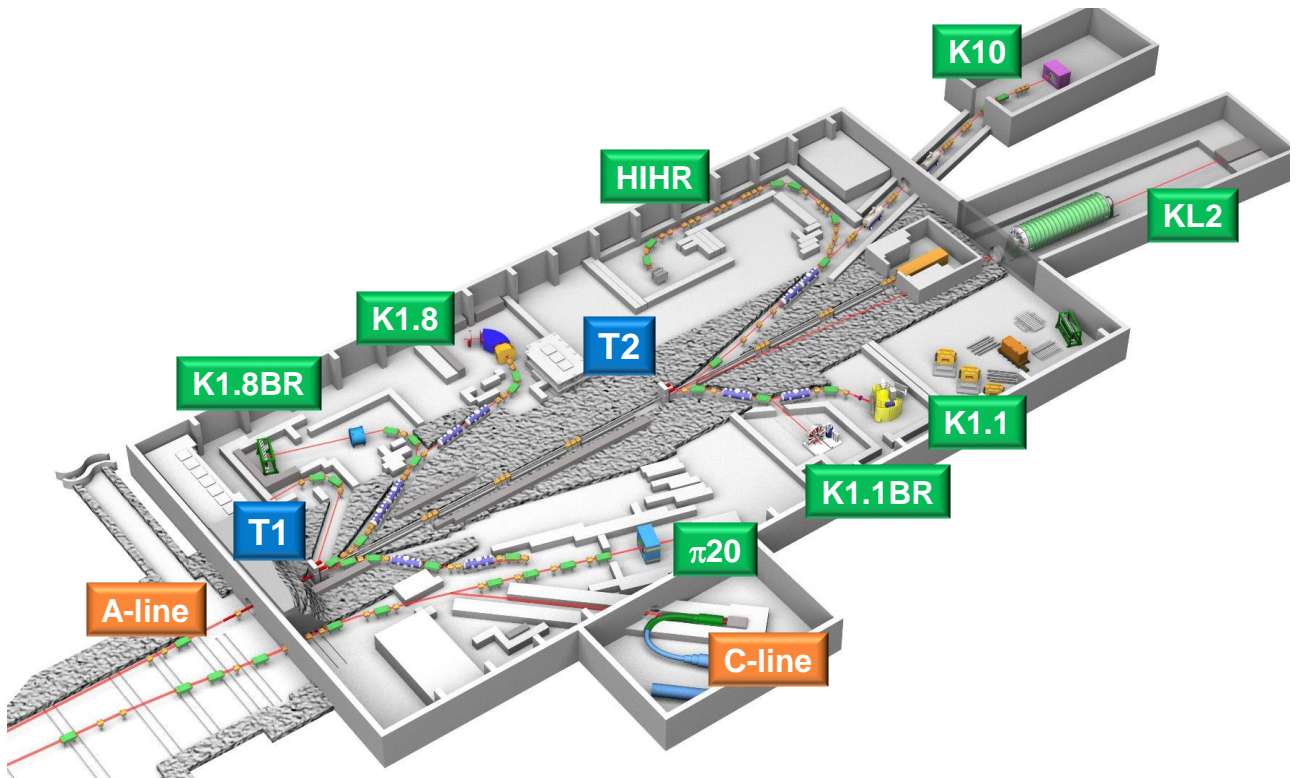


Fig. 2 拡張したハドロン実験ホールのレイアウト。

働く引力を媒介する粒子として湯川秀樹によって存在が予言された粒子 (π 中間子) であるが、 K 中間子核は、その中間子があらわに原子核の構成要素となった、全く新しい物質形態である。 K 中間子と核子との間に働く強い引力により、 K 中間子核は、通常の原子核よりもコンパクトで高い密度を持つと予言されており、高密度核物質の性質を調べる上でも興味深い。

K1.1、K1.1BR ビームライン

1 GeV/c 程度までの低運動量の K 中間子を大量に供給することを目的としたビームラインである。K1.1 は、2 台の静電セパレータによって粒子分別された高純度の K^- 中間子ビームを使って、主に s クォーク 1 個を含むハイパー核の研究が計画されている。最大運動量は 1.1 GeV/c である。K1.1BR は、1 台目の静電セパレータの後で K1.1 から分岐するビームラインで、最大運動量は 1 GeV/c である。 K^- あるいは K^+ 中間子を実

験標的中に静止させて、電子の代わりに K^- 中間子が電子軌道に入った K^- 原子の性質を調べる実験や、 K^+ 中間子崩壊での時間反転不変性の破れを探索する実験などが計画されている。K1.1BR は静電セパレータが 1 台のみであるが、その分ビームラインの全長が短くなるように設計されており、低運動量の K 中間子を大量に利用するのに適している (理由は後述)。

K1.1BR ビームラインはかつてハドロン実験ホールに存在していたが、B ラインの建設のためにシャットダウンした。B ラインと実験エリアを共有する形で K1.1 ビームラインを建設できるよう、現在も上流部分は撤去せずに残ったままになっている。しかし、このまま K1.1 の下流部分を建設したとしても、B ラインと K1.1 は同時には運転できず、その切り替えにも数か月の時間がかかり、非常に利便性が悪い。そこで、ハドロン拡張計画では、K1.1 と K1.1BR ビームラインを T2 標的側に移設する計画になっている。それにより B ラインとの同時運転ができるようになる。

K1.1 と K1.1BR とは同時に運転できないが、その切り替えは電磁石の設定変更だけで済む。

HIHR ビームライン

運動量分散整合法という特殊なビーム光学を採用することにより、これまでの高エネルギー二次ビームラインではせいぜい千分の一の分解能であったのを、さらに一桁あげて一万分の一の分解能を実現する。それにより、ハイパー核の構造をより精密に調べることが可能になる。拡張されたハドロン実験ホールに建設が予定されているビームラインであり、拡張計画のフラグシップとなっている。

運動量分散整合法と HIHR ビームラインの詳細については、5.1 節と 5.2 節で詳しく解説する。

K10 ビームライン

最高 10 GeV/c までの粒子識別された二次ビームを供給する。s クォーク 3 個からなる Ω 粒子の性質を調べる実験や、s クォーク 3 個を含むハイパー核の研究といった、これまでの 2 GeV/c 以下の K 中間子ビームでは不可能だった特色ある研究が展開できる。

高運動量の二次ビーム粒子の種類を選別するには、従来使われていた静電セパレータでは困難であり、RF セパレータという異なる装置が必要となる。RF セパレータと K10 ビームラインの詳細については、4.3 節と 4.4 節で詳しく解説する。

π 20 ビームライン

現在の B ラインは、ランバートソン電磁石 [7] という特殊な分岐電磁石を用いて一次陽子ビームのごく一部だけを分岐し、それを直接ユーザー実験に利用している。このランバートソン電磁石を二次粒子生成標的に置き換えることで、B ラインを高運動量二次ビームラインとして利用する計画が提案されている。この二次ビームライン化した

B ラインを特に π 20 ビームラインと呼んでいる。現在の B ラインに、いくつかの四極電磁石と六極電磁石を追加することで、ビームラインの途中に運動量分散を大きくとった焦点面を作り、そこでビームの位置を測定することでビームの運動量を高分解能で測定できるように設計されている。二次ビームの粒子を選別する機能は備わっていないので、主な粒子は π 中間子となる。最大運動量は 20 GeV/c で、この高運動量 π^- ビームを用いて、s クォークよりも重い c クォークを含んだチャームバリオンの性質を調べる実験が計画されている。

3 二次ビームの強度

二次ビームの強度 Y は以下の式で求められる。

$$Y = I\eta \frac{d^2 N}{dpd\Omega} \Delta\Omega \frac{\Delta p}{p} p D \quad (3-1)$$

ここで、 I は一次陽子ビームの強度、 η は一次粒子当たりの二次粒子生成効率 (二次粒子が生成されて標的から放出される確率)、 $\Delta\Omega$ と $\Delta p/p$ はそれぞれ二次ビームラインの立体角と運動量のアクセプタンス、 p は二次ビームの中心運動量である。 D は二次粒子の崩壊係数で、二次粒子の寿命を τ 、ビームラインの長さを L とすると、

$$D = \exp\left(-\frac{L}{\gamma\beta c\tau}\right) \quad (3-2)$$

で与えられる。ここで、 β は二次粒子の速度を光速 c で割った量であり、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。しばしば使われる関係式としては、粒子の静止質量を m 、全エネルギーを \mathcal{E} として、

$$\beta = \frac{pc}{\mathcal{E}}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}, \quad \gamma\beta = \frac{pc}{mc^2}, \quad (3-3)$$

$$\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

がある。例えば、荷電 K 中間子の寿命は $\tau = 12.38$ ns ($c\tau = 3.71$ m)、質量は $m = 0.4937$ GeV/c² なので、 $p = 1.8$ GeV/c の時 $\gamma\beta = 3.65$ になるから、 $\gamma\beta c\tau = 3.65 \times 3.71 =$

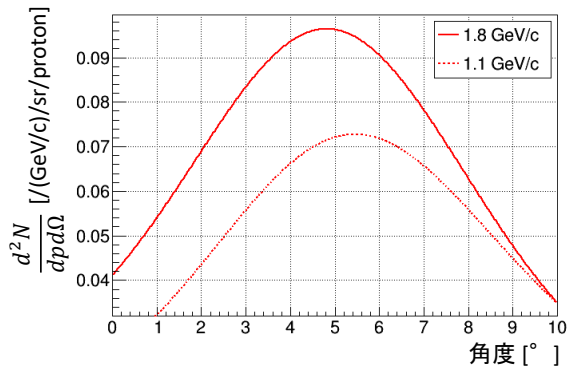


Fig. 3 30 GeV 陽子入射における 1.8 GeV/c と 1.1 GeV/c の K^- 中間子の生成角度分布。横軸の角度は実験室系での角度である。

13.5 m ごとに強度が $1/e$ に減るということである。従って、特に低い運動量領域で K 中間子等のような寿命の短い粒子を二次ビームとして用いる場合は、出来る限りビームラインの総長を短くすることが肝心である*。

$\frac{d^2N}{dpd\Omega}$ は、単位運動量、単位立体角、1 反応陽子当たりの生成二次粒子数であり、二次粒子の生成微分断面積 $\frac{d^2\sigma}{dpd\Omega}$ との関係は次式で表される。

$$\frac{d^2\sigma}{dpd\Omega} = \sigma_p \frac{d^2N}{dpd\Omega} \quad (3-4)$$

ここで、 σ_p は標的による陽子の吸収断面積で、標的物質の質量数を A として、おおよそ $A^{2/3}$ に比例する。J.R. Sanford と C.L. Wang は、入射陽子の運動量が 10 GeV/c から 35 GeV/c までの実験データを用いて次のような経験式をまとめた [8]。

$$\frac{d^2N}{dpd\Omega} = f(p) \cdot g(p, \theta) \quad (3-5)$$

ここで、 $f(p)$ は前方の運動量分布、 $g(p, \theta)$ は角

* しかしながら、J-PARC のような大強度施設の場合は、生成標的で発生する極度の高放射線・高熱場のために、二次ビームライン電磁石を標的に近づけるのにも限界がある上、必要な放射線遮蔽も非常に厚くなるため、一次陽子ビーム強度が増すほど二次ビームラインの総長が長くなって、一次ビームに対する二次ビームの強度比が低くなってしまふ、というジレンマを抱えている。従って、いかに効率よく冷却し遮蔽するかが重要となる。

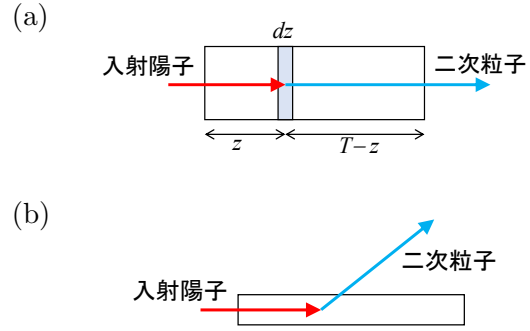


Fig. 4 標的で入射陽子から二次粒子が生成される反応の模式図。(a) 0 度で生成される場合。(b) 大角度で生成される場合。

度依存性を表し、それぞれ、

$$f(p) = Ap^B \left(1 - \frac{p}{p_i}\right) \exp\left(-C \frac{p^D}{p_i^E}\right) \quad (3-6)$$

$$g(p, \theta) = \exp\left(-F\theta(p - Gp_i \cos^H \theta)\right) \quad (3-7)$$

で与えられる。 p_i と p はそれぞれ入射陽子と生成二次粒子の運動量 [GeV/c]、 θ は実験室系での二次粒子の生成角度 [rad] である。 $A \sim H$ は二次粒子の種類に応じたパラメータで、実験データへのフィットにより求められている。 π^\pm 中間子、 K^\pm 中間子、反陽子に対する各パラメータの値を Table 1 にまとめた。特筆すべきは、これらのパラメータは標的物質の種類に依らないことである。これを用いて、例えば、入射陽子の運動量が 30.9 GeV/c の時の、運動量 1.1 GeV/c と 1.8 GeV/c の K^- 中間子の生成角度分布をプロットすると Fig. 3 のようになる。0 度ではなく 5 ~ 6 度前後で最大になっていることが分かる。なお、二次陽子の生成微分断面積については、同様の経験式が C.L. Wang によって与えられている [9]。

二次粒子の運動量が低くなると、その収量は上記の Sanford と Wang の式よりも急激に落ち込んでいく。これは低運動量領域での運動学的効果によるもので、“kinematic reflection” というモデルで理解される。詳細は参考文献 [10] を参照されたい。

生成効率 η は、入射陽子が標的物質と反応し、かつ生成された二次粒子が標的から放出される確

Table 1 Sanford と Wang による各二次粒子の生成微分断面積のパラメータ。

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
π^+	1.092	0.6458	4.046	1.625	1.656	5.029	0.1722	82.65
π^-	0.821	0.5271	3.956	1.731	1.617	4.735	0.1984	88.75
K^+	0.05897	0.6916	3.744	4.520	4.190	4.928	0.1922	50.28
K^-	0.02210	1.323	9.671	1.712	1.643	4.673	0.1686	77.27
反陽子	0.001426	1.994	9.320	1.672	1.480	4.461	0.2026	78.00

率であり、標的の材質、厚さや形状、二次粒子の生成角度等によって決まる。陽子の相互作用長を λ_p とすると、これは単位長さ当たり陽子が反応する割合の逆数であるから、厚さ T の標的を通過する陽子の割合は $\exp(-T/\lambda_p)$ である。吸収断面積 σ_p との関係は、標的の密度を ρ 、アボガド口数を N_A として、

$$\frac{1}{\lambda_p} = \frac{\rho N_A}{A} \sigma_p \quad (3-8)$$

である。例として、Fig. 4(a) のように、二次ビームの生成角が 0 度の場合を考えると、標的の深さ z から $z + dz$ の間の微小区間における生成効率 $d\eta$ は、陽子が厚さ z だけ標的を通過する確率と、厚さ dz で反応する確率、そして、生成された二次粒子が残りの標的厚さ $T - z$ の中で吸収されずに通過する確率の積で与えられるので、二次粒子の相互作用長を λ_s として、

$$d\eta = \exp\left(-\frac{z}{\lambda_p}\right) \cdot \frac{dz}{\lambda_p} \cdot \exp\left(-\frac{T-z}{\lambda_s}\right) \quad (3-9)$$

である。これを標的の厚さ T まで積分すれば、

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{1 - \lambda_p/\lambda_s} \left(\exp\left(-\frac{T}{\lambda_s}\right) - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_p}\right) \right) & (\lambda_p \neq \lambda_s) \\ \frac{T}{\lambda_p} \exp\left(-\frac{T}{\lambda_p}\right) & (\lambda_p = \lambda_s) \end{cases} \quad (3-10)$$

が得られる。

次に、Fig. 4(b) のように、入射ビーム方向に十分に細長い標的から大角度で二次ビームを生成する場合を考える。この場合、生成された二次粒

子の標的内での吸収は無視できるから、 η は入射陽子の標的での反応確率だけとなり、

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_p}\right) \quad (3-11)$$

である。これは、式 (3-10) で、 $1/\lambda_s \rightarrow 0$ とした極限に等しい。生成標的でのビームロス量として、よく「相互作用長で 50 % ロス」という言い方をするが、それはこの式 (3-11) における η が 50 % という意味である。生成二次粒子の吸収が無い分だけ二次ビーム強度が大きくなるので、低運動量の K 中間子など、前方よりも有限角に生成ピークがある場合は、その角度に生成角を合わせた上で標的の横幅をなるべく小さく（当然、入射陽子ビームの横幅も小さく）する方が望ましい。

4 二次粒子の分離

生成標的に一次ビームが照射されることで生じる二次粒子は、種類も運動量も様々である。その中から、目的に合った種類と運動量の粒子だけを選び出して実験エリアへと導くことで、二次ビームとして利用できるようになる。一様磁場中を通過する荷電粒子が受ける偏向角度は電荷に比例して運動量に反比例するので、電磁石を用いることで二次粒子の電荷と運動量を選別できる。しかし、磁場だけでは粒子の種類まで選別することが出来ない。そこで、運動量の揃った異粒子間では質量の違いは速度の違いとなって現れることから、偏向が速度に依存する電場を用いて、粒子を選別す

る[†]。特に、 K 中間子や反陽子といった、生成断面積の小さい (π 中間子に比べるとその差は 2 桁以上!) 粒子を二次ビームとして利用するには、この粒子選別は非常に重要である。

4.1 静電セパレータ

質量 m 、電荷 e の粒子が、進行方向 (z) に垂直な方向 (y) に向けられた静電場 E の中を通る場合の運動方程式は、

$$\gamma m \frac{d^2 y}{dt^2} = eE \quad (4-1)$$

で与えられる。セパレータ電場による速度の変化の割合は非常に小さいので無視している。粒子の運動量と速度をそれぞれ p 、 $v = c\beta$ として、式 (4-1) を z についての微分方程式に直せば、

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{eE}{\gamma m v^2} \quad (4-2)$$

これを、静電場の長さ l まで積分すると、

$$y = \frac{eEl^2}{2pc\beta}, \quad y' = \frac{dy}{dz} = \frac{eEl}{pc\beta} \quad (4-3)$$

が得られる。従って、必要(不要)な粒子の速度と質量をそれぞれ $\beta_w(\beta_u)$ 、 $m_w(m_u)$ とすると、必要粒子と不要粒子が受ける偏向の差、すなわち、異なる種類の粒子間の分離の大きさは、

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \frac{eEl}{pc} \left(\frac{1}{\beta_w} - \frac{1}{\beta_u} \right) \\ &\approx \frac{eEl}{2(pc)^3} \left((m_w c^2)^2 - (m_u c^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (4-4)$$

となる。

これは、静電場から受ける偏向が速度(あるいは質量)に依存していることを示している。このことを利用して、2枚の平行平板電極に高電圧をかけて、電極間に発生した静電場の中にビームを通すことで粒子の種類を選別する装置が、静電セパレータである。実際の使い方は、必要な種類の

[†]電場を用いる方法以外にも、例えば、物質中を通過する荷電粒子が受けるエネルギーロスが速度に依存していることを利用する方法もある。

粒子が電場から受ける偏向(式(4-3))をキャンセルするように、電場に直交する向きの磁場をかけて、異なる種類の不要な粒子を中心軌道から逸らし、目的の粒子だけが狭いスリットを通過できるようにする。電荷 e 、速度 v の粒子に働く力

$$F = e(E + vB) \quad (4-5)$$

を 0 にすれば良いから、必要な直交磁場の強度は、

$$B = -\frac{E}{v} = -\frac{E}{c\beta} \quad (4-6)$$

である。例えば、電極間のギャップが 10 cm、電圧が 600 kV の静電セパレータの場合、 $E = 600 \text{ kV} / 10 \text{ cm} = 6 \text{ MV/m}$ となるから、 $p = 1.8 \text{ GeV}/c$ の K 中間子を通す時は、 $\beta = 1.8/\sqrt{1.8^2 + 0.4937^2} = 0.964$ より、 $|B| = 6 \times 10^6 / (3 \times 10^8 \times 0.964) = 0.0207 \text{ T}$ となる。必要な電場を出すための大変さに比べると、磁場で曲げる方がずっと楽なのが分かる。

静電セパレータと四極電磁石を組み合わせたビームラインの模式図を Fig. 5 に示す。ビーム光学としては、静電セパレータで鉛直方向に平行ビームを作った ($R_{44} = 0$) 後、スリット(しばしば“マススリット”と呼ぶ)位置で鉛直方向に収束させる ($R_{34} = 0$) ことにより、セパレータでの角度の差 $\Delta y'$ を、スリットでの位置の差 Δy_2 に変換する。このシステムによる質量分離の性能は、

$$S \equiv \frac{\Delta y_2}{y_2} \quad (4-7)$$

と定義した分離性能指数 S で評価できる。ここで、 y_2 はスリット位置での鉛直方向のビームサイズである。セパレータ前後の四極磁石ダブレットの焦点距離をそれぞれ f_1 、 f_2 とし、線源での鉛直方向のビームサイズと角度をそれぞれ y_0 、 ϕ_0 、セパレータでのビームサイズを y_1 とすると、 $\Delta y_2 = f_2 \Delta y'$ 、 $y_2 = \frac{f_2}{f_1} y_0$ であり、 y_0 が十分小さければ $y_1 \approx f_1 \phi_0$ であるから (A.2 節の輸送行列の組み合わせの例を参照)、式 (4-7) は

$$\begin{aligned} S &= \frac{f_2 \Delta y'}{(f_2/f_1) y_0} \\ &= \frac{y_1 \Delta y'}{y_0 \phi_0} \end{aligned} \quad (4-8)$$

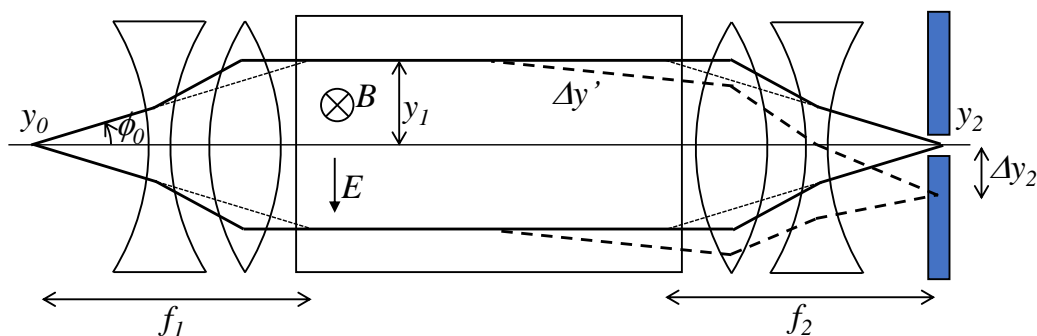


Fig. 5 静電セパレータと四極磁石を組み合わせたビームラインの模式図。

となる。これを見れば、セパレータの分離性能は生成標的での鉛直方向のビームサイズと角度、すなわちアクセプタンスに反比例することが分かる。二次ビーム強度はビームラインのアクセプタンスに比例する (式 (3-1)) ので、これは、二次ビームの強度と純度とは本質的に相反する要求である、ということの意味している。従って、二次ビームラインの設計においては、実験ユーザーの要望に合わせて強度と純度とのバランスをうまく取ることをが重要である。また、生成標的における鉛直ビームサイズに反比例するという事は、標的に入射する一次陽子ビームの鉛直サイズが小さければ小さいほど質量分離性能が高くなる、ということである。また、標的の長さ (奥行き) が長いとそれだけ二次ビームラインから見た時の線源の像がぼけるので、標的はなるべく短い方が良い。このことと二次ビーム強度とを両立させるためには、必然的に標的の密度は出来る限り高い方が好ましい、ということになる。

ただし実際には、標的周辺にいろいろな物質が存在するので、一次陽子のビームハローがそれらに当たって発生した不要粒子 (π 中間子) や、途中の二次ビームライン機器で散乱した π 中間子が混ざり込んでくる他、標的で発生した短寿命の中性 K 中間子 (K_S^0) が崩壊して π 中間子を放出するので、線源での π 中間子の像がぼける。このような線源での像がはっきりしない π 中間子を “cloud π ” と呼び、計算での二次ビームの純度 (K/π 比) が実際の測定値と一致しない原因となっている。cloud π の影響を減らすための対策の一つの例と

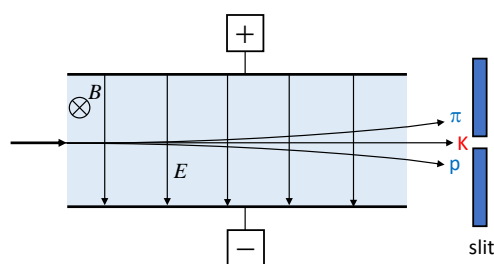


Fig. 6 磁場共存型静電セパレータの模式図。

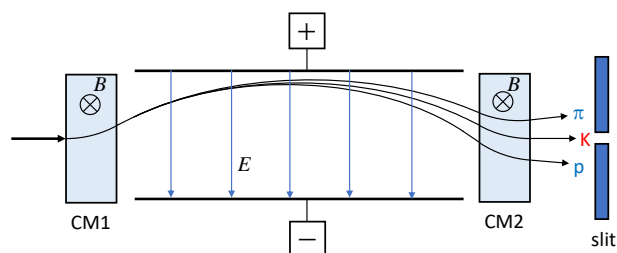


Fig. 7 磁場分離型静電セパレータの模式図。

しては、セパレータを2台用意し、1台目のセパレータ通過後のスリットで二次ビームの像を再定義し、それを2台目のセパレータで粒子分離する、という方法がある。

静電セパレータの構造には、大きく分けて、電場と同じ区間に一様磁場を発生させる磁場共存型 (Fig. 6) と、電場の前後に独立した補償磁石を配置する磁場分離型 (Fig. 7) の2種類がある。両者のメリット、デメリットを列挙すると次のようになる。

磁場共存型

- 目的の粒子に対しては入口から出口まで常に偏向が0なので、アクセプタンスが大きい。

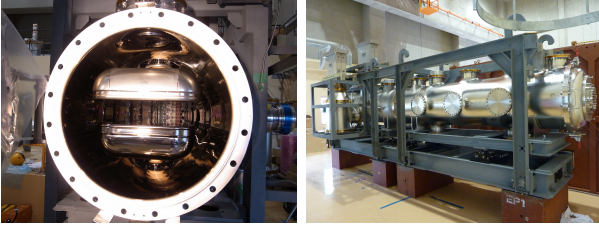


Fig. 8 K1.8 ビームライン用磁場分離型静電セパレータの写真。

- 電極と同じ長さだけ磁極とコイルが必要なので、コストが高い。
- 別の磁石を置く必要がないのでビームラインの総長を短く出来る。

磁場分離型

- 目的の粒子も静電場区間は放物線を描くためアクセプタンスが狭くなる。
- 電極の長さ比べてずっと小さい電磁石を置くだけで済むので、構造が単純になり、コストも下げられる。
- 前後に置く補償電磁石の分だけ、ビームラインの総長が長くなる。

以上のことから、一般的に $1 \text{ GeV}/c$ 程度以下の低運動量のビームラインでは磁場共存型が、それよりも高い運動量のビームラインでは磁場分離型が使われている。

J-PARC ハドロン実験施設の K1.8 ビームラインで使われている磁場分離型静電セパレータの写真を Fig. 8 に示す。静電セパレータによる粒子分離自体は古くからある技術であるが、昔は、セパレータ本体から離れた場所に高電圧発生器を置き、それと本体とを高電圧ケーブルで接続する構造であったため、ケーブルやその接続端子部でのトラブルが頻発していた。1970 年代後半、高エネルギー加速器研究機構 (当時は高エネルギー物理学研究所) 12GeV 陽子シンクロトロン施設 (12GeV PS) の山本明らは、本体の真空容器に高電圧発生器を直接マウントすることでその問題を解決し、従来よりも高い電場勾配を実現する静電

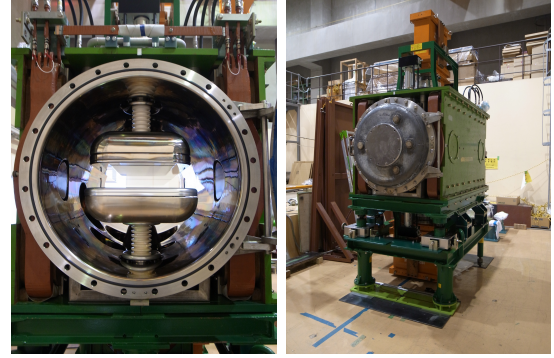


Fig. 9 K1.1 ビームライン用磁場共存型静電セパレータの写真。

セパレータを開発した [11]。写真の K1.8 ビームライン用静電セパレータは、基本的な構造はそれを踏襲しつつ、J-PARC の高放射線環境にも耐えるように有機樹脂類をセラミックに置き換えた耐放射線仕様のものである [12]。電極間のギャップは 10 cm 、最大電圧は 800 kV である。1 枚の電極の長さが 3 m で、それをビーム方向に 2 枚連結することで長さ 6 m の静電場を生み出している。

Fig. 9 が、同じくハドロン実験施設の K1.1BR ビームラインで使われている磁場共存型静電セパレータの写真である。磁場を発生させるコイルとヨークが真空容器を囲っている。12GeV PS の K5 ビームラインで使われていたものをオーバーホールして再利用している。電極の長さは 2 m 、ギャップが 10 cm で、最大電圧は 800 kV である。

4.2 K1.1BR ビームライン

静電セパレータを用いた荷電二次ビームラインの実際の例として、J-PARC ハドロン実験施設の K1.1BR ビームライン [2] を見てみよう。これは、K1.1 ビームラインの途中から分岐する形で設計されたビームラインで、主に静止 K 中間子を用いた実験のために、 $1.0 \text{ GeV}/c$ 以下の低運動量の K 中間子ビームを提供するビームラインである。レイアウトを Fig. 10 に示す。ビームラインの総長は 21.5 m である。Fig. 3 で見たように、低運動量の K^- 中間子は $5 \sim 6$ 度に生成のピークが

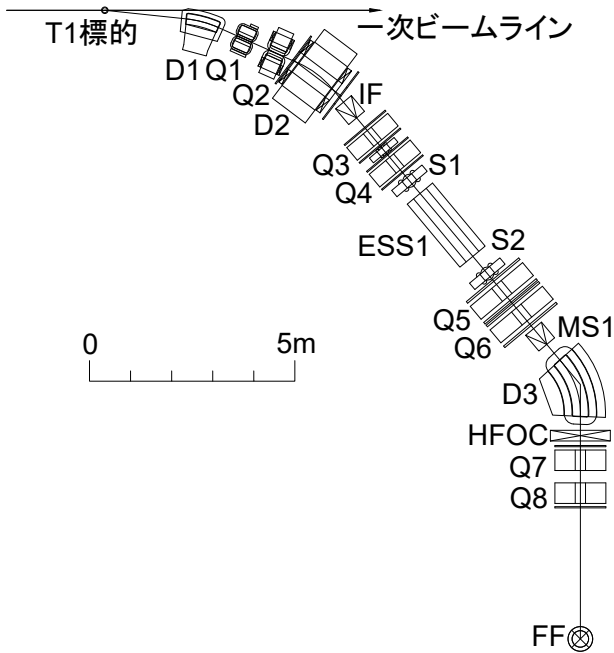


Fig. 10 K1.1BR ビームラインのレイアウト。

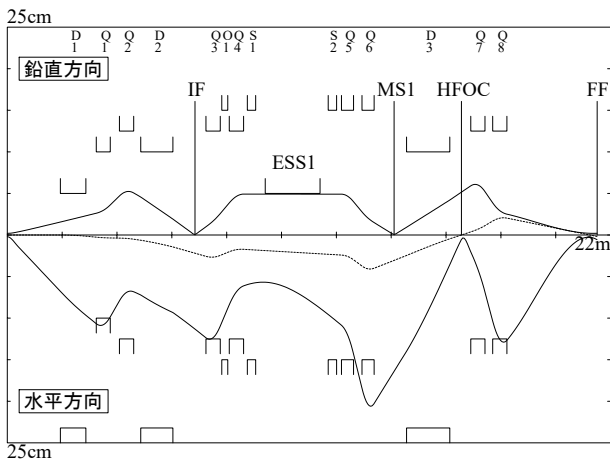


Fig. 11 K1.1BR ビームラインの1次のビームエンベロープ。上半分は鉛直方向、下半分が水平方向のエンベロープで、点線は運動量分散を表す。

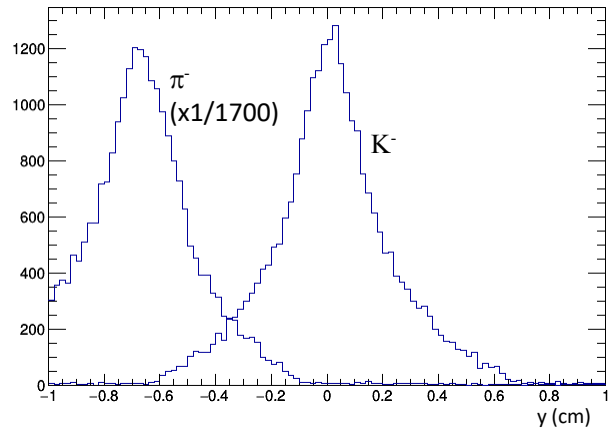


Fig. 12 K1.1BR ビームラインのマススリットにおける、0.8 GeV/c の π^- 中間子と K^- 中間子の鉛直方向の位置の分布。

あるので、1次ビーム軸に対する生成角は6度にとっている。

Fig. 11が、K1.1BR ビームラインの1次のビームエンベロープである。まず、2台の偏向電磁石 (D1、D2) によって1次ビームラインより取り出された2次ビームは、最初のダブレット四極電磁石 (Q1、Q2) によって鉛直方向に収束され結像する ($R_{34} = 0$)。この中間像 (IF) の地点でスリットを通すことで、cloud π を取り除き、二次ビームの像を再定義する。2つ目のダブレット四極電磁石 (Q3、Q4) で平行ビームを作り ($R_{44} = 0$)、静電セパレータ ESS1 を通過させ、次のダブレット四極電磁石 (Q5、Q6) によってマススリット (MS1) で鉛直方向に結像させる ($R_{34} = 0$)。その後、偏向電磁石 D3 で45度曲げた後、水平方向に分散なく収束させて ($R_{12} = R_{16} = 0$) スリット HFOC を通すことで、さらに純度を向上させている。最後にダブレット四極電磁石 (Q7、Q8) によって最終収束点 (FF) で水平方向、鉛直方向ともに結像する ($R_{12} = R_{34} = 0$)。

計算コード TURTLE を用いて、静電セパレータに 750 kV の電圧をかけた時の、0.8 GeV/c の π^- 中間子と K^- 中間子の MS1 での鉛直位置分布を計算した結果を Fig. 12 に示す。マススリットの開口を $\pm 2\text{mm}$ とした時、アクセプタ

ンスは $3.7 \text{ msr} \cdot \% \Delta p/p$ 、50 kW 陽子ビームでの $0.8 \text{ GeV}/c$ K^- 中間子の強度は $2.3 \times 10^5/\text{spill}$ 、純度は $K^- : \pi^- = 1 : 4$ である。ただし、これには cloud π は含まれていない。

4.3 RF セパレータ

式 (4-4) から分かるように、静電セパレータによる分離の大きさはビーム運動量の 3 乗に反比例するので、運動量が高くなると加速度的に分離が困難となる。例えば、電極間のギャップが 10 cm、長さが 6 m の静電セパレータ電極にそれぞれ $\pm 300 \text{ kV}$ の電圧をかけた場合、 $E = 600 \text{ kV} / 10 \text{ cm} = 6 \text{ MV}/\text{m}$ となるから、 π 中間子と K 中間子との分離の大きさは、式 (4-4) から $p = 2 \text{ GeV}/c$ の時 $\Delta y' = 0.5 \text{ mrad}$ であるのに対し、 $p = 4 \text{ GeV}/c$ では $\Delta y' = 0.06 \text{ mrad}$ と 1 桁近く小さくなってしまふ。従って、実用的な $4 \text{ GeV}/c$ の K 中間子ビームを作るには数十 m もの長さの静電セパレータが必要になり、それ以上の高運動量領域に適用するのは現実的でなくなる。そこで、代わりに RF セパレータを用いた粒子選別が必要になる。

RF 空洞を使った粒子分離の方法として最も単純なものは、1 次ビームがバンチ構造を持っている場合で、2 次粒子の生成のタイミングが離散的になるので、生成標的から RF 空洞までの到達時間の違いによって粒子の種類を選別するものである。しかしながら、J-PARC ハドロン実験施設では、バンチ構造を持たない遅い取り出しビームであるため、この方法は適用できない。そこで、RF 空洞を 2 台用意し、その間の距離の飛行時間の差を用いて粒子を分離する [13]。

2 台の RF 空洞を用いた粒子分離法の方法を Fig. 13 に示す。まず、2 台の RF 空洞間を “-I” (I は単位行列) の光学で結ぶ。そして、1 台目の空洞 RF1 で偏向を受けた不要粒子が、2 台目の空洞 RF2 でも全く同じ大きさで同じ向きに偏向を受けるように、2 つの RF の位相を調整する。すると、RF1 への入射時の位相に関わらず、不要粒子が 2

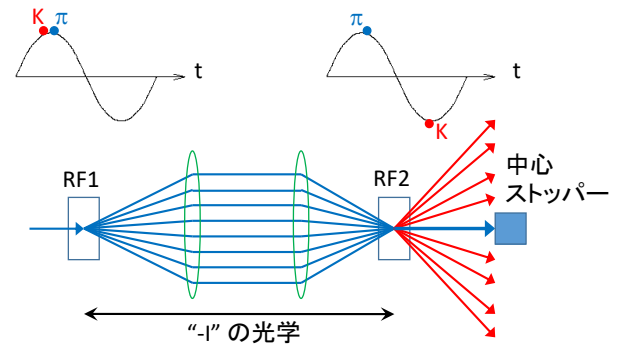


Fig. 13 2 台の RF 空洞を用いた粒子分離法の方法を Fig. 13 に示す。ここでは π 中間子から K 中間子だけ分離する場合を描いている。

つの RF から受ける偏向は必ずキャンセルし、不要粒子は中心軌道に沿って下流の中心ストッパーで吸収される。一方、それとは異なる質量、従って異なる速度を持つ粒子は、RF2 での位相が異なるので偏向はキャンセルされず、RF1 への入射時の位相によって散らばる。そのため、ストッパーの外側を通り抜けて生き延びる。この方法の場合、不要粒子は (理想的には) 全てストッパーに吸収されるが、必要粒子の一部もストッパーに吸収されてしまうので、二次ビームの強度よりも純度を重視する場合に適した方法となる。逆に、RF2 の位相を必要粒子の飛行時間に合わせると、必要粒子が必ず中心軌道を通り、それ以外の粒子が散らばるので、スリットで中心だけ通す形になる。この場合は、必要粒子は全てスリットを通り抜けるものの、不要粒子の一部も通り抜けるので、純度よりも強度を重視する方法である。また、前者の中心ストッパー方式では、必要粒子が散らばるため、RF2 以降の機器のアーチャーを大きく取るか、RF 偏向方向のビームサイズを常に小さくするように光学を工夫するか、あるいは、その散らばりをキャンセルする 3 台目の RF 空洞を用意する必要がある。

なお、 K^- 中間子を使う場合は、反陽子の量が少ないので π^- 中間子を落とすことだけ考えればよいが、 K^+ 中間子を使う場合は π^+ 中間子だけでなく陽子も分離して落とさなければならない。

そのため、さらにもう1台 RF 空洞を設置して π^+ 中間子と陽子の両方を落とす必要がある。また、2空洞法のバリエーションとして、鉛直方向だけでなく水平方向に偏向する RF 空洞も設置すると、不要粒子は鉛直方向にも水平方向にも中心軸に沿ったままだが、必要粒子は x - y 面上でドーナツ形の分布になるので、必要粒子を全く落とすことなく不要粒子を中心ストッパーに吸収させることが可能である。

2台の RF 空洞から受ける偏向の合計は、RF1 への入射時の位相を φ 、RF1 と RF2 の間の位相差を $\Delta\varphi$ とすると、

$$\begin{aligned} y' &= -A \sin \varphi + A \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\ &= 2A \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \quad (4-9) \end{aligned}$$

となる。1行目の右辺最初の項の負号は、2台の RF 空洞間の“-I”光学による。各 RF 空洞における偏向の振幅 A は、前節で述べた静電セパレータによる偏向 (式 (4-3)) と同じで、

$$A = \frac{eEl}{pc\beta} \quad (4-10)$$

で与えられる。ただし、ここでの l は RF 空洞の長さである。必要 (不要) な粒子の速度と質量をそれぞれ、 $\beta_w(\beta_u)$ 、 $m_w(m_u)$ とし、RF1 と RF2 との間の距離を L 、RF 周波数を f とすれば、RF2 の位相は、必要粒子と不要粒子との間で

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_w^u &= \frac{2\pi fL}{c} \left(\frac{1}{\beta_w} - \frac{1}{\beta_u} \right) \\ &\approx \frac{\pi fL}{c} \frac{(m_w c^2)^2 - (m_u c^2)^2}{(pc)^2} \quad (4-11) \end{aligned}$$

だけ異なる。従って、不要粒子の偏向がキャンセルするように RF2 の位相を合わせた時、必要粒子は $2A \sin \frac{\Delta\varphi_w^u}{2}$ の振幅で偏向を受けることになる。

RF 空洞2台による偏向の大きさを具体的に計算してみよう。以下、二次ビームとして必要な粒子は K 中間子と反陽子であると想定し、それに対して不要な π 中間子をどれくらい消し去ることができるかを評価する。

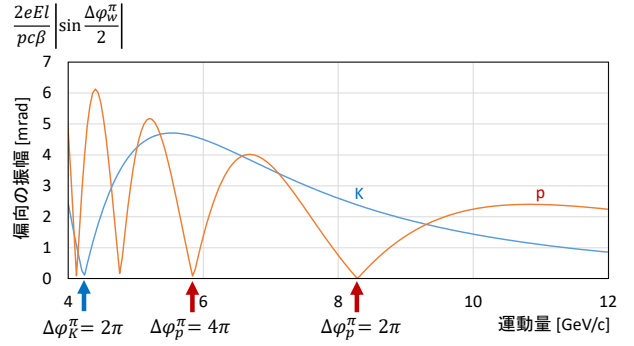


Fig. 14 RF 空洞2台による、粒子の偏向の振幅の大きさ。振幅の大きい運動量領域で粒子分離可能となる。

一例として、RF 空洞の周波数を $f = 2.857$ GHz、電場勾配を $E = 6$ MV/m、長さを $l = 2.25$ m、2台の RF 空洞間の距離を $L = 16.8$ m とした場合を考える。2台目の RF 空洞の位相を π 中間子に合わせると、 π 中間子が2台の RF 空洞から受ける偏向の和はキャンセルして0になる。この時、 K 中間子あるいは反陽子が受ける偏向の振幅の大きさを、運動量を横軸としてプロットすると、Fig. 14 のようになる。“ K ” とラベルされた青線が K 中間子、“ p ” とラベルされた赤線が反陽子の場合である。各曲線におけるノード (谷) の位置が、高運動量側からそれぞれ $\Delta\varphi_K^\pi = 2\pi$ 、 $\Delta\varphi_p^\pi = 2\pi, 4\pi, \dots$ の位相差に対応する。 π 中間子の偏向が0であるから、 K 中間子/反陽子の偏向が大きい運動量領域で粒子選別が可能である。一つの目安として、前述のように6 m の静電セパレータによる 2 GeV/ c の K - π の分離が $\Delta y' = 0.5$ mrad であったことから、その 0.5 mrad より大きい偏向であれば粒子選別可能であるとすると、非常に広い範囲の運動量でビームとして利用可能となる。その中でも特に、 K 中間子の偏向は大きい反陽子の偏向が0となる特定の運動量では、2台の RF 空洞だけで π^+ 中間子と陽子の両方を落として K^+ 中間子を分離することが可能である。

これまでの議論では、1つの RF 空洞内における二次ビーム粒子と RF との位相のずれ (phase

slip) を無視していたが、二次ビームの運動量が低い場合はそのずれが無視できなくなる。この位相差は当然粒子の速度に依存するので、逆にそれを利用して、1 台の RF 空洞だけで粒子を選別することが可能である [14]。RF 空洞 1 台のみでの粒子選別については過去の OHO 講義 [3] で詳しく解説しているので、興味ある方は参照されたい。

4.4 K10 ビームライン

ハドロン拡張計画で建設が予定されている K10 ビームラインは、最高 10 GeV/c までの高運動量の K 中間子や反陽子を提供するビームラインである。K10 ビームラインでは、粒子分離の方法として 2 つのオプションが検討されており、1 つが静電セパレータ、もう一つが RF セパレータを使った方法である。前者の静電セパレータを使うオプションでは、長さ 9 m の静電セパレータを 3 台並べて計 27 m の静電場区間を設けて粒子分離を行うことにより、 K 中間子なら 4 GeV/c、反陽子なら 6 GeV/c までの運動量のビームを供給する。後者の RF セパレータを使うオプションでは、RF 空洞 2 台を用いた粒子選別によって、最高 10 GeV/c までの K 中間子と反陽子のビームが利用可能となる。

RF セパレータを用いる場合の K10 ビームラインのレイアウトと 1 次のビームエンベロープを、それぞれ Fig. 15 と Fig. 16 に示す。RF オプションにも、さらに RF2 の位相を不要粒子に合わせる中心ストッパー方式と、必要粒子に合わせるスリット方式の 2 つがあるが、必要粒子の強度を重視すると、実験標的でのビームサイズが小さくできることから、ここではスリット方式を選択している。二次ビームの生成角は 3 度と、既存の K1.8 や K1.1BR ビームラインの 6 度より小さい。これは、Sanford と Wang の式 (3-7) によると、10 GeV/c の K^- 中間子や反陽子の 3 度での生成断面積が 6 度でのそれよりも約 5 倍大きいからである。長さ 2.25 m の RF 空洞を 2 台 (RF1、RF2)、16.8 m の距離だけ離して配置している。

まず、標的から発せられた二次ビームは、計 3 台の偏向電磁石 (D1 ~ D3) によって一次ビームラインより取り出されつつ、主に大型のトリプレット四極電磁石 (Q3 ~ Q5) によって中間像スリット (IF) の位置で鉛直方向に収束される ($R_{34} = 0$)。これは、先の K1.1BR ビームラインと同様、cloud π を取り除く目的である。それと同時に水平方向では、位置、角度ともに色収差を消している ($R_{16} = R_{26} = 0$)。これは、それ以降のビームサイズを出来る限り小さく抑えるためである。

その後、1 台目の RF 空洞 (RF1) において平行ビームを作る必要があるが、ここで RF 空洞の開口が一般に静電セパレータよりも半分以下と小さいことが問題になる。静電セパレータの時と同様に平行ビームを作るのに $R_{44} = 0$ とすると、 $\det R = 1$ から同時に $R_{34} = 0$ には出来ないの、一般にビームサイズが大きくなってしまふ。そこで代わりに、 $R_{34} = 0$ かつ $R_{44} \sim 0$ とする。また、2 次の角度収差を抑えるには経験的に $R_{43} = 0$ とするとうまくいくので、これも拘束条件に加えている。従って、線源 O から RF1 までの輸送行列は、

$$R_{O \rightarrow RF1} = \begin{pmatrix} 1/A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

となる。K10 ビームラインでは、5 台の四極電磁石 (Q6 ~ Q10) を用いて上記の輸送行列を作っていて、 $A \sim 0.1$ としている。

RF1 の後は、同じ磁場強度の四極電磁石ダブレットを 2 組並べる (Q11 ~ Q14) ことによって、2 台目の RF 空洞 (RF2) までの区間を “-I” の輸送行列で結ぶ。すなわち、

$$R_{RF1 \rightarrow RF2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

である。

その後、トリプレット四極電磁石 (Q15 ~ Q17) によって、RF 空洞で受けた偏向をマススリット (MS) での位置ずれに変換するが、その位置ずれ

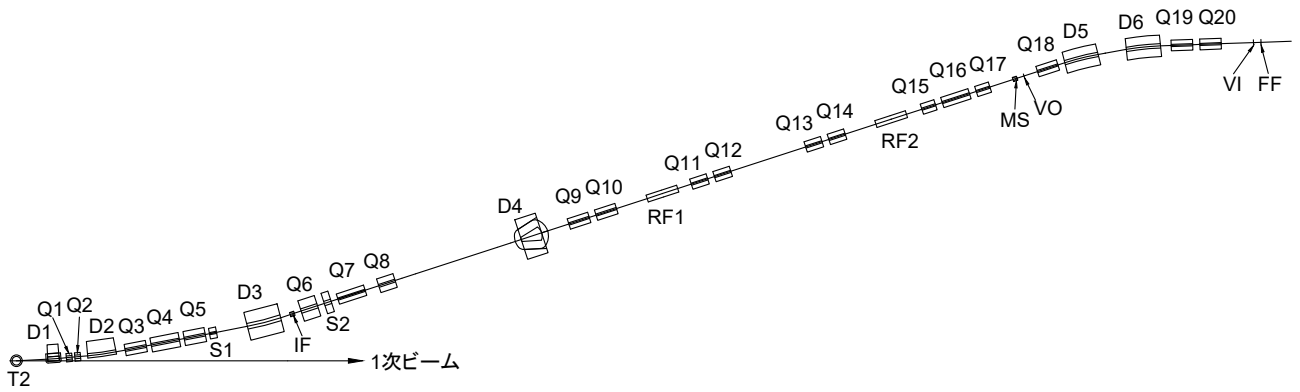


Fig. 15 K10 ビームライン (RF オプション) のレイアウト。

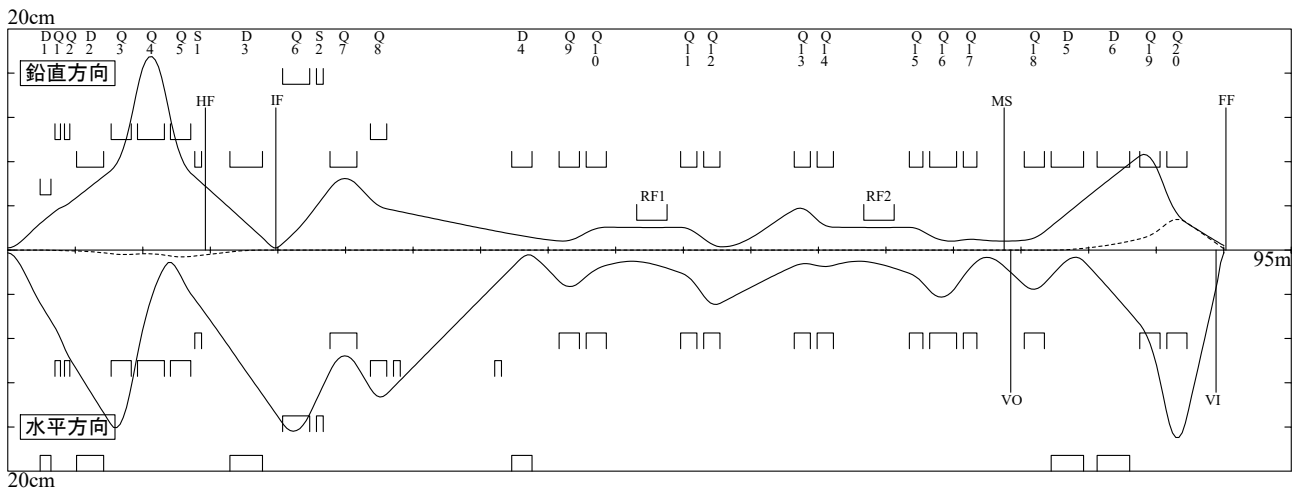


Fig. 16 K10 ビームライン (RF オプション) の1次のビームエンベロープ。上半分は鉛直方向、下半分が水平方向のエンベロープで、点線は運動量分散を表す。

が元のビーム幅より十分大きくなり、かつ、スリットの後でビームが広がり過ぎないように、RF 空洞からマススリットまでの輸送行列の対角成分を 0 にして、非対角成分の大きさを調整している。

$$R_{\text{RF2} \rightarrow \text{MS}} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \quad (4-14)$$

K10 ビームラインでは $f \sim 1 \text{ cm/mrad}$ としている。以上から、線源から MS までの輸送行列は、

$$\begin{aligned} R_{\text{O} \rightarrow \text{MS}} &= R_{\text{RF2} \rightarrow \text{MS}} R_{\text{RF1} \rightarrow \text{RF2}} R_{\text{O} \rightarrow \text{RF1}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -fA \\ 1/fA & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-15)$$

となる。

その後、2 台の偏向電磁石 (D5、D6) と 3 台の四極電磁石 (Q18 ~ Q20) によって最終収束点 (FF) で水平方向、鉛直方向ともに分散無しで結像する ($R_{12} = R_{16} = R_{34} = 0$)。それと同時に、運動量分析のために、VO → VI の区間の輸送行列が point-to-point focus ($R_{12} = 0$) となるように光学が調整されており、この VO、VI でのビームの位置を測定することで、高分解能でビーム粒子の運動量を測定できる (位置分解能 $300 \mu\text{m}$ で運動量分解能 0.1%)。

周波数 $f = 2.857 \text{ GHz}$ 、電場勾配 $E = 6 \text{ MV/m}$ の RF をかけた時の、 $6 \text{ GeV}/c$ の π^- 中間子と K^- 中間子のマススリットでの鉛直位置分布を TURTLE で計算した結果を Fig. 17 に示す。ただし、これには cloud π は含まれていない。RF2 での位相を K^- 中間子に合わせた結果、 K^- 中間子の像は中心に集中している一方で、 π^- 中間子は空洞での位相によって上下に振られているのが分かる。マススリットの幅を 1 cm に設定した時、アクセプタンスは $0.42 \text{ msr} \cdot \% \Delta p/p$ 、 50 kW 陽子ビームでの $6 \text{ GeV}/c$ K^- 中間子の強度は $5.2 \times 10^6/\text{spill}$ 、純度は $K^- : \pi^- = 1 : 5.0$ である。

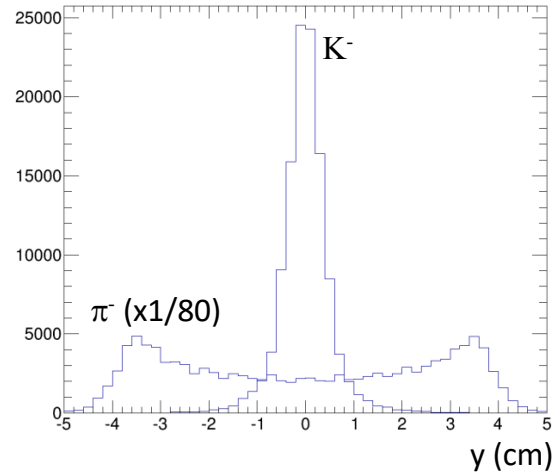


Fig. 17 K10 ビームライン (RF オプション) のマススリットにおける、 $6 \text{ GeV}/c$ の π^- 中間子と K^- 中間子の鉛直方向の位置の分布。

5 運動量解析

線源から発せられたビームをビームラインで輸送し、標的に当てて散乱させ、それをスペクトロメータで運動量解析する、という散乱実験を考える。これまでの荷電二次ビームを用いた散乱実験では、標的に入射するビーム粒子と、散乱後の散乱粒子をそれぞれ独立に運動量解析し、その両者の差から欠損質量 (missing mass) を求めることで標的核の励起エネルギーが得られていた。しかし、ビームラインとスペクトロメータの光学条件をうまく整合させることで、ビーム粒子は測定せずに、スペクトロメータ出口の最終焦点面での散乱粒子の位置を測定するだけで、高精度に励起エネルギーを測定できる手法が存在する。それは運動量分散整合法 [15, 16] と呼ばれる。

5.1 運動量分散整合法

線源でのビームパラメータを $x_0 = (x_0, \theta_0, \delta_0)$ 、標的における散乱前後のパラメータをそれぞれ $x_1 = (x_1, \theta_1, \delta_1)$ 、 $x_2 = (x_2, \theta_2, \delta_2)$ 、スペクトロメータの最終焦点面でのパラメータを $x_3 = (x_3, \theta_3, \delta_3)$ とする。

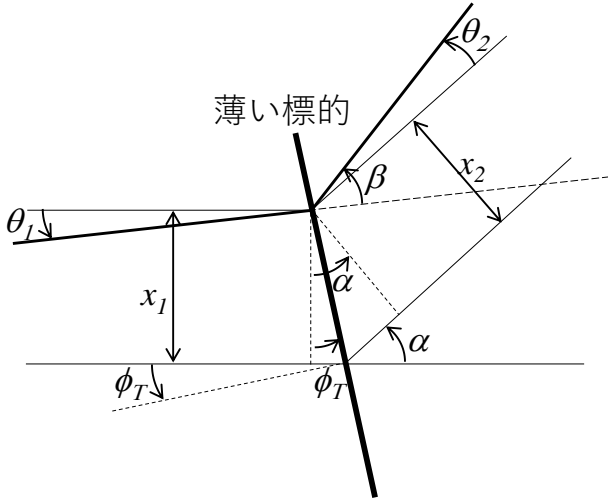


Fig. 18 標的前後のビームパラメータの関係。

ビームラインとスペクトロメータの輸送行列をそれぞれ

$$R_B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{26} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{26} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

とすると、

$$\mathbf{x}_1 = R_B \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_3 = R_S \mathbf{x}_2 \quad (5-2)$$

である。

薄い標的でビームが散乱されるとき、標的前後のビームパラメータの関係を図 18 に示す。中心軌道の標的に対する入射角と散乱角をそれぞれ ϕ_T 、 α とすると、図より、

$$\frac{x_1}{\cos \phi_T} = \frac{x_2}{\cos(\alpha - \phi_T)} \quad (5-3)$$

である。個々の粒子の絶対散乱角 β は

$$\beta = \alpha + \theta_2 - \theta_1 \quad (5-4)$$

であるので、散乱角 α に対する相対散乱角 θ は

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \beta - \alpha \quad (5-5)$$

で与えられる。従って、散乱による標的核の励起エネルギーを Q とすると、散乱後のビームパラ

メータは、

$$x_2 = \mathcal{T} x_1 \quad (5-6)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta \quad (5-7)$$

$$\delta_2 = \mathcal{K} \theta + \mathcal{D} Q + \mathcal{C} \delta_0 \quad (5-8)$$

と書ける。ここで、

$$\mathcal{T} = \frac{\cos(\alpha - \phi_T)}{\cos \alpha} \quad (5-9)$$

である。 \mathcal{K} 、 \mathcal{D} 、 \mathcal{C} はそれぞれ θ 、 Q 、 $\delta_0 (= \delta_1)$ に対する δ_2 の変化量を表し、ビーム運動量 p_{beam} と散乱運動量 p_{scat} から次のように求められる。

$$\mathcal{K} = \frac{\partial \delta_2}{\partial \theta} = \frac{1}{p_{scat}} \frac{\partial p_{scat}}{\partial \theta} \quad (5-10)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \delta_2}{\partial Q} = \frac{1}{p_{scat}} \frac{\partial p_{scat}}{\partial Q} \quad (5-11)$$

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \delta_2}{\partial \delta_0} = \frac{p_{beam}}{p_{scat}} \frac{\partial p_{scat}}{\partial p_{beam}} \quad (5-12)$$

以上から、最終焦点面での位置 x_3 は次のように書ける。

$$x_3 = \frac{\partial x_3}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta_0} \theta_0 + \frac{\partial x_3}{\partial \delta_0} \delta_0 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \theta + s_{16} \mathcal{D} Q \quad (5-13)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_0} = s_{11} b_{11} \mathcal{T} + s_{12} b_{21} \quad (5-14)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_0} = s_{11} b_{12} \mathcal{T} + s_{12} b_{22} \quad (5-15)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \delta_0} = s_{11} b_{16} \mathcal{T} + s_{12} b_{26} + s_{16} \mathcal{C} \quad (5-16)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta} = s_{12} + s_{16} \mathcal{K} \quad (5-17)$$

$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_0}$ 、 $\frac{\partial x_3}{\partial \delta_0}$ 、 $\frac{\partial x_3}{\partial \theta}$ が全て 0 になるように調整した時に x_3 の像が最小となり、最良の分解能が得られる。これが分散整合条件である。この時、焦点位置は励起エネルギー Q に比例してシフトし、一次のオーダーでの分解能は $\frac{\partial x_3}{\partial x_0} x_0$ で与えられる。焦点面での位置スペクトルがそのまま励起エネルギースペクトルとなるため、ビームの情報を測定する必要がなく、個々のビーム粒子を測定することが困難になるような大強度のビームを使用することができる。分解能が x_0 に比例するので、生

成標的での水平方向のビーム幅をできるだけ小さくすることが望ましい。

散乱角 $\alpha = 0^\circ$ の時、 $\mathcal{K} = 0$ 、 $\mathcal{T} = 1$ となるので、上記の整合条件は、 $\det R_S = 1$ より s_{11} と s_{12} が同時には 0 にできないことに注意すると、

$$s_{12} = 0 \quad (5-18)$$

$$b_{12} = 0 \quad (5-19)$$

$$b_{16} = -C \frac{s_{16}}{s_{11}} \quad (5-20)$$

となる。つまり、スペクトロメータにおける標的から最終焦点面までの point-to-point focus、ビームラインにおける線源から標的までの point-to-point focus、そして、ビームラインの運動量分散とスペクトロメータの運動量分散及び像倍率との整合と、非常に単純で直感的となる。

5.2 HIHR ビームライン

運動量分散整合法は、これまで一次ビームを用いる実験で使われてきた。HIHR (High Intensity High Resolution) ビームラインは、それを二次中間子ビームに適用しようという野心的なビームラインである。二次ビームという意味では、重イオンビームから生成された不安定核ビームに適用した理研 RIBF の SHARQA [17] があるが、中間子ビームに適用するのはこれまでに例がない。

図 19 と図 20 に HIHR ビームラインのレイアウトとエンベロープを示す。HIHR は、もともと独立した二次ビームラインとして設計されていたが、ハドロン拡張計画の建設費を圧縮するために、上流部を K10 ビームラインと共有するように変更された。共有部は基本的により運動量の高い K10 に合わせているため、標的からの取り出し角度は 3° に設定されている。HIHR は大きく 3 つの区間から成る。すなわち、T2 標的で生成された二次粒子を取り出す上流部、二次粒子を分別すると共に水平方向に分散なしで収束させる中流部、そして、大きな分散を持たせて標的へ収束させる下流部である。標的から取り出されたビームは、複数の偏

向電磁石によって一次ビームラインから切り離されつつ、K1.1BR や K10 と同様、中間像スリット (IF) の位置で鉛直方向に収束される ($R_{34} = 0$)。その後、長さ 6 m の磁場分離型静電セパレータとマススリット (MS) によって粒子を分別される ($R_{34} = 0$) とともに、マススリット下流の水平スリット AF の位置で水平方向に分散なしで収束される ($R_{12} = R_{16} = R_{26} = 0$)。そして、偏向角 90° の大型偏向電磁石 D6 によって $R_{16} = -10 \text{ cm}/\%$ もの大きな運動量分散を持って実験標的 (TARG) に収束している ($R_{12} = R_{34} = 0$)。標的で散乱された粒子は、偏向電磁石 2 台、四極電磁石 2 台、六極電磁石 1 台、多重極電磁石 1 台で構成された散乱スペクトロメータによって最終焦点面に結像する (分散整合条件)。

HIHR ビームラインで得られると予想される ^{208}Pb ハイパー核の Λ 束縛エネルギースペクトル (シミュレーション) と過去の実験で得られたスペクトルとの比較を図 21 に示す。これまでは分離できていなかった細かな構造が、運動量分散法によって測定できると期待される。

6 終わりに

以上、J-PARC ハドロン実験施設にある、もしくは建設が計画されている荷電二次ビームラインについて、特徴と設計の詳細を紹介した。二次ビームラインの種類が多いため、そのすべてを詳しく解説することは出来なかったが、このような多彩な二次ビームを用いることで、クォークのレベルから、ハドロン、原子核と、物質の様々な層の物理を一つの施設内で実験的に研究できることが、世界的に見てもハドロン実験施設のユニークな特徴であり、大きな強みである。この特徴をさらに強化し、より多くの物理成果を生み出すために、ハドロン拡張計画を是非実現させたいと思っている。

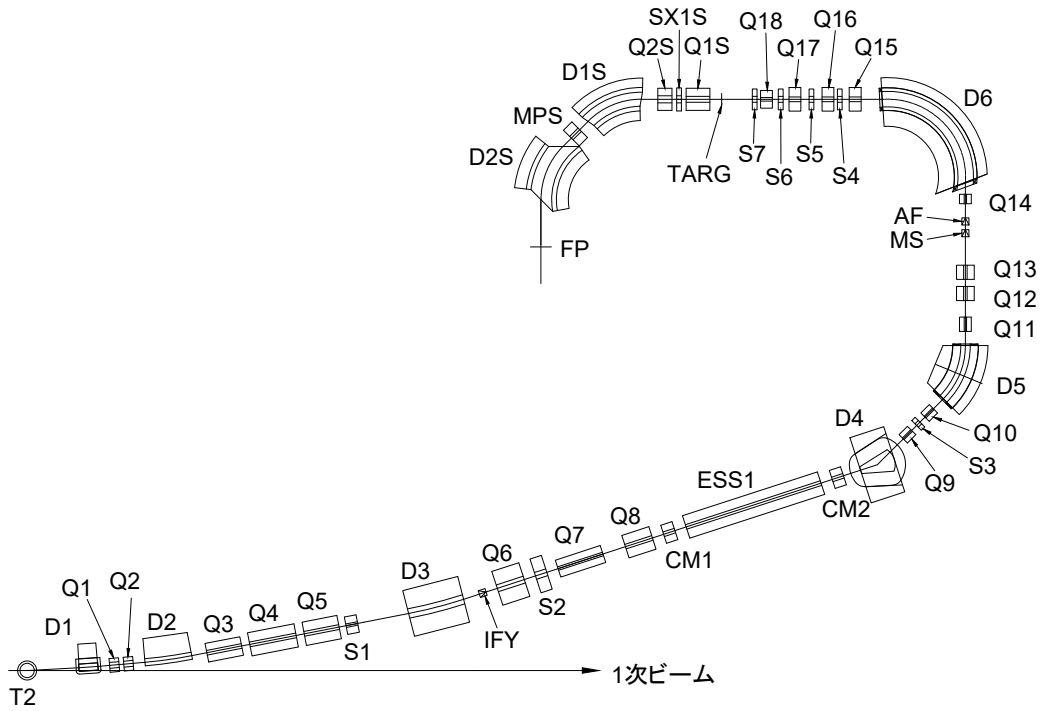


Fig. 19 HIHR ビームラインのレイアウト。

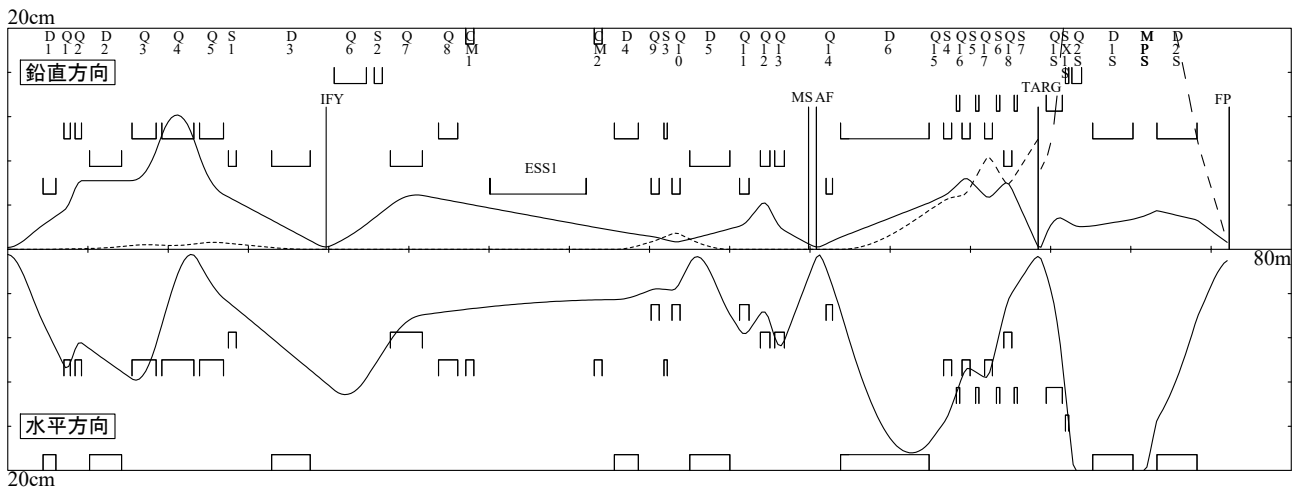


Fig. 20 HIHR ビームラインの1次のビームエンベロープ。上半分は鉛直方向、下半分が水平方向のエンベロープで、点線は運動量分散を表す。

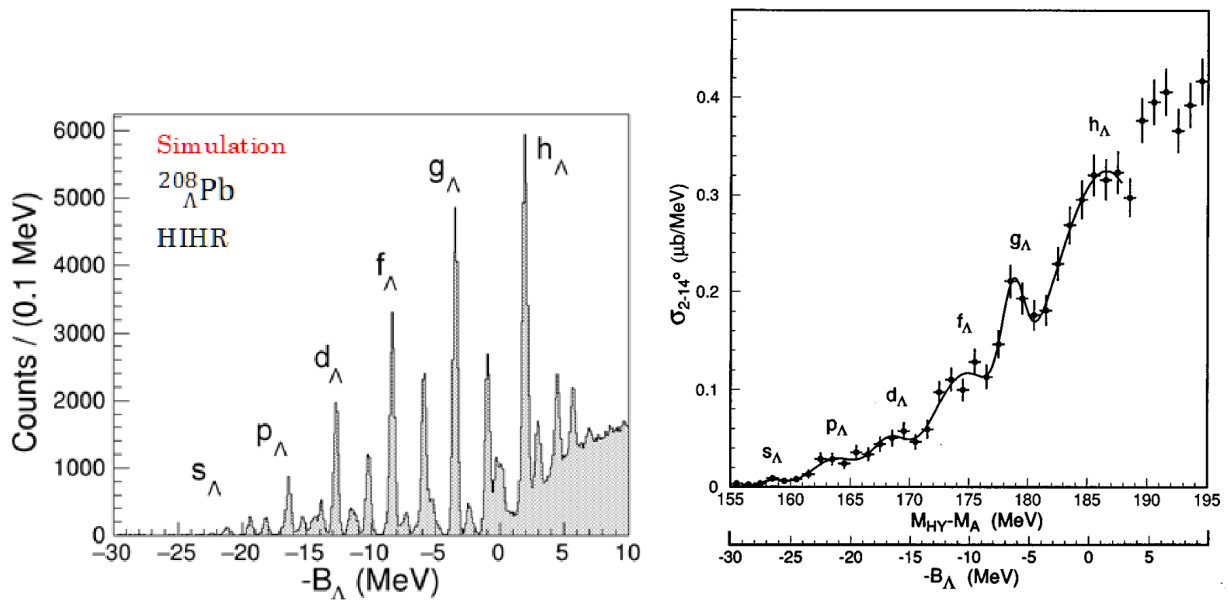


Fig. 21 HIHR ビームラインで予想される $^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$ ハイパー核の Λ 束縛エネルギースペクトル (シミュレーション) [5](左) と過去の実験で得られたスペクトル [18](右)。

A ビーム光学の基礎

ビーム光学についての詳しい内容は、本加速器セミナー OHO シリーズの過去のテキストでも何回か解説されている [19] ので、ここでは、本講義の議論で参照する箇所だけを掻い摘んで簡単に説明する。

A.1 輸送行列

ビームラインを通過する粒子の運動は、中心となる軌道軸と運動量を基準として、そこからのズレの大きさをパラメータとして記述するのが便利である。すなわち、中心軌道軸に垂直な方向の位置 x と角度 θ 、そして中心運動量 p からのズレの割合 $\delta = \Delta p/p$ で表す。あるビームライン要素を通過した前後でこれらのパラメータが $(x_0, \theta_0, \delta_0) \rightarrow (x_1, \theta_1, \delta_1)$ と変化した時、両者の間の関係は、

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_0 + S_1 \theta_0 + D_1 \delta_0 + (\text{高次項}) \\ \theta_1 = C_2 x_0 + S_2 \theta_0 + D_2 \delta_0 + (\text{高次項}) \\ \delta_1 = C_3 x_0 + S_3 \theta_0 + D_3 \delta_0 + (\text{高次項}) \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

と書ける。1 次の項だけを抜き出せば、上の式は、粒子のパラメータをベクトル $x = (x, \theta, \delta)$ として、次のような行列の形で書き表せる。

$$x_1 = R x_0, \quad R = \begin{pmatrix} C_1 & S_1 & D_1 \\ C_2 & S_2 & D_2 \\ C_3 & S_3 & D_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

この R を輸送行列と呼ぶ。静磁場のみで構成される通常のビームラインでは、粒子の運動量は変化しないので、 $C_3 = S_3 = 0$ 、 $D_3 = 1$ であり、行列式は 1 となる。

$$\det R = C_1 S_2 - S_1 C_2 = 1 \quad (\text{A-3})$$

また、位置と角度の運動量依存性を示す係数 D_1 、 D_2 をそれぞれ運動量分散、角分散と呼ぶ。

より一般には、軌道軸に垂直な方向は水平方向と鉛直方向の 2 つあるので、先の x を水平方向として、鉛直方向の位置 y と角度 ϕ が独立パラメータとして加わる。さらに、軌道軸方向の位置ずれ (中心軌道との軌道長の差) ℓ も追加して、合計 6 パラメータのベクトル

$$x = (x, \theta, y, \phi, \ell, \delta) \quad (\text{A-4})$$

で記述する。この時、輸送行列は 6×6 行列となる。

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{61} & R_{62} & \dots & R_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

ビームラインの光学を設計する際は、上記の輸送行列要素が、収束とか平行とかの要求に対応した値になるように拘束条件をつけて、磁場の強度やドリフト距離などを決定する。具体的な拘束条件の例を以下に挙げる。

$$\underline{R_{12} = 0}$$

初期位置 $x_0 = 0$ から発した粒子は、初期角度 θ_0 に依らず位置 $x_1 = 0$ に収束する。従って、これは point-to-point フォーカスを意味する。この時、 R_{11} が像倍率、 R_{22} が角倍率を表す。

$$\underline{R_{22} = 0}$$

初期位置 $x_0 = 0$ から発した粒子は、初期角度 θ_0 に依らず角度 $\theta_1 = 0$ になる。従って、これは point-to-parallel を意味する。

$$\underline{R_{11} = 0}$$

初期角度 $\theta_0 = 0$ で発せられた粒子は、初期位置 x_0 に依らず位置 $x_1 = 0$ に収束する。従って、これは parallel-to-point フォーカスを意味する。

$$\underline{R_{21} = 0}$$

初期角度 $\theta_0 = 0$ で発せられた粒子は、初期位置 x_0 に依らず角度 $\theta_1 = 0$ になる。従って、これは parallel-to-parallel を意味する。

$$\underline{R_{16} = 0 \text{ かつ } R_{26} = 0}$$

位置 x_1 も角度 θ_1 も運動量 δ_0 に依存しない。このようなビームを achromatic (無色な、色収差のない) と言う。

$$\underline{R_{12} = 0 \text{ かつ } R_{16} \neq 0}$$

point-to-point フォーカスだが、ビーム位置 x_1 が運動量 δ_0 に依存する。これを dispersive focus と呼び、このような地点で各ビーム粒子の位置を測定することでその粒子の運動量を測ることができる。

上記の添え字 1、2 をそれぞれ 3、4 に置き換えれば、鉛直方向における拘束条件になる。

実際のビームライン設計の手順としては、まず各ビームライン要素の並びから輸送行列を計算し、上記のような拘束条件を付けてフィットして、磁場強度等を決定する。その次に、線源でのサイズや角度の分布を想定してビーム粒子をランダムに発生させ、その軌道を 1 粒子毎にシミュレート (ray trace) して、ビームラインのアクセプタンスや、ユーザーの実験標的におけるビームサイズ等を計算する。前者の輸送行列のフィットを行う計算コードの例としては TRANSPORT [20] があり、後者の ray trace のコードの例としては TURTLE [21] がある。TRANSPORT は 2 次まで、TURTLE は 3 次までの輸送行列をサポートしている。

さて、具体的な輸送行列の例を見ていこう。簡単のために、ここでは水平方向の位置と角度だけの 2×2 行列を考える。

磁場の無いドリフト区間では、初期角度は変化を受けずに、その初期角度と区間長さ L の分だけ位置が変化するため、その輸送行列は、

$$R_{\text{drift}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

である。

焦点距離 f の薄いレンズ (四極磁石) は、Fig. 22 において (θ_1 の符号が θ_0 の逆になることに注意)

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ x_0 = a\theta_0 \\ x_1 = -b\theta_1 \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

だから、 $\theta_0 - \theta_1 = (1/a + 1/b)x_0$ なので、ガウスの結像公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (\text{A-8})$$

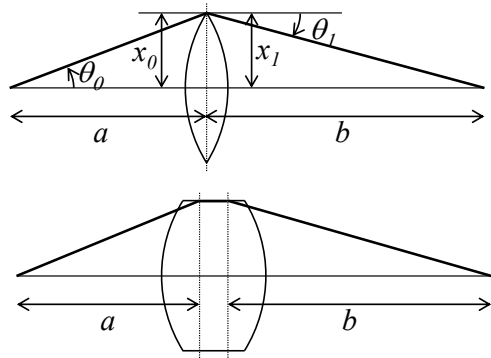


Fig. 22 薄いレンズ (上) と厚いレンズ (下) の光学の模式図。a、b を主面 (縦の点線) からの距離に取れば、厚いレンズでもガウスの結像公式 (A-8) は成り立つ。

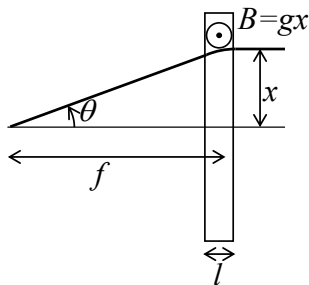


Fig. 23 四極磁場によるレンズの模式図。

を用いると

$$R_{\text{lens}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-9})$$

である。電荷 e 、運動量 p と磁場 B との関係は、回転軌道半径を r 、軌道長を l 、回転角を θ として、

$$p = eBr, \quad r = l/\theta \quad (\text{A-10})$$

である[‡]から、磁場勾配が g の四極電磁石の焦点距離 f は、Fig. 23 から、

$$f = \frac{x}{\theta} = \frac{xp}{eBl} = \frac{p}{egl} \quad (\text{A-11})$$

で与えられる。ただし、ここで θ と l は十分に小さいとした。例えば、磁極の内接円半径が 0.1 m、磁場の有効長が 0.5 m の四極電磁石があって、その磁極面での磁場強度が 1 T である時、 $g = 1/0.1 = 10$ T/m であるから、運動量 $p = 1.8$ GeV/c、電荷 1 の粒子に対する焦点距離は、 $p/e = (1.8 \times 10^9)/(3 \times 10^8) = 6$ Tm より $f = 1.2$ m となる。運動量が $p = 30.9$ GeV/c なら、 $f = 20.6$ m になる。

A.2 輸送行列の組み合わせ

式 (A-2) から明らかなように、ビームライン要素 1、2、... で構成される区間の輸送行列は、各要素の輸送行列 R_1, R_2, \dots の積で求められる。

$$R = \dots R_2 R_1 \quad (\text{A-12})$$

ただし、積の順番に注意すること。この、ビームライン要素の連なりが個々の輸送行列の積として計算できるという点が、輸送行列による記述の最大の利点である。

輸送行列の組み合わせの例を考えてみよう。簡単のために位置と角度の 2×2 行列だけを考える。

[‡] $p/e = Br$ は静磁場中での粒子の曲がりにくさを表すので、磁気剛性率 (magnetic rigidity) と呼ばれる。

薄いレンズの前に長さ a のドリフト空間を付け加えた輸送行列は、

$$\begin{aligned} R &= R_{\text{lens}}(f) R_{\text{drift}}(a) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1/f & 1 - a/f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

となる。ここで $a = f$ とおくと、

$$R = \begin{pmatrix} 1 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-14})$$

となり、 $R_{22} = 0$ 、すなわち point-to-parallel の輸送になる。まさに焦点距離の定義そのものである。逆に、薄いレンズの後に長さ b のドリフト空間を付け加えた輸送行列は、

$$\begin{aligned} R &= R_{\text{drift}}(b) R_{\text{lens}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - b/f & b \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

であり、 $b = f$ とおけば、

$$R = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-16})$$

となり、 $R_{11} = 0$ 、すなわち parallel-to-point の輸送になる。さらに、レンズの前に長さ a のドリフト空間、後に長さ b のドリフト空間を合わせた場合の輸送行列は、

$$\begin{aligned} R &= R_{\text{drift}}(b) R_{\text{lens}}(f) R_{\text{drift}}(a) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - b/f & a + b - ab/f \\ -1/f & 1 - a/f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

となる。ここで a, b が式 (A-8) を満たすとすると、

$$R = \begin{pmatrix} -b/a & 0 \\ -1/f & -a/b \end{pmatrix} \quad (\text{A-18})$$

となる。 $R_{12} = 0$ なので、これは point-to-point フォーカスを意味する。この時、像倍率は $R_{11} = -b/a$ 、角倍率は $R_{22} = -a/b$ であり、これらが負となっているのは像が反転することを意味する。これも、良く知られた凸レンズの性質である。

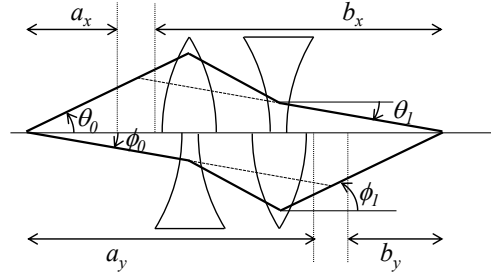


Fig. 24 四極電磁石ダブレットによるビーム収束の模式図。

A.3 四極電磁石の使い方

よく知られるように、光学レンズと違って、四極磁石によるレンズの機能は、直交する2つ（通常は水平方向と鉛直方向）の平面同士で逆になる。つまり、水平方向に収束（凸レンズ）する場合は鉛直方向に発散（凹レンズ）する。従って、両方向ともビームを収束させるには、複数の四極磁石を組み合わせる必要がある。

焦点距離 f_1, f_2 の2枚のレンズを距離 d だけ離して並べた時、合成レンズの焦点距離 f は、次のレンズの組み合わせの公式で与えられる。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (\text{A-19})$$

ここで $f_2 = -f_1$ の時 $f = f_1^2/d > 0$ となるので、凸レンズと凹レンズの組み合わせで凸レンズを作ることが可能である。このような、2台の四極磁石の連なり（ダブレット）によるビーム収束の模式図を Fig. 24 に示す。水平方向と鉛直方向とで、収束と発散の順番は逆でも、どちらも同時に収束させることが可能である。ただし注意が必要なのは、図で明らかなように、水平方向と垂直方向とで像倍率 $-b_x/a_x, -b_y/a_y$ と角倍率 $-a_x/b_x = \theta_1/\theta_0, -a_y/b_y = \phi_1/\phi_0$ が異なることである。そのため、ダブレットにより収束した像は、元の像に比べて、例えば水平方向にサイズが小さくなった場合には鉛直方向には逆に大きくなる。これが1次の像歪み（first-order image distortion）である。

四極磁石を3台並べた場合（トリプレット）には状況が異なる。この場合は、Fig. 25 に示した

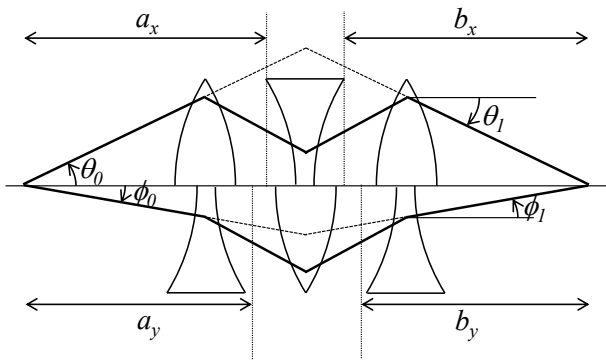


Fig. 25 四極電磁石トリプレットによるビーム収束の模式図。

ように、水平方向と垂直方向の像倍率をどちらも -1 にすることができる。

参考文献

- [1] K. Agari *et al.*, “Primary proton beam line at the J-PARC hadron experimental facility”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2012** (2012) 02B008-1-19.
- [2] K. Agari *et al.*, “Secondary charged beam lines at the J-PARC hadron experimental hall”, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2012** (2012) 02B009-1-16.
- [3] 高橋仁, “二次粒子生成標的と二次ビームライン”, 高エネルギー加速器セミナー OHO’18 (2018).
- [4] ハドロン実験施設拡張検討委員会, “J-PARC ハドロン実験施設の拡張計画”, 2016, <http://www.rcnp.osaka-u.ac.jp/~jparchua/share/WhitePaperJ160827.pdf>
- [5] Taskforce on the extension of the Hadron Experimental Facility, “Extension of the J-PARC Hadron Experimental Facility: Third White Paper”, (2021) arXiv:2110.04462 [nucl-ex].
- [6] G.Y. Lim, “HD 中性二次ビームライン”, 高エネルギー加速器セミナー OHO’23 (2023).
- [7] R. Muto *et al.*, “Development of Lambertson Magnet and Septum Magnets for Splitting 30-GeV Proton Beam in Hadron Experimental Facility at J-PARC”, *IEEE Trans. Applied Supercond.* **26** (2016) 0603904.
- [8] J.R. Sanford and C.L. Wang, “Empirical formulas for particle production in p-Be collision between 10 and 35 BeV/c”, BNL internal reports No.11299 and 11479 (1967).
- [9] C.L. Wang, “Empirical formula for inclusive proton spectra between 10 and 300 GeV”, BNL internal reports No.22610.
- [10] A. Yamamoto, KEK Reports 81-13 (1981).
- [11] A. Yamamoto, A. Maki and A. Kusumegi, *Nucl. Instr. and Meth.* **148** (1978) pp.203-207.
- [12] M. Ieiri *et al.*, “Electrostatic separators in the hadron experimental facility at J-PARC”, *Nucl. Instr. and Meth.* **B317** (2013) pp.338-341.
- [13] P. Bernard, P. Lazeyras, H. Lengeler and V. Vaghin, “Particle separation with two- and three-cavity RF separators at CERN”, *CERN Reports* 68-29 (1968).
- [14] Ph. Bernard, H. Lengeler and J.Cl. Prelaz, “Some New Possibilities for RF-Separation at CERN”, eConf C710920 (1971) pp.269-271.
- [15] B.O. Sjögren, “COMBINATION OF MAGNETIC ANALYZERS IN NUCLEAR REACTION EXPERIMENTS”, *Nucl. Instr. and Meth.* **7** (1960) pp.76-88.
- [16] Y. Fujita *et al.*, “Matching of a beam line and a spectrometer -New beam line project at RCNP-”, *Nucl. Instr. and Meth.* **B126** (1997) pp.274-278.
- [17] T. Kawabata *et al.*, “High resolution beam line for the SHARAQ spectrometer”, *Nucl. Instr. and Meth.* **B266** (2008) pp.4201-4204.
- [18] T. Hasegawa *et al.*, “Spectroscopic study of $^{10}_{\Lambda}\text{B}$, $^{12}_{\Lambda}\text{C}$, $^{28}_{\Lambda}\text{Si}$, $^{89}_{\Lambda}\text{Y}$, $^{139}_{\Lambda}\text{La}$, and $^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$ by the (π^+, K^+) reaction”, *Phys. Rev. C* **53** (1996) pp.1210-1220.
- [19] 例えば、佐藤康太郎, “ビーム輸送の物理”, 高エネルギー加速器セミナー OHO’07 (2007).
- [20] http://aea.web.psi.ch/Urs_Rohrer/MyWeb/trans.htm
- [21] http://aea.web.psi.ch/Urs_Rohrer/MyWeb/turtle.htm