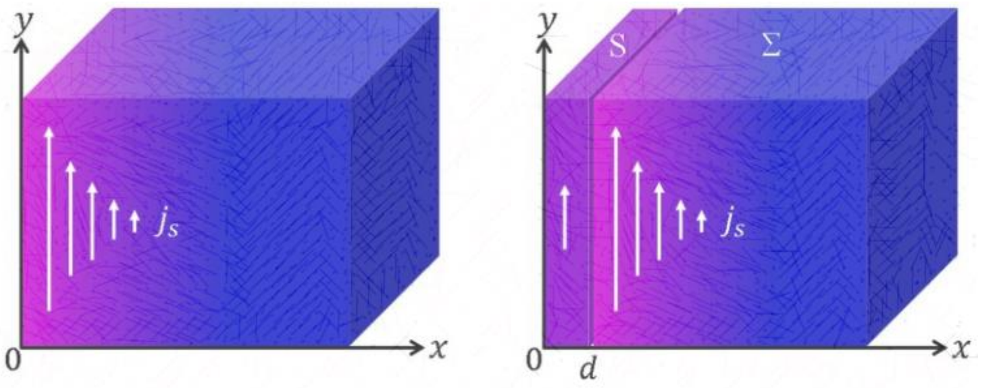
OHO2024

超伝導加速空洞における
積層薄膜技術の原理と最前線

KEK iCASA
久保 毅幸
くぼ　たかゆき



1. はじめに

積層薄膜構造は、

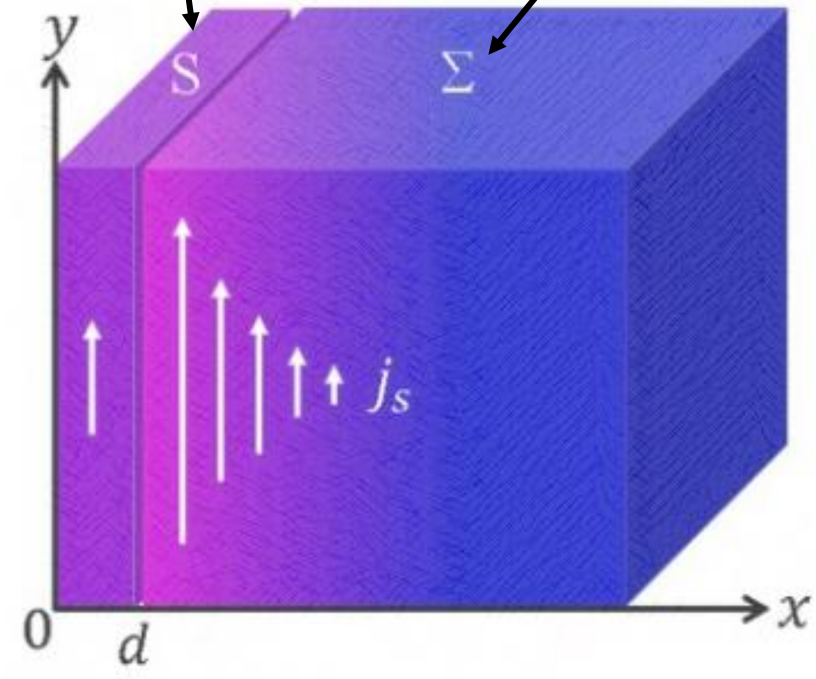
- 土台となる**バルクの超伝導体(Σ)**の上に
- 10 nm程度の**薄い絶縁層（I）**を挟んで
- 100 nm程度の厚みの**超伝導薄膜（S）**

を載せた構造 (SIΣ 構造)である。

超伝導加速空洞の内面にこの構造を導入することで加速性能の大幅な向上が可能になると期待されている。

Nb_3Sn, NbN, NbTiN, MgB_2 etc

Nb



1. はじめに

この講義では、積層薄膜構造のアイデアを「最短距離」で理解することを目指す。

- **超伝導の予備知識は要求しない。**

1. はじめに

この講義では、積層薄膜構造のアイデアを「最短距離」で理解することを目指す。

- **超伝導の予備知識は要求しない。**

- 積層薄膜構造の**エッセンスは、超伝導の最も初等的な理論、ロンドン理論だけで理解できる。**補足のため、BCS理論に基づくもう少し定量的な結果も同時に（天下り的に）与えるよう努める。

1. はじめに

この講義では、積層薄膜構造のアイデアを「最短距離」で理解することを目指す。

- **超伝導の予備知識は要求しない。**

- 積層薄膜構造の**エッセンスは、超伝導の最も初等的な理論、ロンドン理論だけで理解できる。**補足のため、BCS理論に基づくもう少し定量的な結果も同時に（天下り的に）与えるよう努める。

- 内容は、詰め込みすぎないよう絞り込んだ。代わりに、講義中、実際に手を動かして簡単な計算（ロンドン方程式を解いたり次元を確認したり）をしてもらう時間を作ります。**当てたりしないので安心して気楽にやって下さい！**

1. はじめに

- スライド左上に 補足 と書かれているページは**本講義のレベルを超えた詳細な計算を必要とする部分**なので、雰囲気だけ分かってもらえれば良いと思っています。

1. はじめに

- スライド左上に 補足 と書かれているページは**本講義のレベルを超えた詳細な計算を必要とする部分**なので、雰囲気だけ分かってもらえれば良いと思っています。

- 途中、英語ばかりのスライドが混じっているところがありますが、それらは、**2018年に北京で行った講義のスライドを貼り付けているところです。興味のある方は、ASSCA2018（@北京）の講義スライドも覗いてみて下さい**。積層薄膜の解説は行っていませんが、他の話題について詳しく解説しています。

もくじ

2.1 超伝導加速空洞

2.1 超伝導加速空洞

- 「**加速空洞**」：真空の容器に数百MHzから数GHz程度の電磁波を入れ、その電場成分を使って荷電粒子を加速する装置。

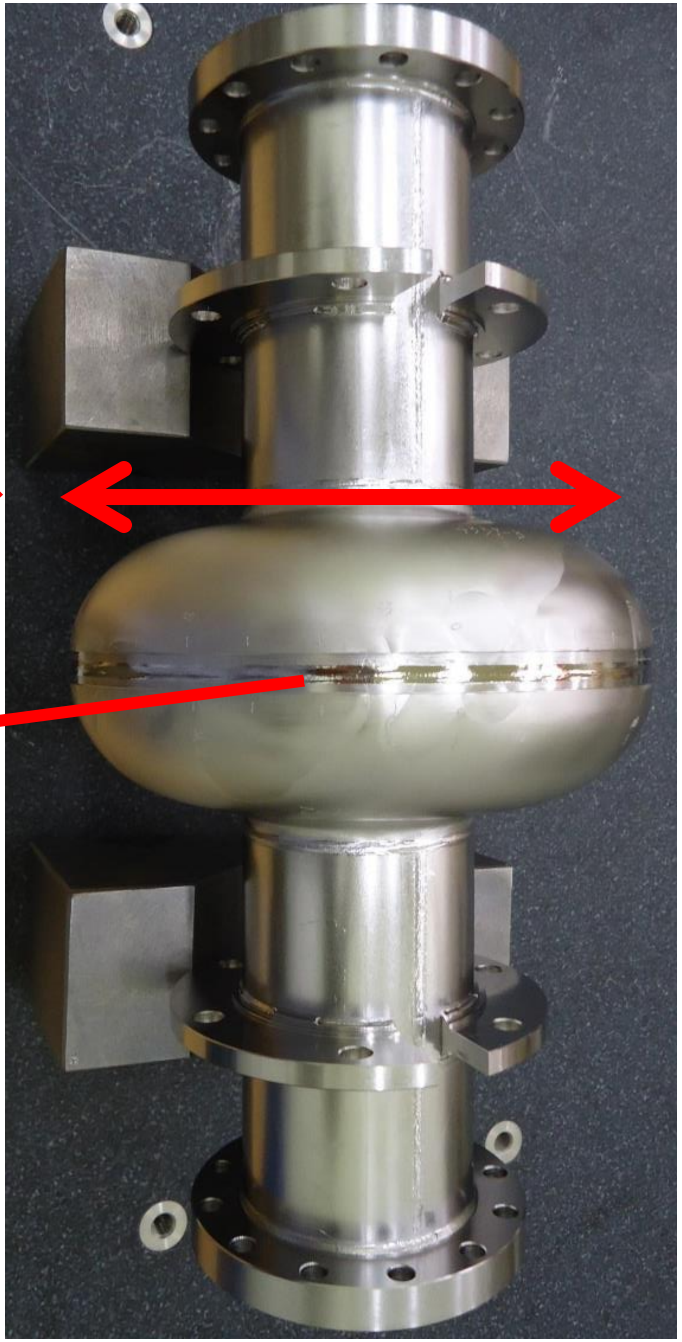
- 「**超伝導**」：詳しくは次章で説明する。当面の間は、物質が「超」を付けたくなる程に良い電気伝導率を示す現象だと思っておけば良い（直流では無限、マイクロ波など交流下では有限であるが、それでも数百MHzや数GHz程度であれば「超」を付けるに値する伝導率を示す）。

- 「**超伝導加速空洞**」:上の２つの言葉を組み合わせただけ。（少なくとも内壁が）超伝導を示す物質から作られた加速空洞のこと。

2.1 超伝導加速空洞

電子・陽電子加速用ニオブ製1.3GHz楕円空洞

約$20cm$



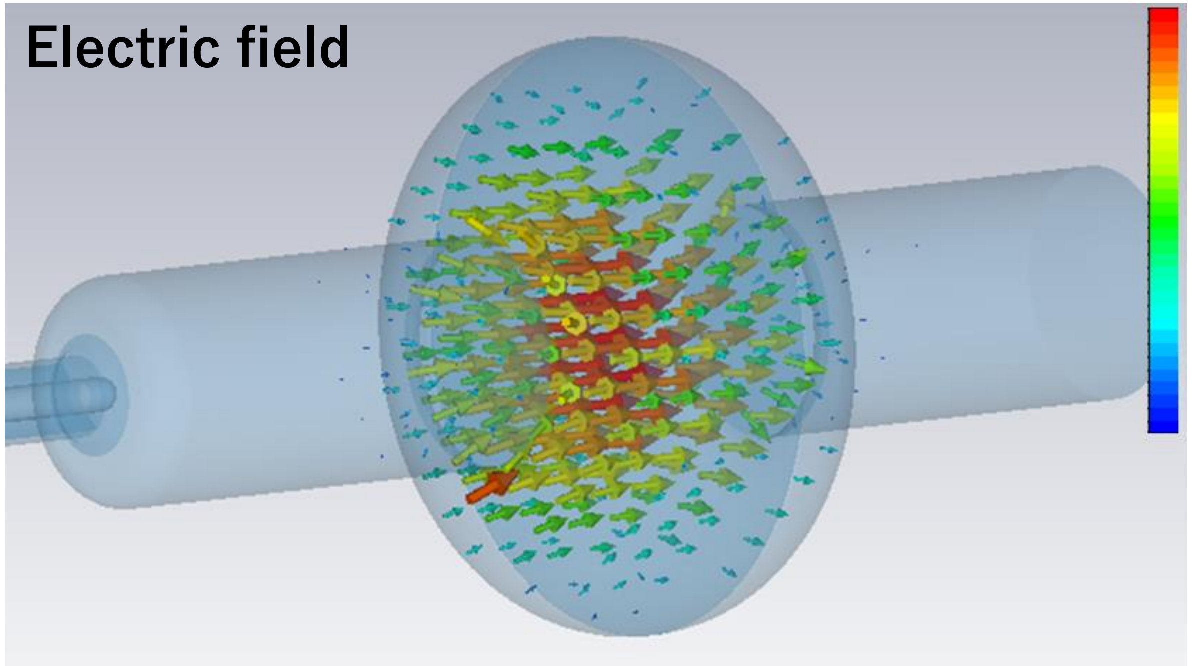
継ぎ目部分は
「赤道」
と呼ばれる

ビームパイプ

セル（楕円部分）

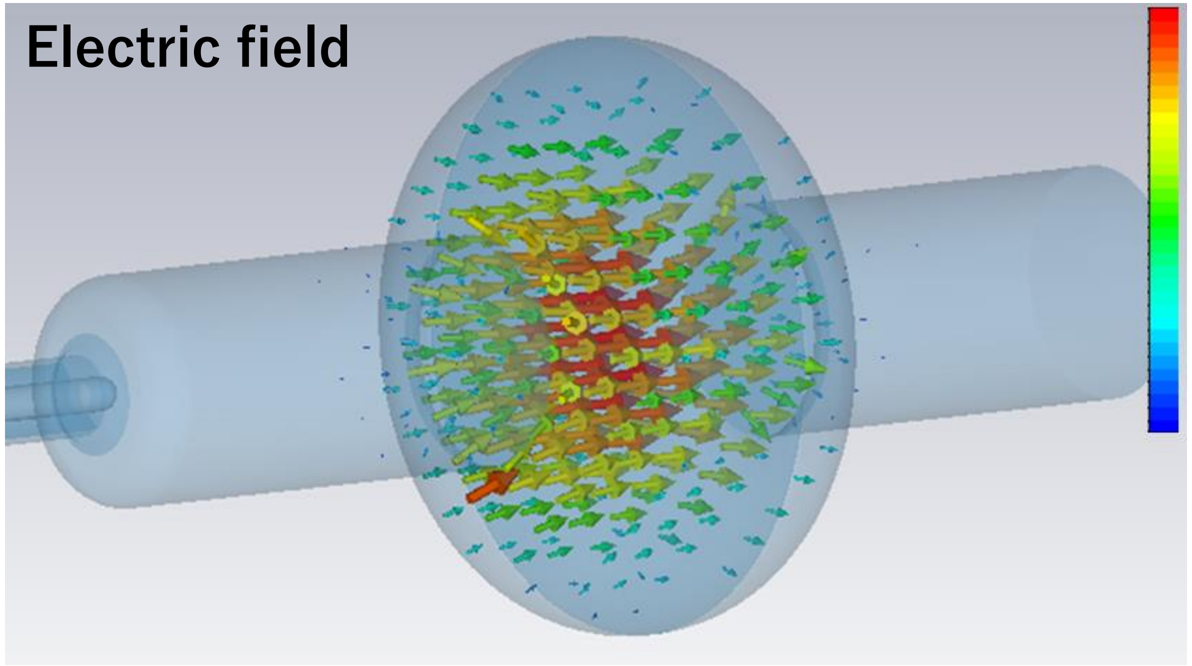
ビームパイプ

2.1 超伝導加速空洞



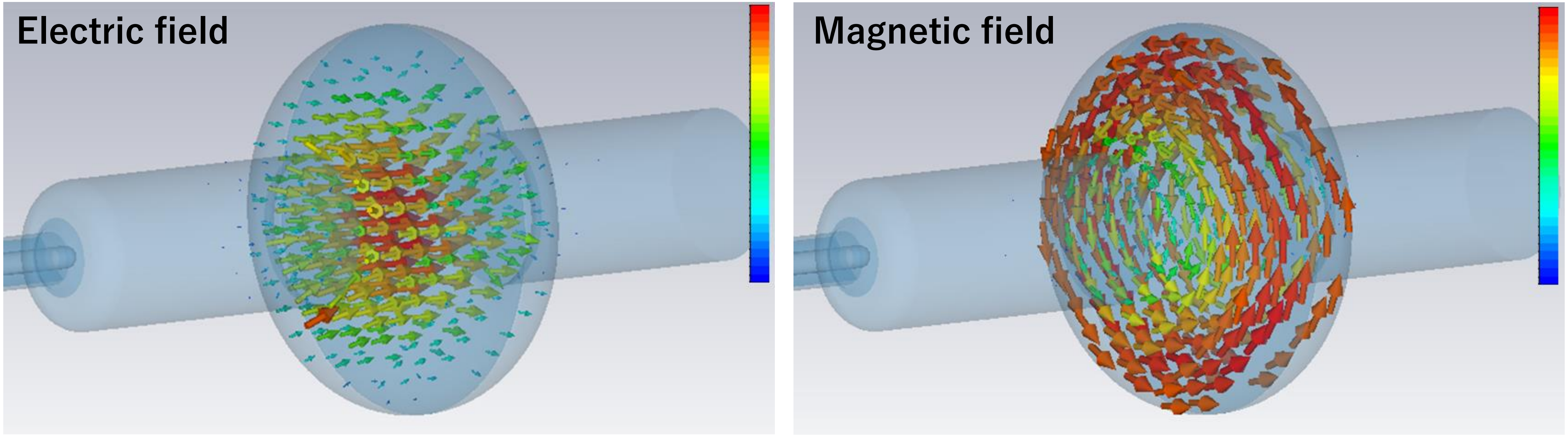
- 空洞の楕円部分に入ってきた電子は、軸方向の電場によって加速される

2.1 超伝導加速空洞



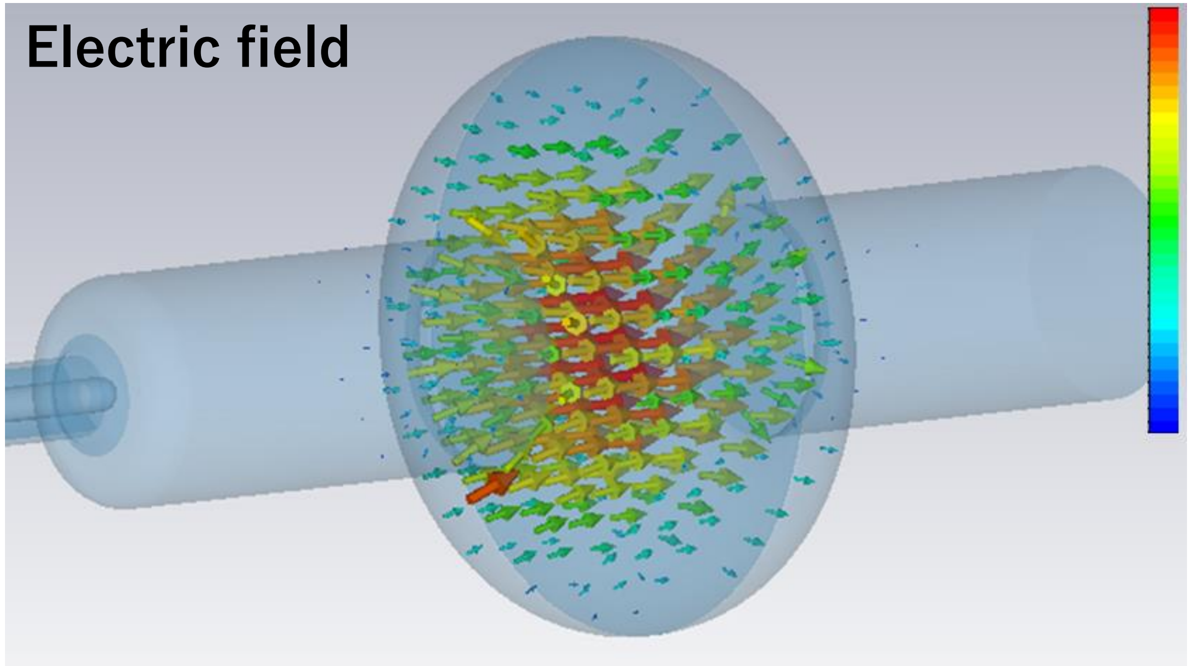
- 空洞の楕円部分に入ってきた電子は、軸方向の電場によって加速される
- 電子が楕円部分を通過する間に感じる平均電場を加速勾配(gradient)と呼び、$\boldsymbol{E_{acc}}$と書く。 $\boldsymbol{E_{acc}}$は<u>**空洞性能**を表すパラメーターの一つ</u>。

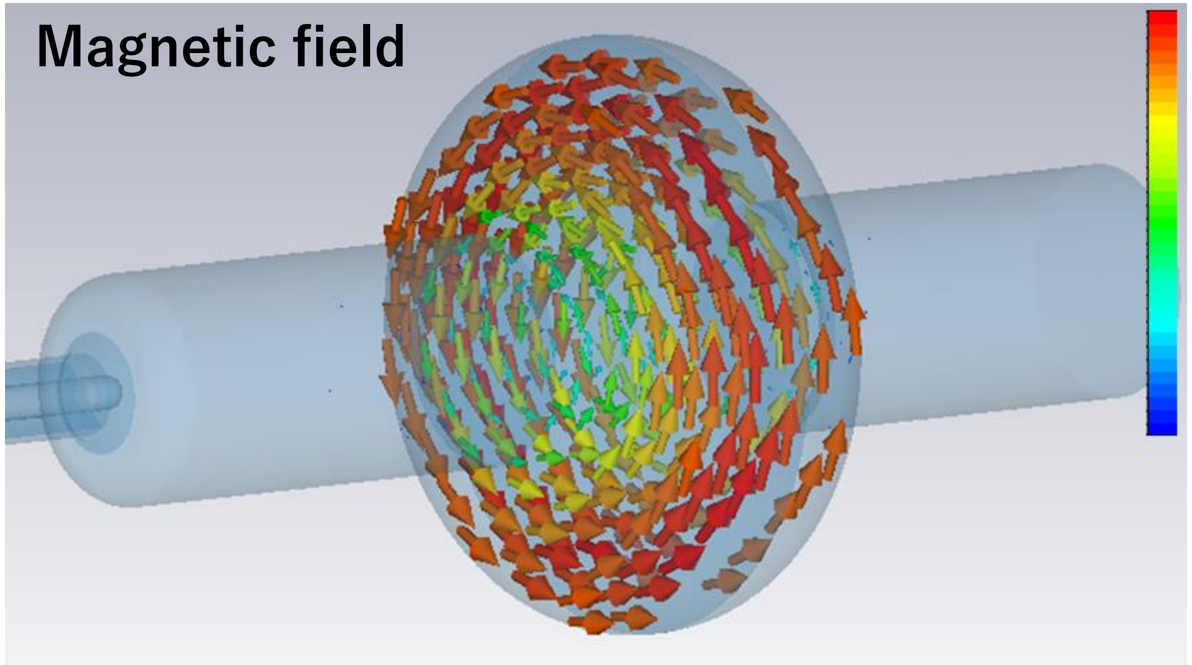
2.1 超伝導加速空洞



- 空洞の楕円部分に入ってきた電子は、軸方向の電場によって加速される
- 電子が楕円部分を通過する間に感じる平均電場を加速勾配(gradient)と呼び、$\boldsymbol{E_{acc}}$と書く。 $\boldsymbol{E_{acc}}$は**<u>空洞性能</u>**<u>を表すパラメータの一つ</u>。
- $\boldsymbol{E_{acc}}$ は内表面のマイクロ波磁場（右図）の振幅B_0に比例する。つまり、$\boldsymbol{B_0 = gE_{acc}}$。 ここで $\boldsymbol{g}$ は空洞の設計に依存して決まる定数 (e.g., g = 4.26mT/(MV/m) for Tesla形状）。だから、 E_{acc}の代わりに $\boldsymbol{B_0}$で空洞性能を表しても良い。

2.1 超伝導加速空洞



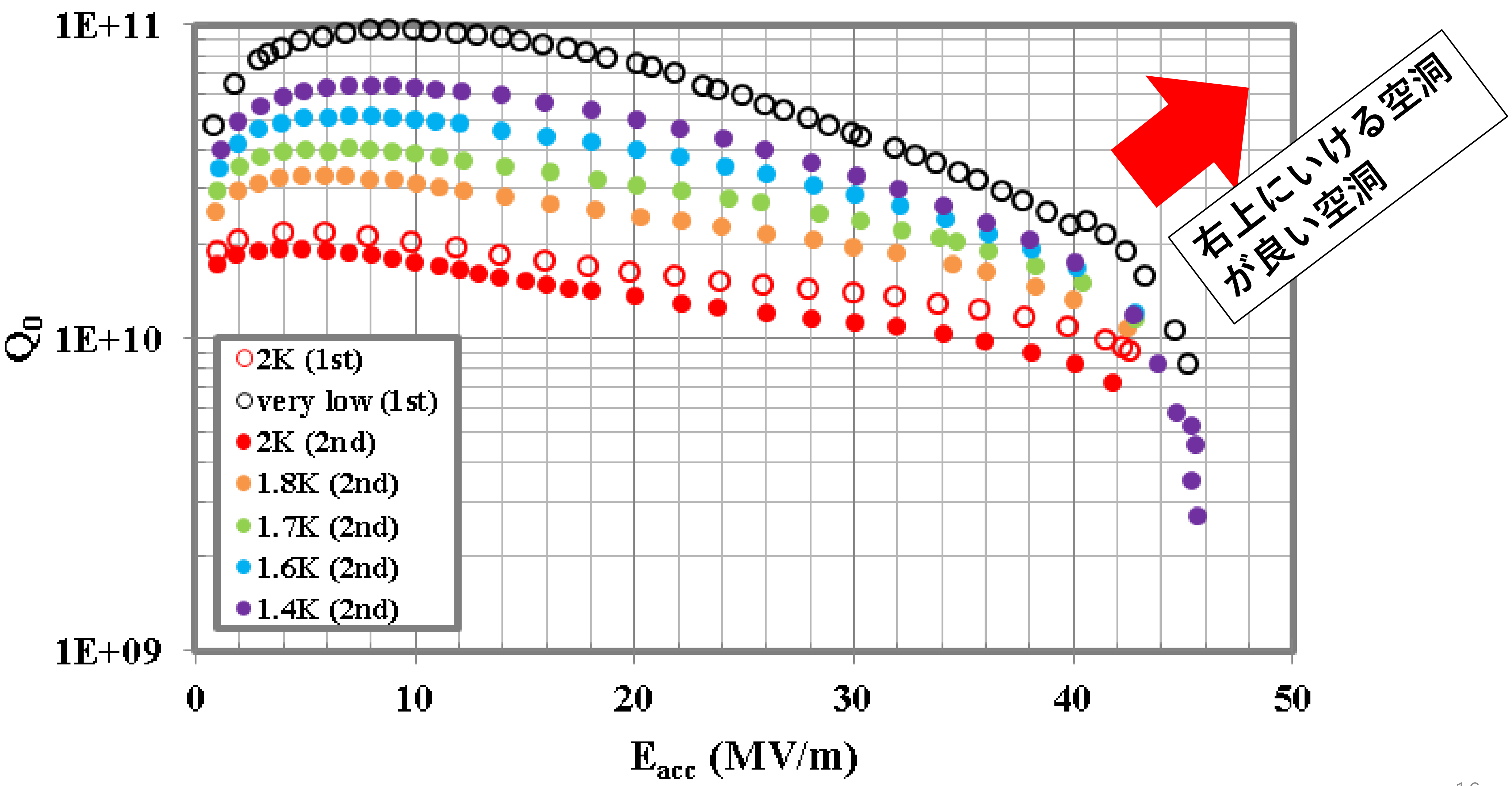


- もう一つの**空洞性能**を表す重要なパラメータは Q値
- 空洞に蓄えられているエネルギーとRF一周期あたりの損失の比

ただし、本講義の主要な話題ではない

2.1 超伝導加速空洞

空洞性能は、こういうプロットを作ることで良く分かる



2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

ILC recipe

- Materials
- ↓ Fabrication
- ↓ Electropolishing(1) (100-200μm)
- ↓ Annealing (750-900℃, 2-3hours)
- ↓ Electropolishing(2) (several μm)
- ↓ High pressure rinsing
- ↓ Assembling
- ↓ Low-temperature baking (100-140℃, 48hours)
- ↓ Test cavity

ここでは高加速勾配を得る代表的な処理方法である

ILCレシピ

だけを紹介する。

*1990*年代に出来上がった処理手順である

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

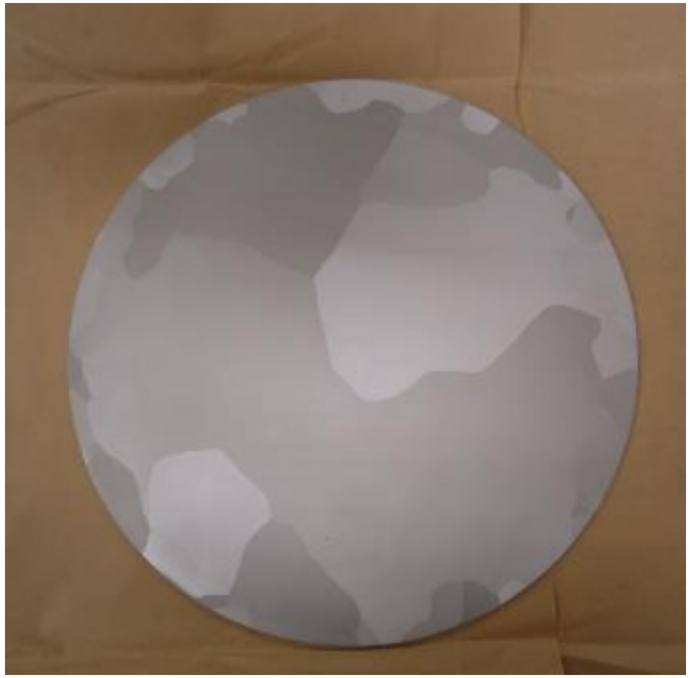
Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

Test cavity



Nb材を購入

See also articles written by Nb vendors (in Japanese)
H. Umezawa, 低温工学, **52**, 79,(2017)
T. Nagata, 低温工学, **52**, 85,(2017)

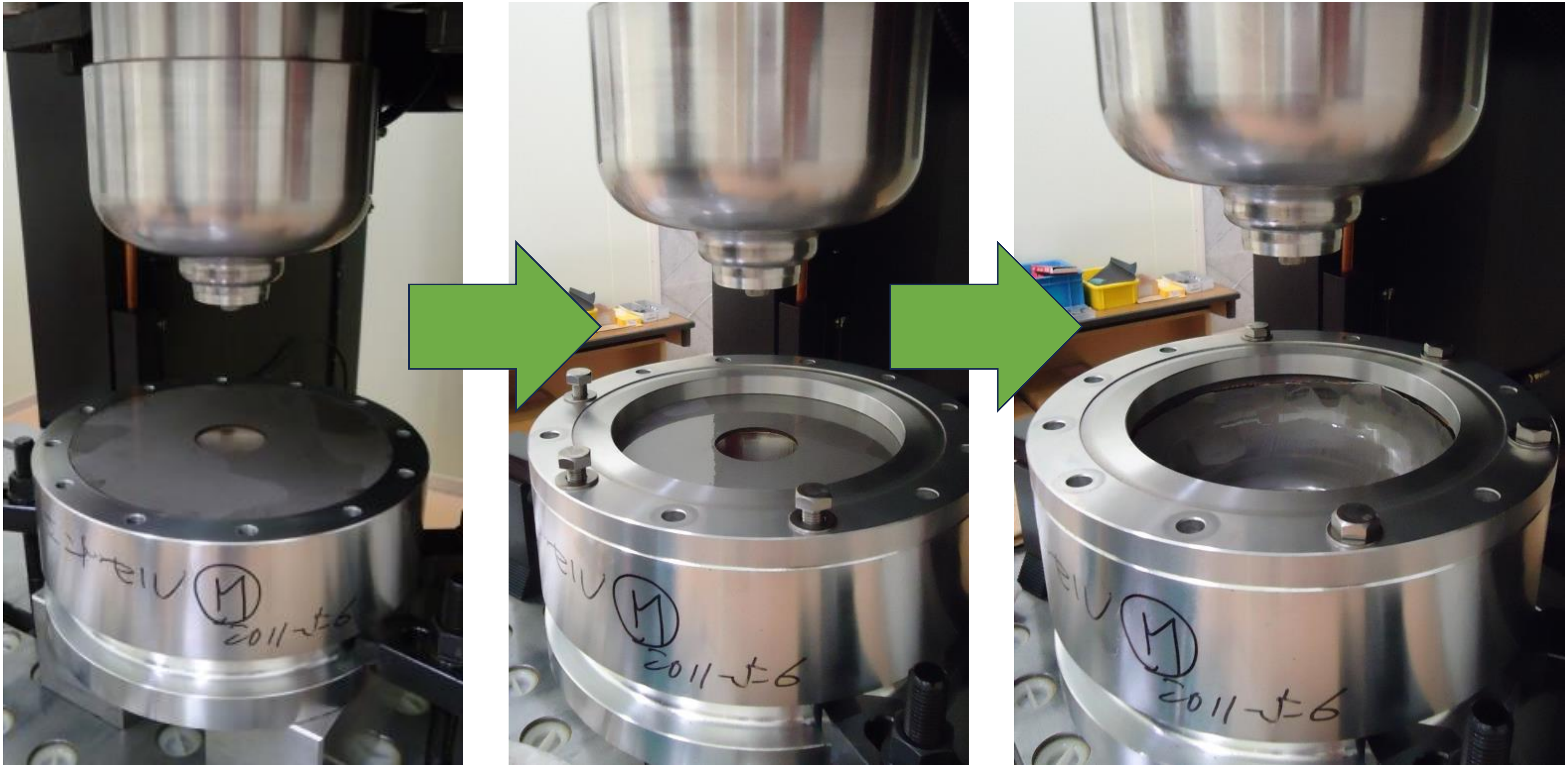
2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

高純度ニオブの円板

穴をあけてドーナツ状にする

2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

ドーナツ状の円板をプレスして、お椀にする



2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

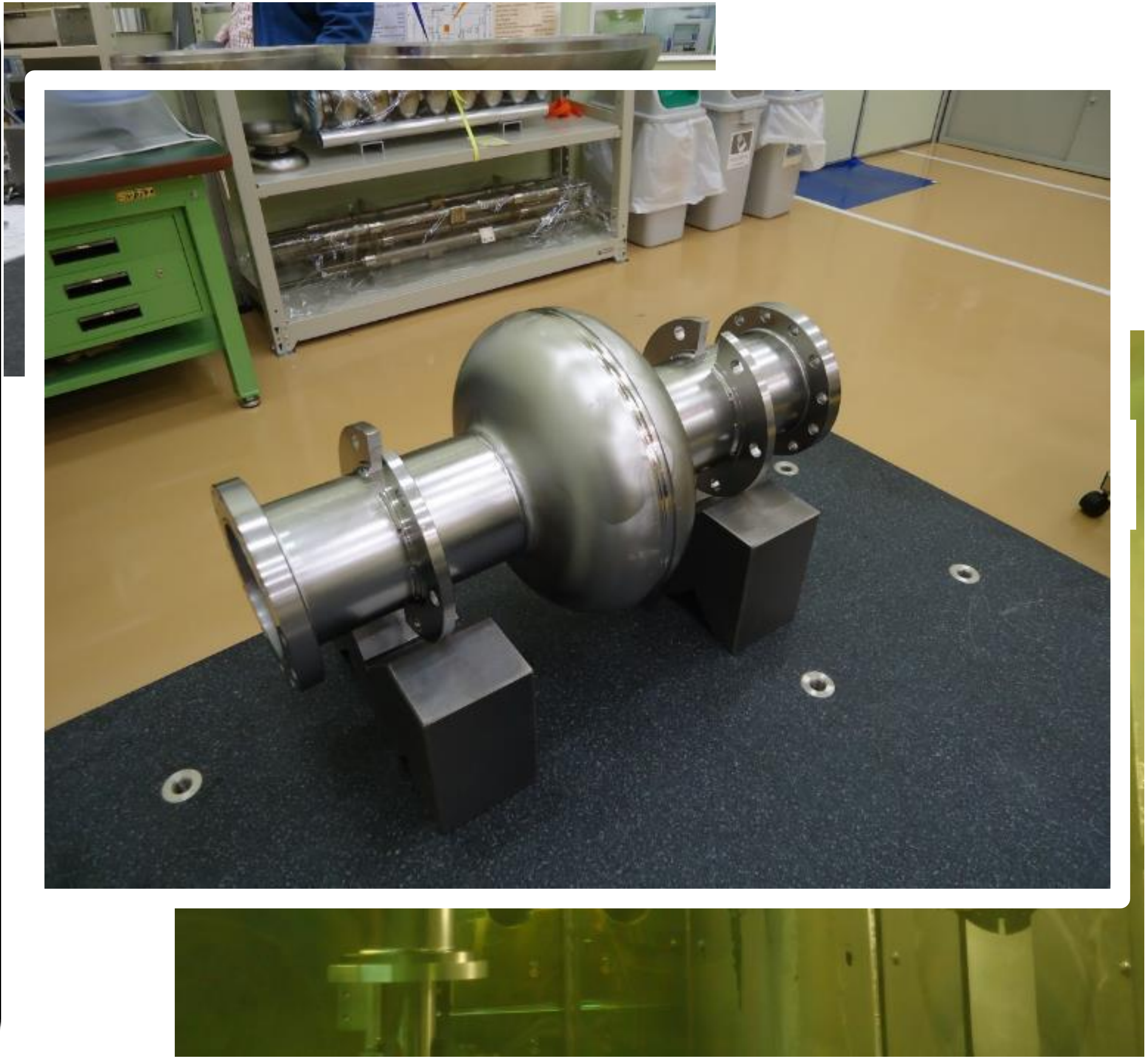
Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

Test cavity



ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

Test cavity

※Nbを陽極、純ｱﾙﾐﾆｳﾑを陰極として直流を流す。電解液には（9+1）の硫酸 、フッ化水素酸の混合溶液を用いる。 陽極のNbは酸化されNb_2O_5となる。この酸化膜は電解液中のHF, $HFSO_3$により溶解し研磨される。
[沢辺元明ILC 加速器・物理合同勉強会（May.10,2013）]

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

Test cavity

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

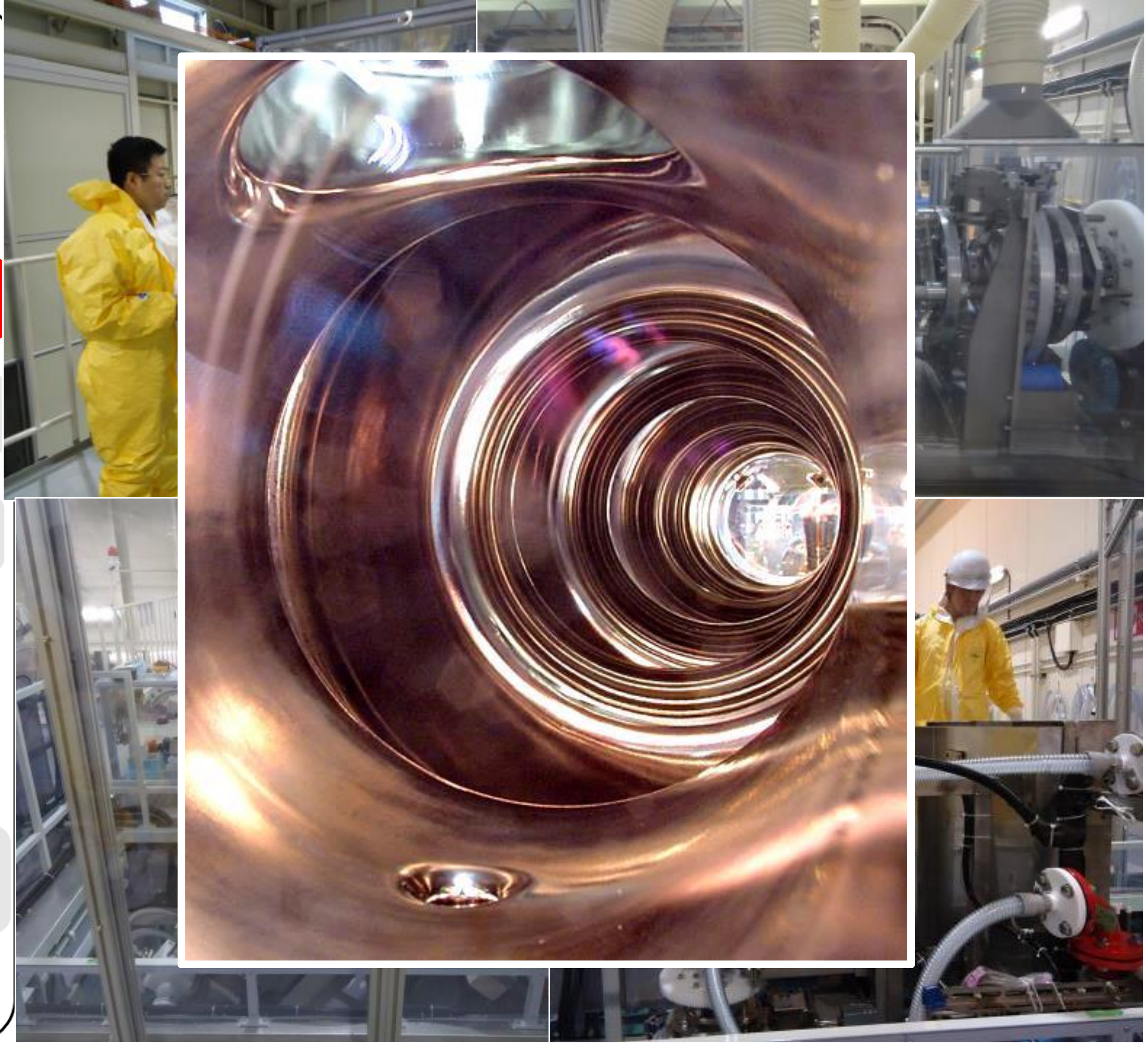
Assembling

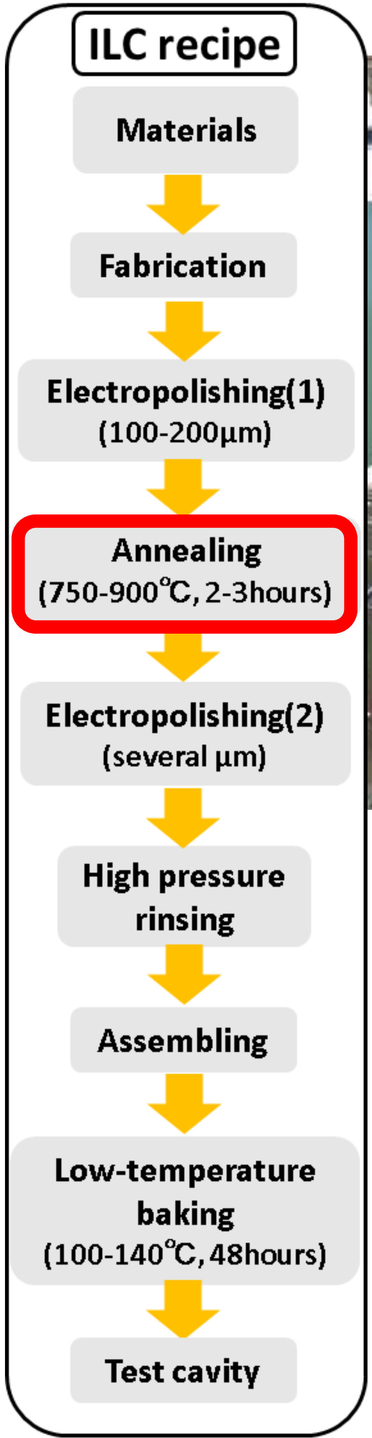
↓

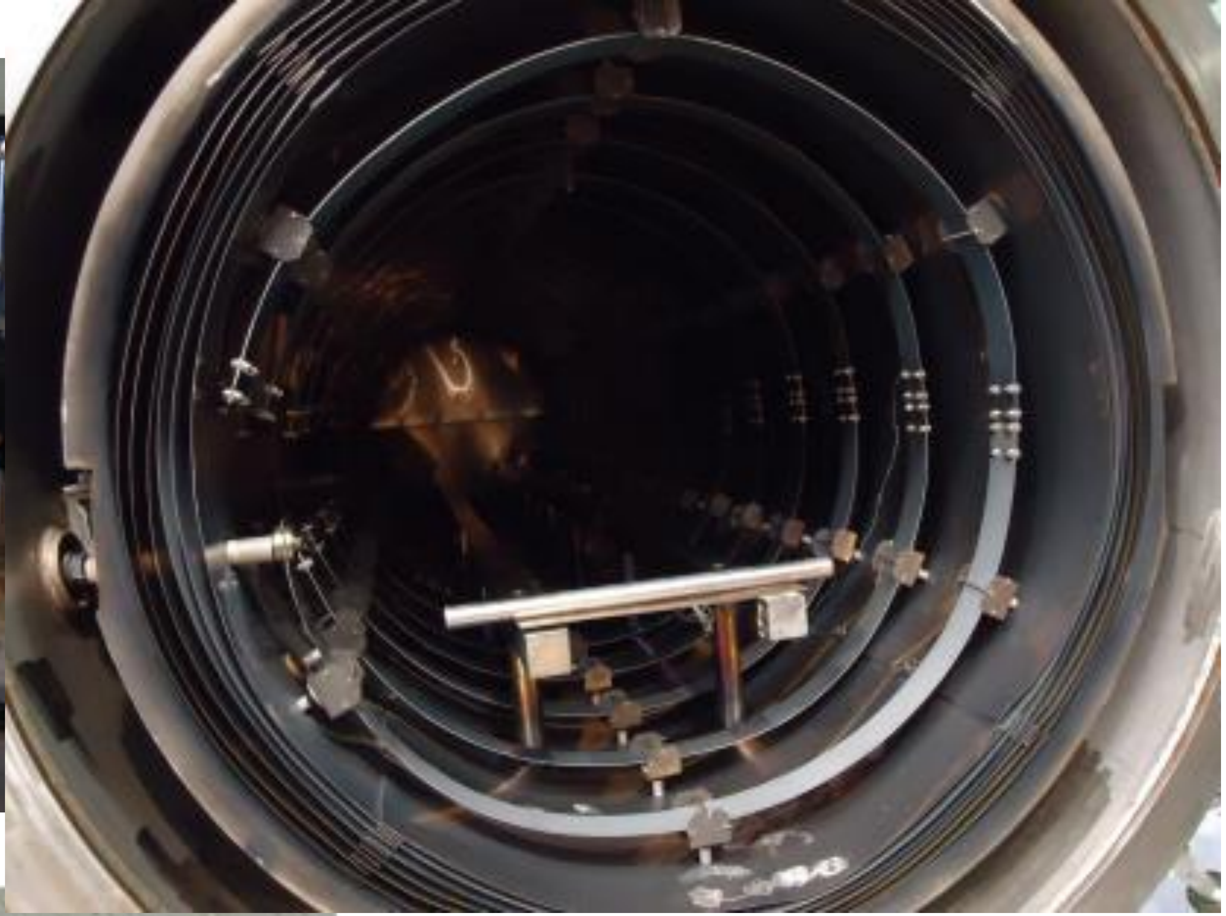
Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

Test cavity







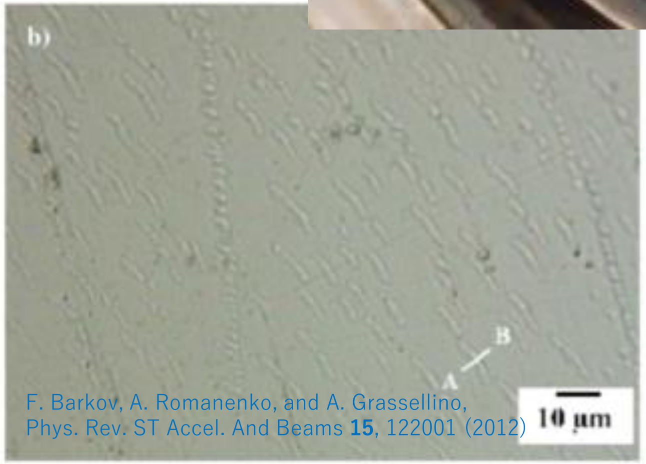


FIG. 3. Lenslike structures after 77 K hold on mechanically polished (a) fine grain sample; (b) single grain sample.

水素を追い出す

水素化物の析出が原因と思われるQ値悪化現象が知られている。600-900°Cの熱処理で予防・治療できる。

J. Knoblock, "The Q disease in Superconducting Niobium RF Cavities,"
AIP Conference Proceedings 671, 133 (2003)

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

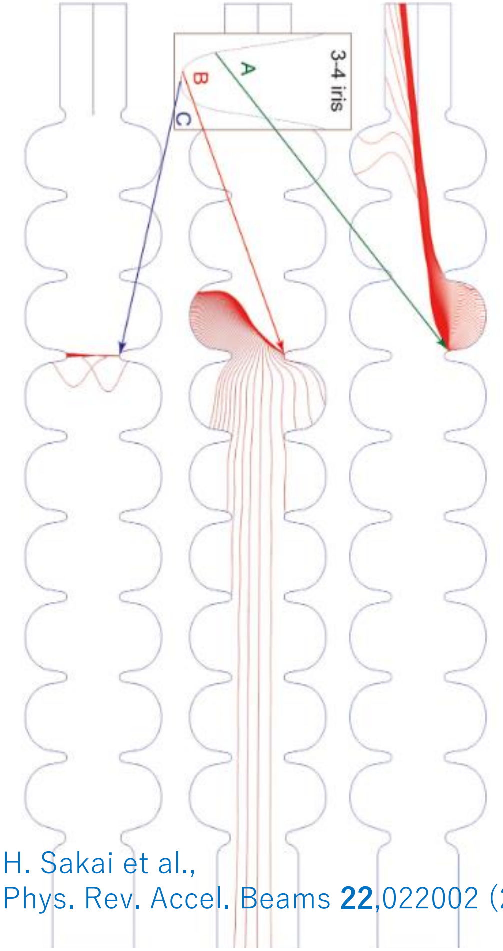
↓

Test cavity

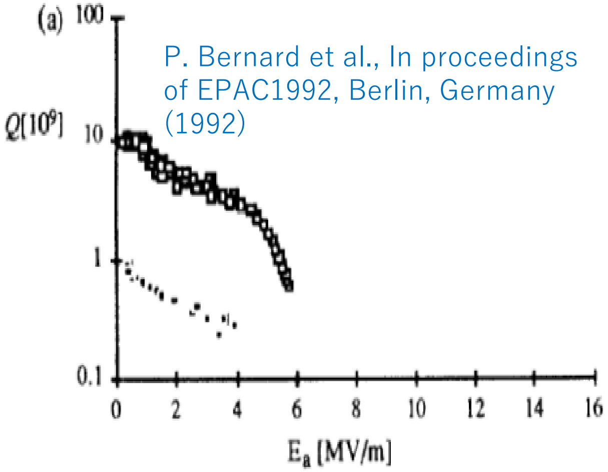
ILC recipe

- Materials
- ↓ Fabrication
- ↓ Electropolishing(1) (100-200μm)
- ↓ Annealing (750-900℃, 2-3hours)
- ↓ Electropolishing(2) (several μm)
- ↓ **High pressure rinsing**
- ↓ **Assembling**
- ↓ Low-temperature baking (100-140℃, 48hours)
- ↓ Test cavity


Courtesy of Mathieu Omet (KEK)



H. Sakai et al.,
Phys. Rev. Accel. Beams **22**,022002 (2019)



P. Bernard et al., In proceedings of EPAC1992, Berlin, Germany (1992)

ILC recipe

Materials

↓

Fabrication

↓

Electropolishing(1)
(100-200μm)

↓

Annealing
(750-900℃, 2-3hours)

↓

Electropolishing(2)
(several μm)

↓

High pressure rinsing

↓

Assembling

↓

Low-temperature baking
(100-140℃, 48hours)

↓

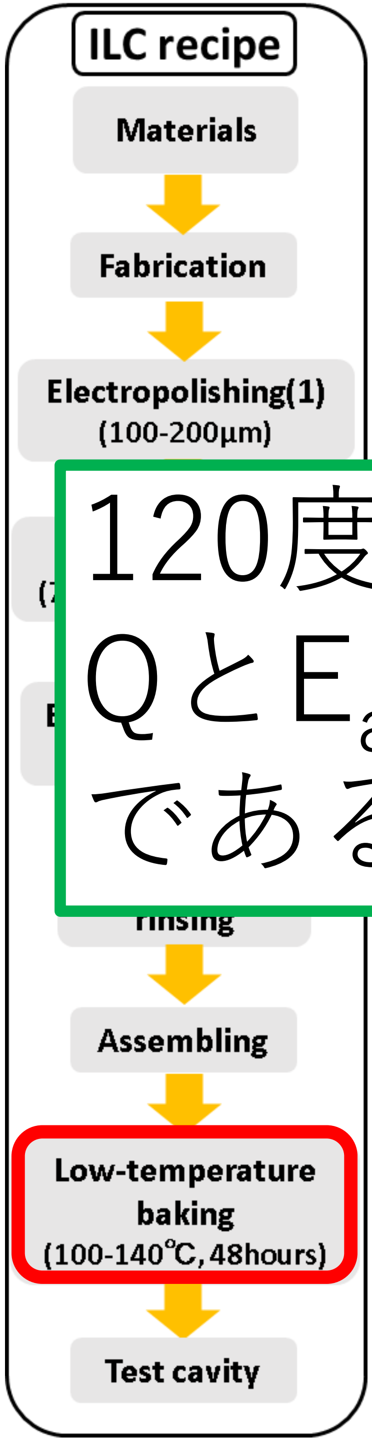
Test cavity

Courtesy of Mathieu Omet (KEK)

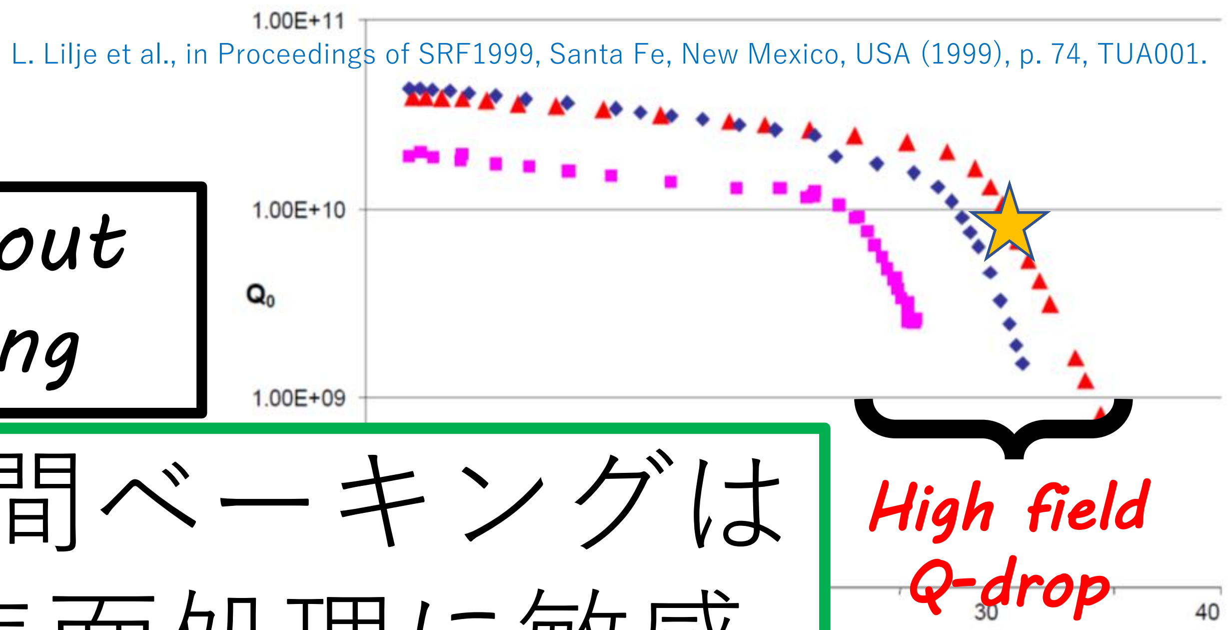
Courtesy of Mathieu Omet (KEK)

Courtesy of Mathieu Omet (KEK)

120°C—48時間
ベーキング

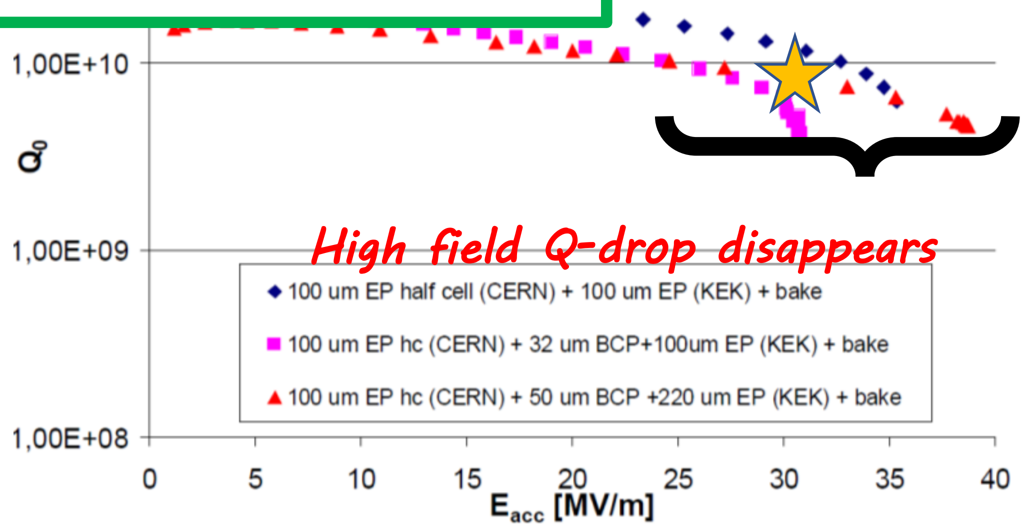


Without baking



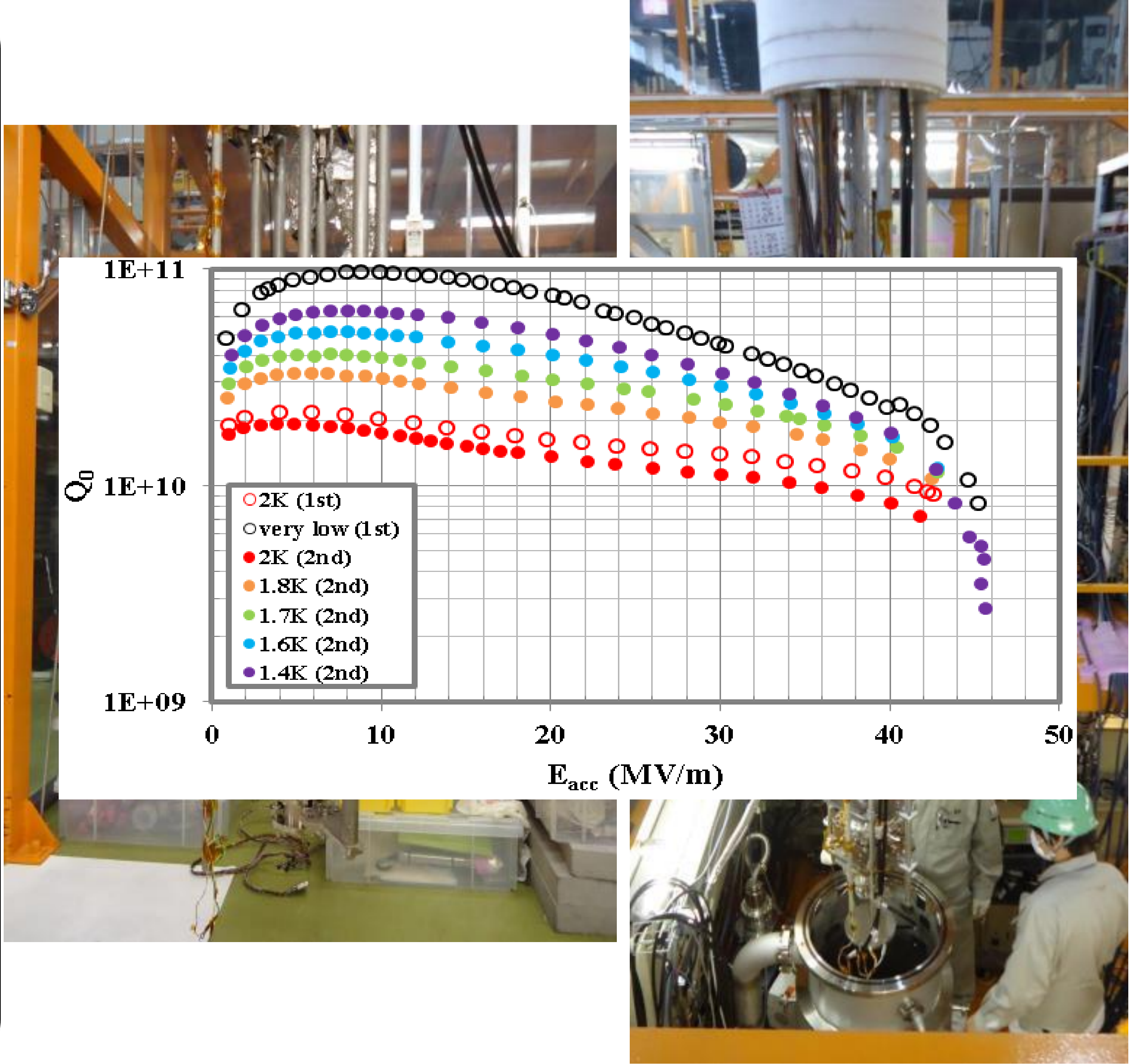
120度48時間ベーキングはQとE_{acc}が表面処理に敏感であることを示す代表例

With baking

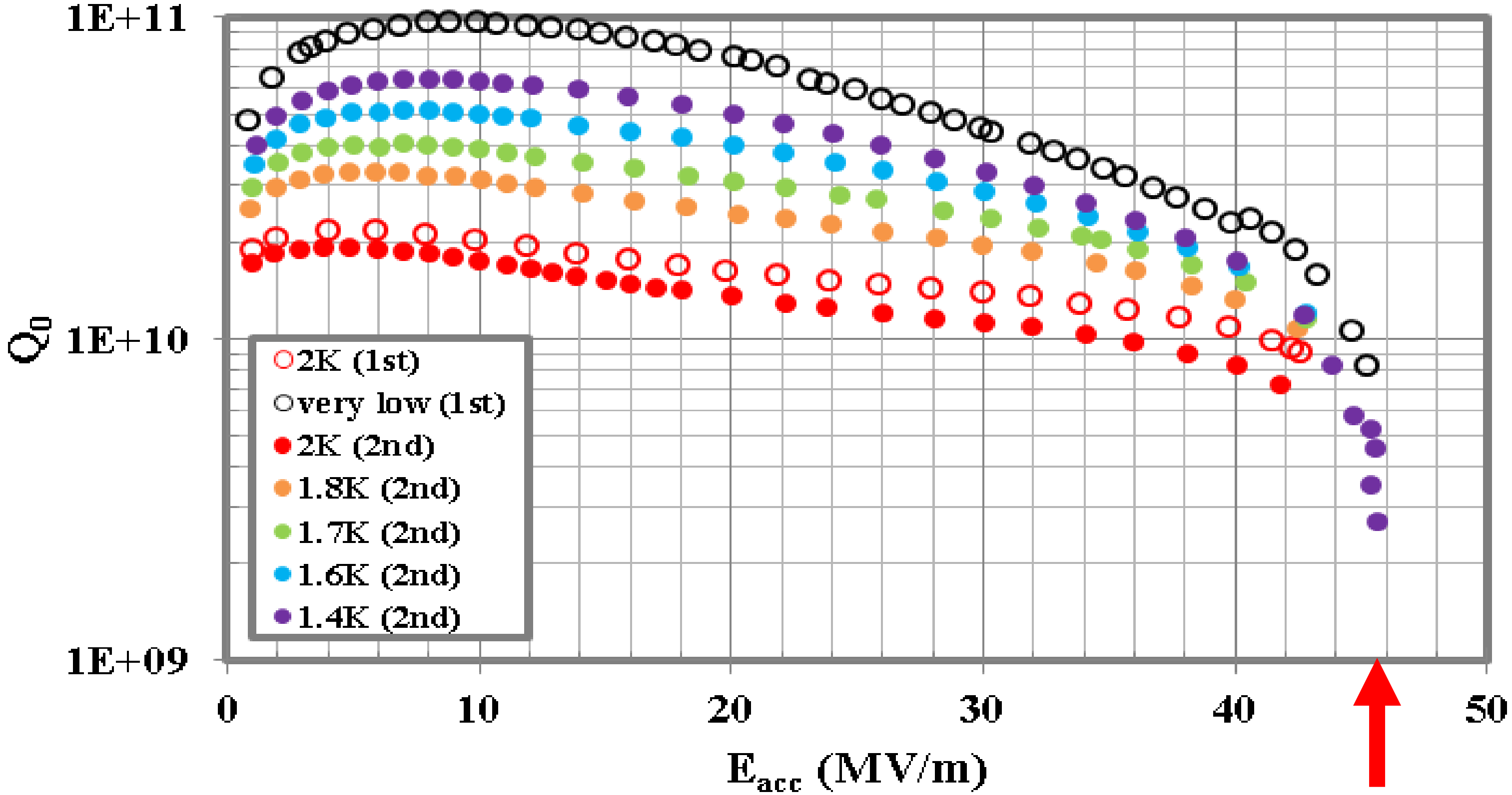


ILC recipe

- Materials
- ↓ Fabrication
- ↓ Electropolishing(1) (100-200μm)
- ↓ Annealing (750-900℃, 2-3hours)
- ↓ Electropolishing(2) (several μm)
- ↓ High pressure rinsing
- ↓ Assembling
- ↓ Low-temperature baking (100-140℃, 48hours)
- ↓ **Test cavity**



2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術



この空洞は加速勾配$E_{acc} \simeq 45$ MV/m、空洞内面のマイクロ波磁場の振幅にして$B_0 \simeq 190$ mTに達しているが、これ（~ 50 MV/m）が現在の超伝導空洞の技術で到達できる限界。

2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

こんな疑問が浮かぶ。

① $B_0 = 190 - 200\ \mathrm{mT}$程度で頭打ちになっているというが、この値は超伝導の観点からどういう意味があるのか？

こんな疑問が浮かぶ。

① $B_0 = 190 - 200\ \mathrm{mT}$程度で頭打ちになっているというが、この値は超伝導の観点からどういう意味があるのか？

② ニオブ空洞の性能の更なる向上は不可能なのか？

2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

こんな疑問が浮かぶ。

① $B_0 = 190 - 200\ \mathrm{mT}$程度で頭打ちになっているというが、この値は超伝導の観点からどういう意味があるのか？

② ニオブ空洞の性能の更なる向上は不可能なのか？

③ ニオブ以外の材料を使っても加速性能は向上しないのか？

2.2 現在の超伝導ニオブ空洞の技術

こんな疑問が浮かぶ。

① $B_0 = 190 - 200\ \mathrm{mT}$程度で頭打ちになっているというが、この値は超伝導の観点からどういう意味があるのか？

② ニオブ空洞の性能の更なる向上は不可能なのか？

③ ニオブ以外の材料を使っても加速性能は向上しないのか？

①や②の疑問に対して回答しようと思うと、少し超伝導の言葉を用いざるを得ない。例えば、下部臨界磁場B_{c1}や過熱磁場B_{sh}である。

更に、**③への回答がまさに積層薄膜構造の話であり、本講義の主題**なのであるが、積層薄膜構造を理解するにも、ロンドン方程式を始めとする超伝導の基本事項を知っておく必要がある。

次章では超伝導の基本を、超伝導の予備知識を想定せずに、最短距離で学ぶことにする

もくじ

3.1 マイスナー効果

3.1 マイスナー効果

常

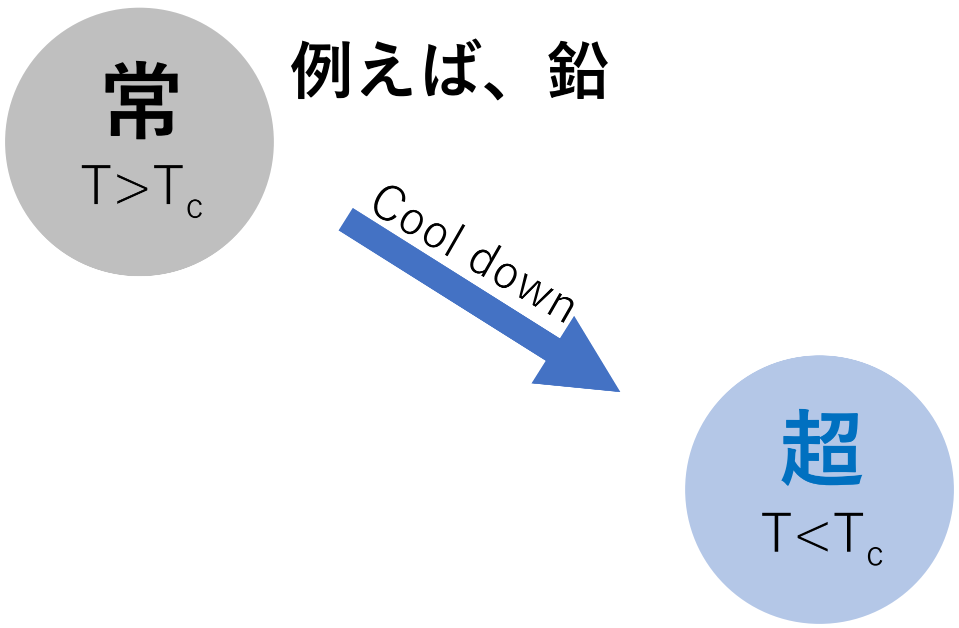
T>T_c

例えば、鉛

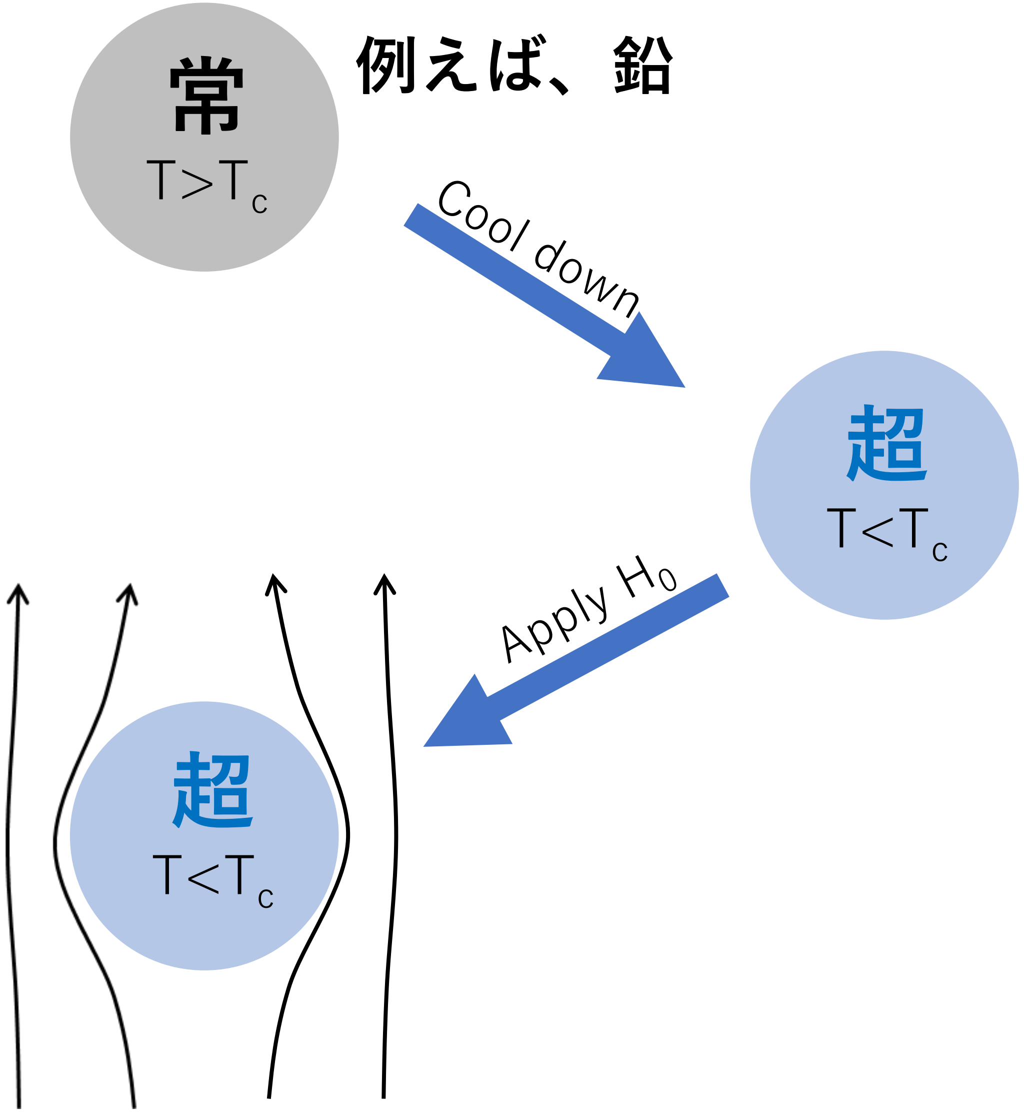
多くの金属や合金を含むある種の物質を冷却していくと、ある温度（臨界温度Tc）を下回ったとき、「超伝導」と呼ばれる状態に転移する。

3.1 マイスナー効果

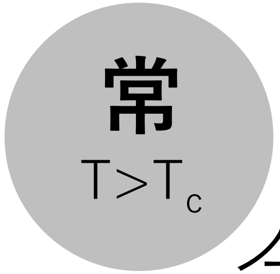
多くの金属や合金を含むある種の物質を冷却していくと、ある温度（臨界温度Tc）を下回ったとき、「超伝導」と呼ばれる状態に転移する。



ここに外から磁場をかけると、全て排除され、内部の磁束はゼロになる（**磁束排除**）

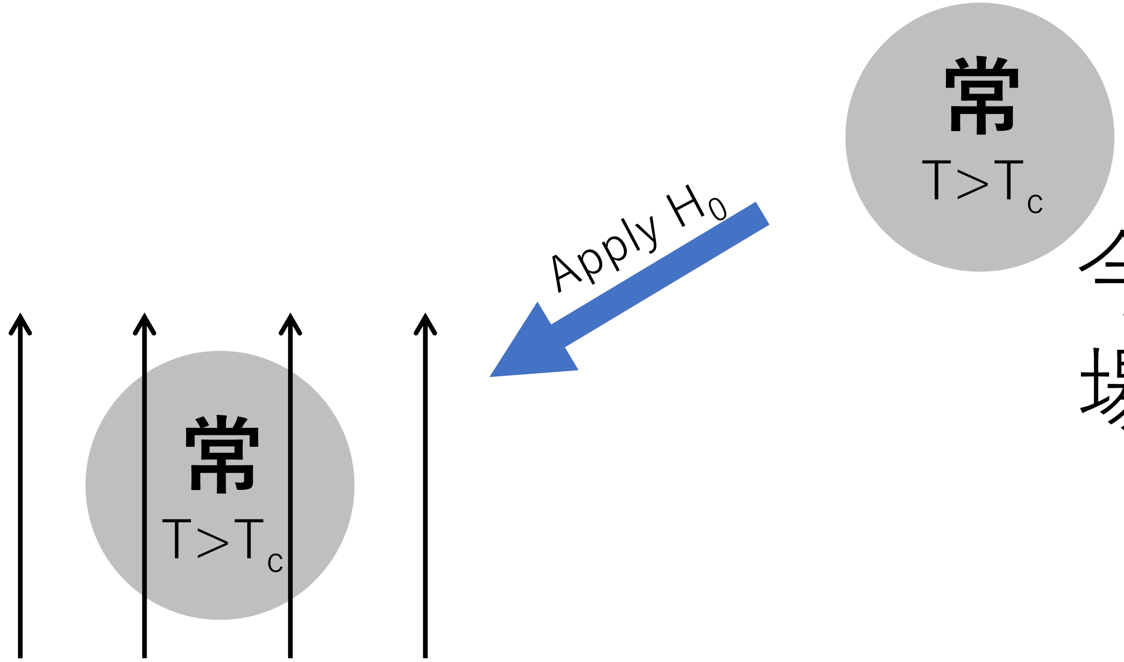


3.1 マイスナー効果



例えば、鉛

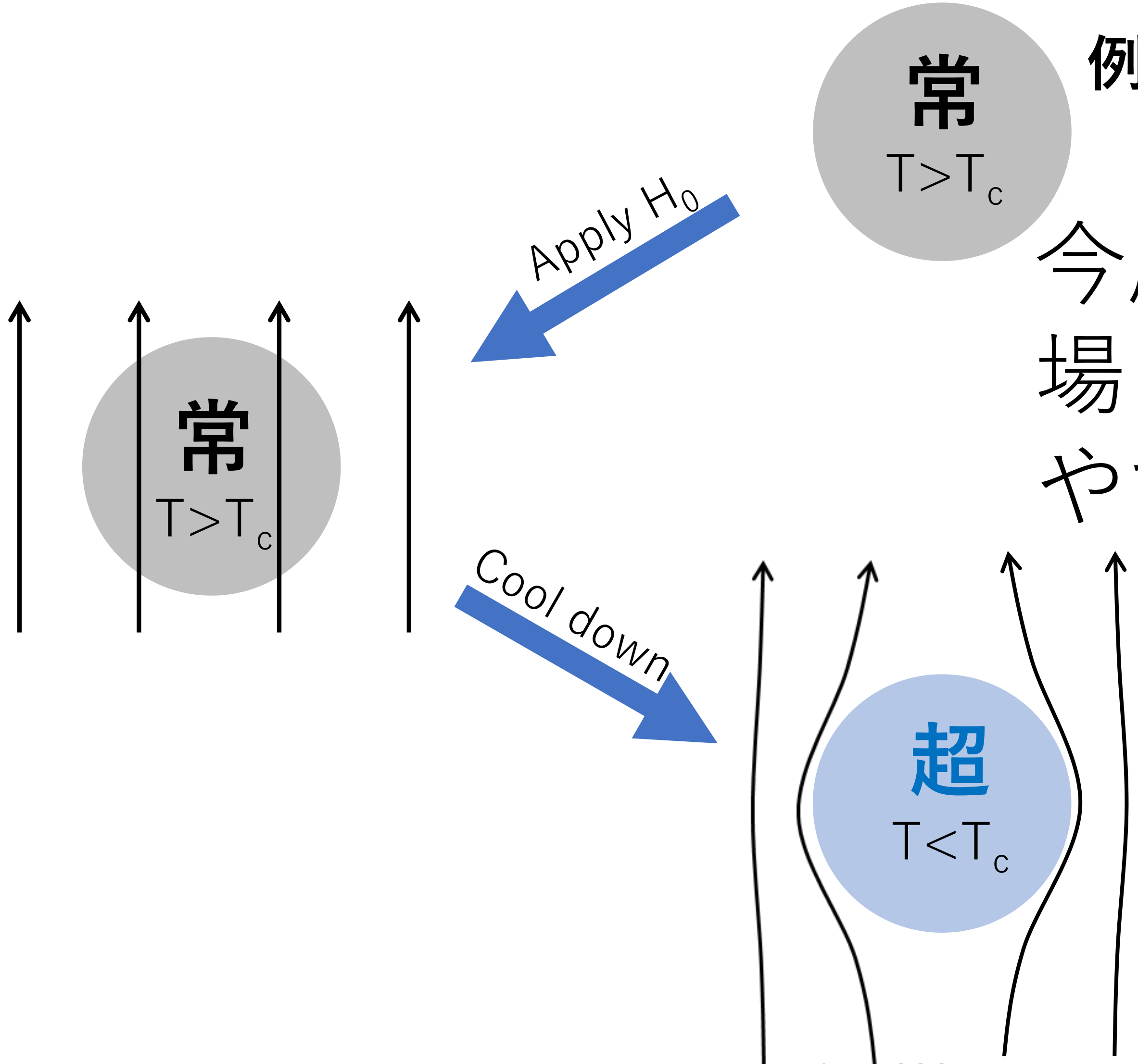
今度は、常伝導状態で磁場をかける。



例えば、鉛

今度は、常伝導状態で磁場をかける。

3.1 マイスナー効果



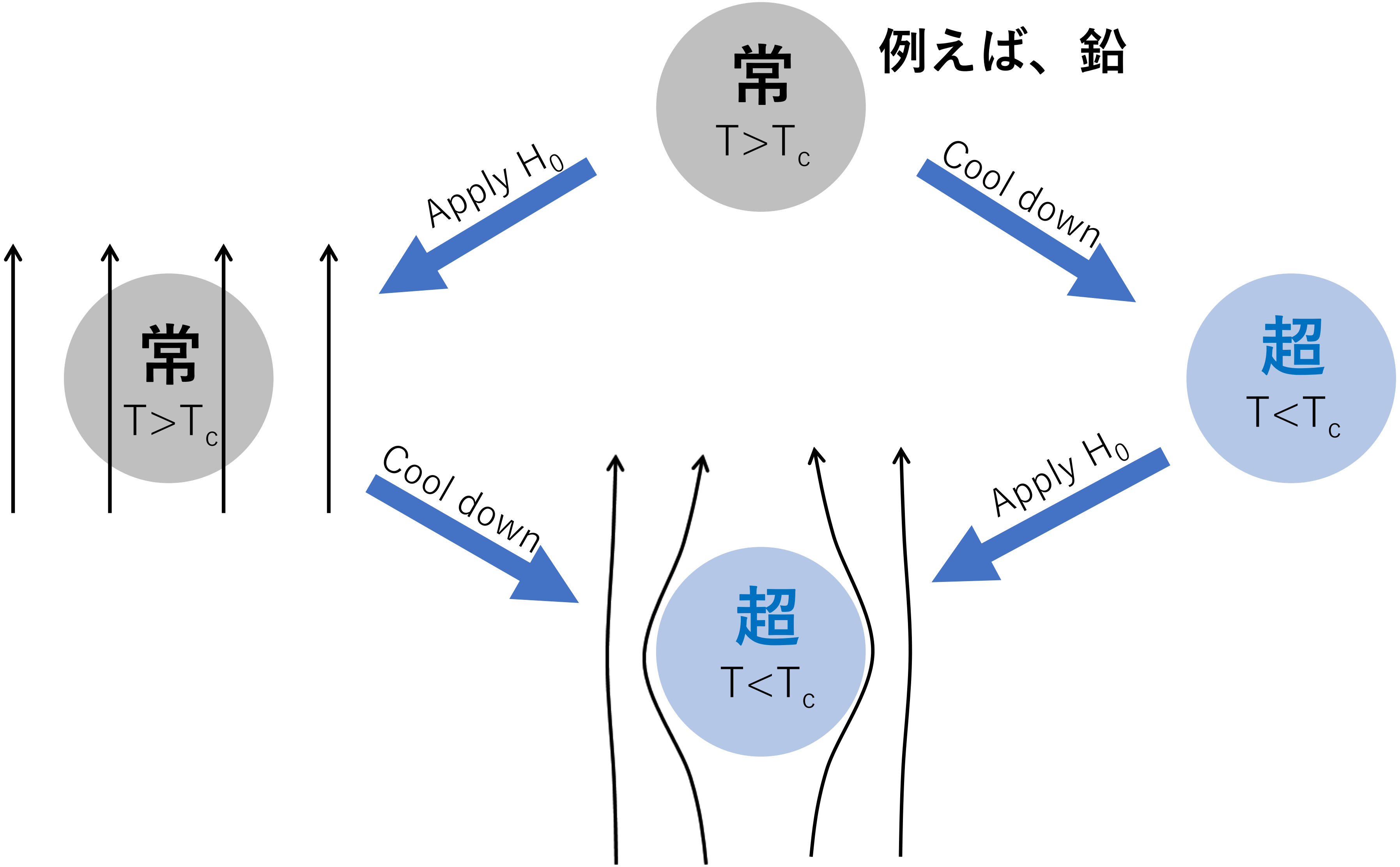
例えば、鉛

今度は、常伝導状態で磁場をかける。それから冷やす → **磁束排除**

どちらの経路を辿っても磁束は排除される。

右の経路は電気抵抗ゼロ（完全導体）を仮定すれば説明できるが
左の経路は完全導体では説明できない。
右と左どちらの経路を辿っても磁束が排除されるのは超伝導特有の性質。

例えば、鉛



3.2 ロンドン方程式

（マイスナー効果を微分方程式で表現したものと思えば良い）

3.2 ロンドン方程式

超伝導のエッセンスはクーパー対である。クーパー対は、電子間に（従来型の超伝導では、電子と格子の相互作用を介して）引力が働くことで生じる。電子はクーパー対を形成することで、結合エネルギー$\Delta \sim k_B T_c$（BCS理論においては$\Delta = 1.76 k_B T_c$）だけエネルギーを安定化させ、クーパー対の波動関数へと凝縮していく。

クーパー対の波動関数は　$\psi = \sqrt{n_c} e^{i\theta}$　と書ける。

ここではn_cが至るところ一定である場合を考える

n_c : クーパー対の密度
$n_s = 2n_c$: 超伝導電子密度
$|\psi|^2 = n_c = \frac{n_s}{2}$

3.2 ロンドン方程式

超伝導のエッセンスはクーパー対である。クーパー対は、電子間に（従来型の超伝導では、電子と格子の相互作用を介して）引力が働くことで生じる。電子はクーパー対を形成することで、結合エネルギー$\Delta \sim k_B T_c$（BCS理論においては$\Delta = 1.76 k_B T_c$）だけエネルギーを安定化させ、クーパー対の波動関数へと凝縮していく。

クーパー対の波動関数は　$\psi = \sqrt{n_c} e^{i\theta}$　と書ける。

ここではn_cが至るところ一定である場合を考える

n_c：クーパー対の密度

$n_s = 2n_c$：超伝導電子密度

$|\psi|^2 = n_c = \frac{n_s}{2}$

運動量演算子 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}$ を使うことで電流密度が得られる。

$q = -2e$：クーパー対の電荷

$M = 2m$：クーパー対の質量

$$\boldsymbol{j} = \frac{q}{2M}(\psi^* \hat{p} \psi + c.c) = -\frac{n_c q^2}{M}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right) = -\frac{n_S e^2}{m}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$$

3.2 ロンドン方程式

超伝導のエッセンスはクーパー対である。クーパー対は、電子間に（従来型の超伝導では、電子と格子の相互作用を介して）引力が働くことで生じる。電子はクーパー対を形成することで、結合エネルギー$\Delta \sim k_B T_c$（BCS理論においては$\Delta = 1.76 k_B T_c$）だけエネルギーを安定化させ、クーパー対の波動関数へと凝縮していく。

n_c：クーパー対の密度
$n_s = 2n_c$：超伝導電子密度
$|\psi|^2 = n_c = \frac{n_s}{2}$

クーパー対の波動関数は　$\psi = \sqrt{n_c} e^{i\theta}$　と書ける。
ここではn_cが至るところ一定である場合を考える

$q = -2e$：クーパー対の電荷
$M = 2m$：クーパー対の質量

運動量演算子 $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla - q\boldsymbol{A}$ を使うことで電流密度が得られる。

$$\boldsymbol{j} = \frac{q}{2M}(\psi^* \hat{p} \psi + c.c) = -\frac{n_c q^2}{M}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right) = -\frac{n_s e^2}{m}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$$

ここで、長さの次元を持つ量 λ (**ロンドン長**と呼ばれる)を導入すると

$$\boxed{\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right), \quad \lambda = \sqrt{\frac{M}{\mu_0 n_c q^2}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}}$$

3.2 ロンドン方程式

$$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$$

rot を作用させる

ここで

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\boldsymbol{B}$$

3.2 ロンドン方程式

$$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$$

rot を作用させる

（ここで
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$ ）

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\boldsymbol{B}$$

Maxwell eq.
$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B}}$$

London equation

3.2 ロンドン方程式

$$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$$

rot を作用させる

(ここで
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$
$\mathrm{rot\,grad} = 0$)

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\boldsymbol{B}$$

Maxwell eq.
$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$

$$\boxed{\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B}}$$

London equation

ここで $\mathrm{rot\,rot} = -\Delta + \mathrm{grad\,div}$ と $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ から

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B}}$$

London equation

λ の次元は簡単にチェックできる。 $[\mathrm{Laplacian}] = \mathrm{m}^{-2}$ だから$[\lambda] = \mathrm{m}.$

3.2 ロンドン方程式

まとめると、 $\boxed{\Delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{B}}$ または、その１次元版 $\boxed{\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2}B}$

を**ロンドン方程式**と呼ぶ。

ここに現れた長さの次元を持つ量λを**ロンドン長**と呼ぶ。 $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$

※ロンドン長は材料に依存する

Table 1. Superconducting parameters for some candidate materials considered for SRF applications.

Material	T_c (K)	ρ_n ($\mu\Omega$ cm)	$H_c(0)$ (T)	$H_{c1}(0)$ (T)	$H_{c2}(0)$ (T)	λ (nm)	Δ (meV)	ξ (nm)
Nb	9.23	2	0.2	0.18	0.28	40	1.5	35
NbN	16.2	70	0.23	0.02	15	200–350	2.6	3–5
NbTiN	17.3	35		0.03	15	150–200	2.8	5
Nb_3Sn	18	8–20	0.54	0.05	28	80–100	3.1	4
V_3Si	17	4	0.72	0.072	24.5	179	2.5	3.5
Nb_3Al	18.7	54			33	210	3	
Mo_3Re	15	10–30	0.43	0.03	3.5	140		
MgB_2	40	0.1–10	0.43	0.03	3.5–60	140	2.3 /7.2	5
Pnictides	30–55		0.5–0.9	30	50–135	200	10–20	2

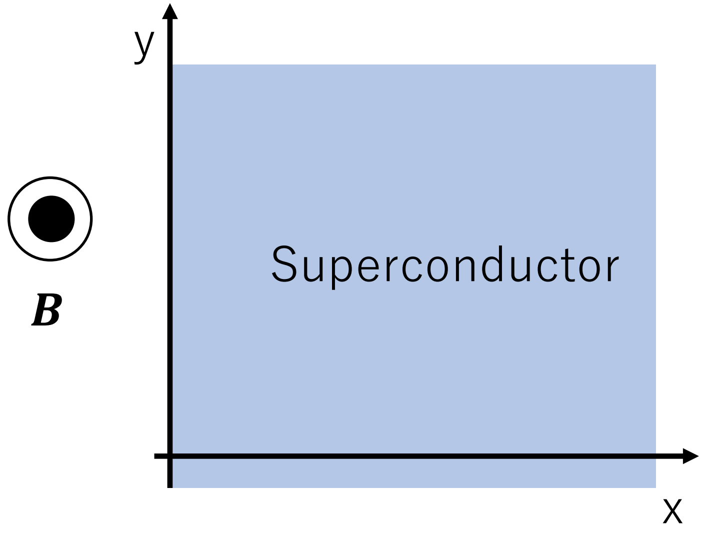
Anne-Marie Valente-Feliciano, Supercond. Sci. Technol. **29**, 113002 (2016)

3.2 ロンドン方程式

問題1

右のような系を考える。$x \geq 0$は、あるロンドン長λを持つ超伝導体で占められている。 $x = 0$が表面。この超伝導体にz方向の磁場が印加されているとする。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \quad B(0) = B_0$$



このとき、ロンドン方程式は、 $$\frac{d^2B(x)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2}B(x)$$ と書ける。

(1) ロンドン方程式を解いて B の深さ分布を求めよ。
(2) アンペールの法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$ を用いて、遮蔽電流の分布を求めよ。

3.2 ロンドン方程式

問題1（解）

(1) The solution is $B = Ce^{-x/\lambda} + De^{x/\lambda}$

We impose

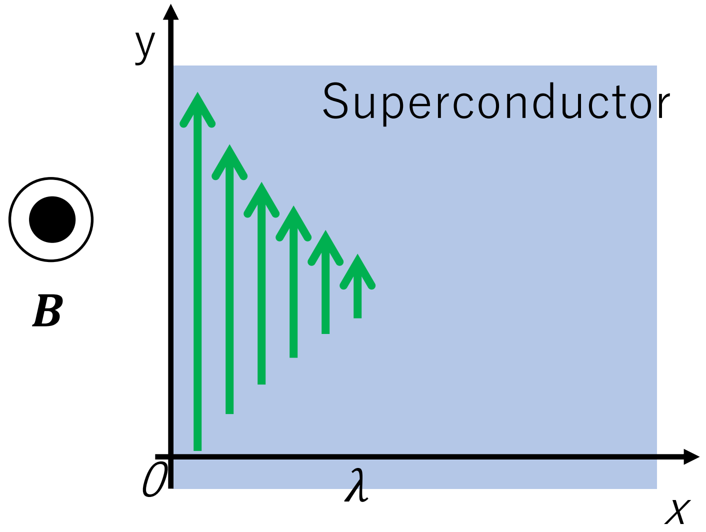
$B(\infty)$ =finite : $D = 0 \quad \rightarrow \quad B = Ce^{-x/\lambda}$

$B(0) = B_0$: $C = B_0 \rightarrow \boxed{B = B_0 e^{-x/\lambda}}$

(2) Calculate $\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$. Then you get $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ j(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{j(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-x/\lambda}}$

※超伝導空洞の内壁でも同じことが起こっていて、空洞内部に閉じ込められたマイクロ波磁場と電流は空洞内壁の表面からλ程度（数十nmから数百nm）で減衰する。したがって、**超伝導空洞の性能のかなりの部分が表面の僅か100nm程度の厚みで決まることになる。**

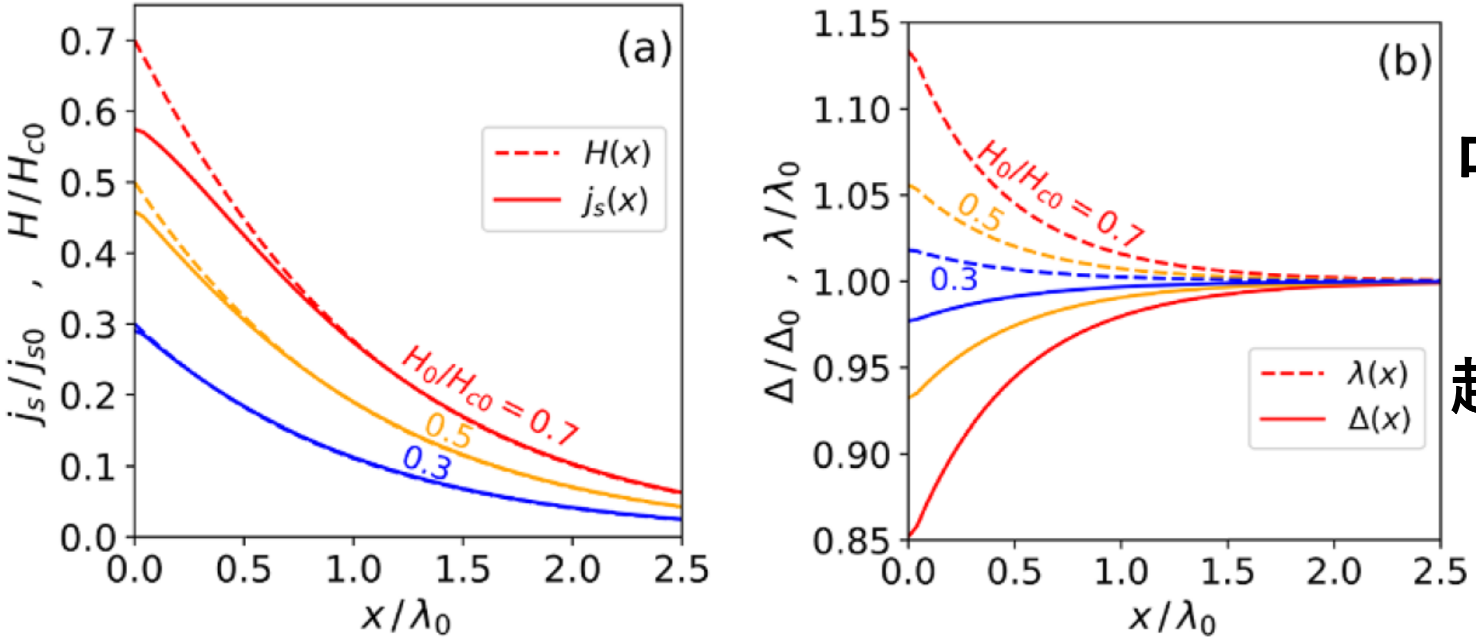
他にも、内壁の発熱を外壁へと逃がす熱伝導が重要である。
その意味で高純度ニオブの利用は必須。



補足

ロンドン方程式は、磁場が強くなると正しくなくなる。遮蔽電流が強くなり過ぎて、超伝導の破壊が進み、ロンドン長が長くなる。深さによって電流の強さが異なるから、超伝導破壊の程度も深さに依存し、ロンドン長も深さに依存する。よって強い磁場下では、ロンドン理論ではなくBCS理論を用いて（電流による対破壊の効果を取りいれて）計算する必要がある。

磁場分布
電流分布



ロンドン長

超伝導ギャップ

Figure 3. Spatial distributions of (a) H, j_s, (b) λ, and Δ obtained from the self-consistent solutions of the coupled Maxwell–Usadel equations (equations (5)–(11)). For $H_0 \sim H_{c0}$ (red), the non-linear Meissner effect manifests itself in the vicinity of the surface.

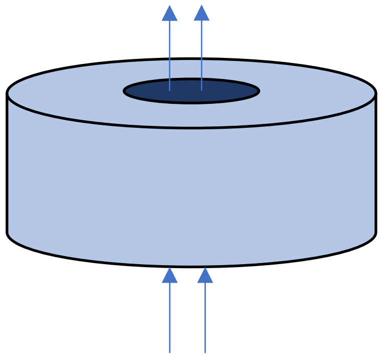
T. Kubo, Supercond. Sci. Technol. **34**, 045006 (2021)

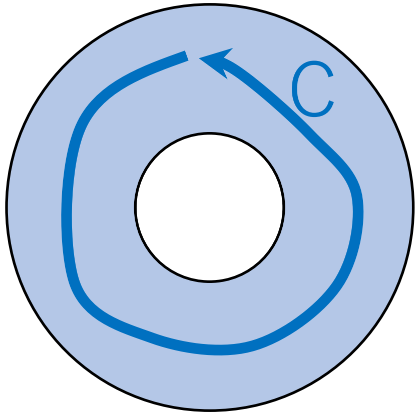
3.3 磁束の量子化

※この話は、3.5節「下部臨界磁場」を理解するのに必要です

3.3 磁束の量子化

右図のような穴のあいた超伝導体を考え、その中に “**経路C**”を定める。 ただし、Cと表面の距離は λ より遥かに大きいとする。このとき、マイスナー効果によりC上では電流はゼロである。

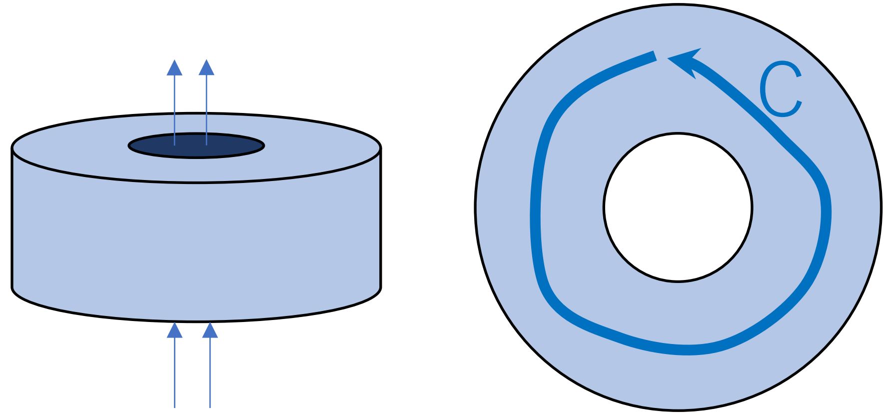




このとき、$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$ の左辺が消え、C上で $\boldsymbol{A} = \frac{\hbar}{q}\nabla\theta$ となる。

3.3 磁束の量子化

右図のような穴のあいた超伝導体を考え、その中に “**経路C**”を定める。 ただし、Cと表面の距離は λ より遥かに大きいとする。このとき、マイスナー効果によりC上では電流はゼロである。



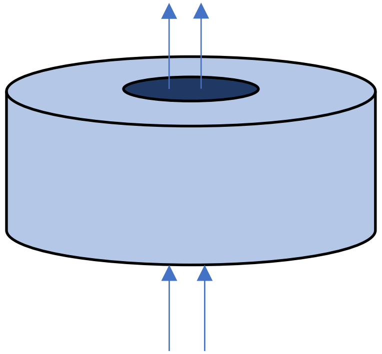
このとき、$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$ の左辺が消え、C上で $\boldsymbol{A} = \frac{\hbar}{q}\nabla\theta$ となる。

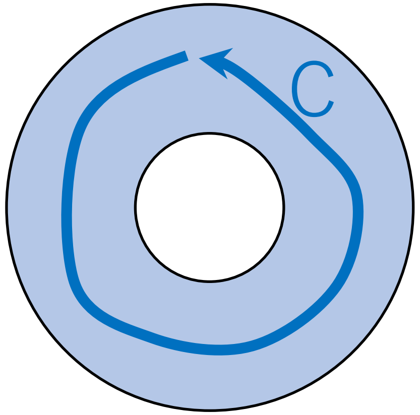
これを経路Cに沿って積分すると

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}_{=\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \Phi} = \frac{\hbar}{q}\underbrace{\oint \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{l}}_{=2\pi n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)}$$

3.3 磁束の量子化

右図のような穴のあいた超伝導体を考え、その中に "**経路C**"を定める。 ただし、Cと表面の距離は λ より遥かに大きいとする。このとき、マイスナー効果によりC上では電流はゼロである。





このとき、$\boldsymbol{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{q}\nabla\theta\right)$ の左辺が消え、C上で $\boldsymbol{A} = \frac{\hbar}{q}\nabla\theta$ となる。

これを経路Cに沿って積分すると

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}_{=\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \Phi} = \frac{\hbar}{q}\underbrace{\oint \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{l}}_{=2\pi n} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

これより、

$$\Phi = \frac{\hbar}{q}2\pi n = \frac{\pi\hbar}{e}n = \phi_0 n \qquad \boxed{\phi_0 = \frac{h}{2e} = \frac{\pi\hbar}{e}}$$

超伝導リングを貫く磁束は量子化される。

問題2

You can use

$$\begin{cases} e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C} \\ \hbar = 1.055 \times 10^{-34}\mathrm{J} \cdot s \end{cases}$$

(1)Calculate $\phi_0 = \frac{h}{2e} = \frac{\pi\hbar}{e}$

(2)Check its dimension.

100円均一で半径1cm程度の0.1T の磁石が売られていますが、その磁束がおおよそ、

$$3.14 * (0.005m)^2 * 0.1T \sim 10^{-5} Wb$$

となる。ϕ_0はこれの100億分の1

問題2（解）

（1） $$\phi_0 = \frac{h}{2e} = \frac{\pi\hbar}{e} = 2.07 \times 10^{-15}\ \mathrm{Wb}$$

（2） $$[\phi_0] = \frac{\mathrm{J \cdot s}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V \cdot C \cdot s}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V \cdot s} = \mathrm{Wb}$$

$\mathrm{Wb} = \mathrm{V \cdot s}$

You can easily confirm $\mathrm{Wb} = \mathrm{V \cdot s}$. Let us remind

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{Wb \cdot m^{-2}} = [\boldsymbol{A}] \cdot \mathrm{m^{-1}} \qquad \therefore\ [\boldsymbol{A}] = \mathrm{Wb \cdot m^{-1}}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\mathrm{V \cdot m^{-1}} = \mathrm{Wb \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}} \qquad \therefore\ \mathrm{Wb} = \mathrm{V \cdot s}$$

3.4 熱力学的臨界磁場

後で空洞性能の限界について論ずる際に現れる量「過熱磁場」とも関係する

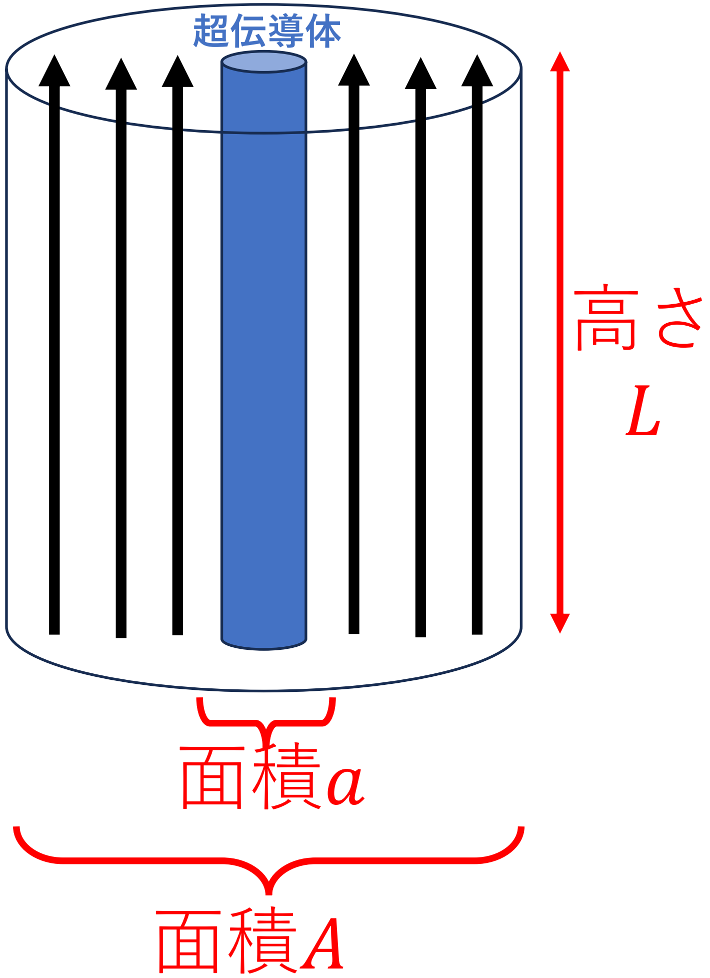
3.4 熱力学的臨界磁場

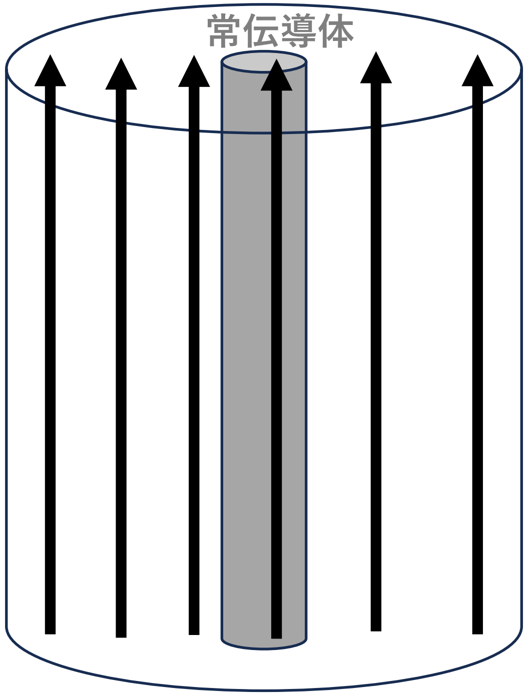
転移温度T_c以下で超伝導状態になるのは、超伝導状態の方が常伝導状態よりもエネルギーE_cだけ安定だからである（**E_cを凝縮エネルギーと呼ぶ**）。この安定性は磁場をかけると損なわれる。

3.4 熱力学的臨界磁場

転移温度T_c以下で超伝導状態になるのは、超伝導状態の方が常伝導状態よりもエネルギーE_cだけ安定だからである（**E_cを凝縮エネルギーと呼ぶ**）。この安定性は磁場をかけると損なわれる。

高さL、底面積がAの空間の中に底面積がaの円柱状の超伝導体（a≪A）を入れて軸方向の磁場を印加する。

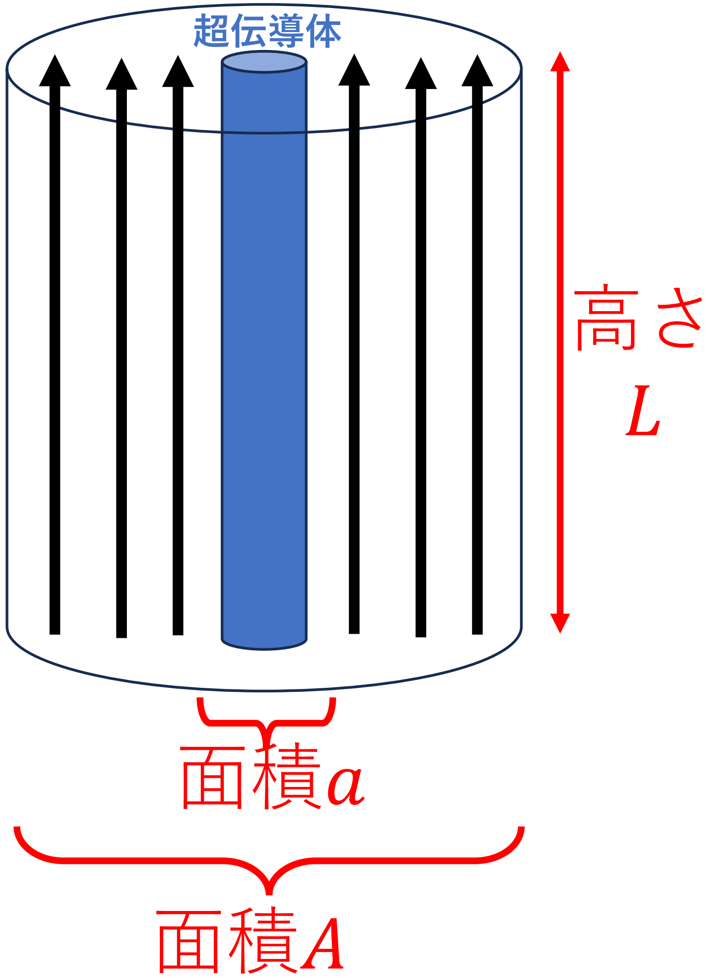




もし常伝導体を
入れていたなら

3.4 熱力学的臨界磁場

転移温度T_c以下で超伝導状態になるのは、超伝導状態の方が常伝導状態よりもエネルギーE_cだけ安定だからである（**E_cを凝縮エネルギーと呼ぶ**）。この安定性は磁場をかけると損なわれる。

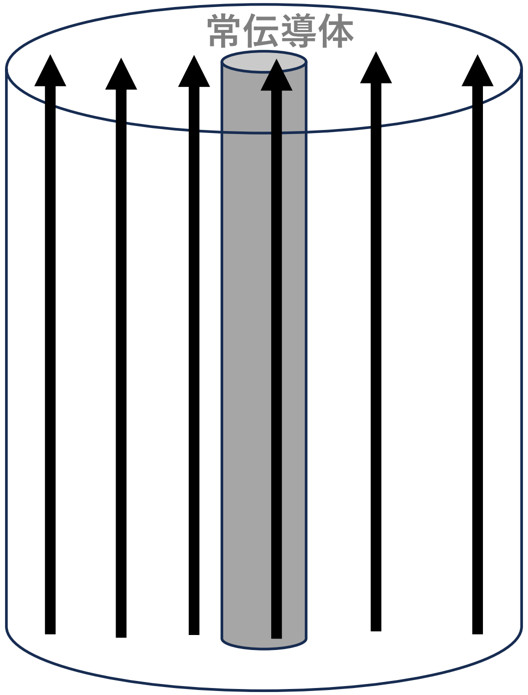


高さL、底面積がAの空間の中に底面積がaの円柱状の超伝導体（a≪A）を入れて軸方向の磁場を印加する。

磁場はマイスナー効果によって超伝導体から外に押し出されるから、物質が常伝導の場合と比較して、磁束密度は、

$$A\,/\,(A-a) \simeq (1+\frac{a}{A}) \text{ 倍}$$

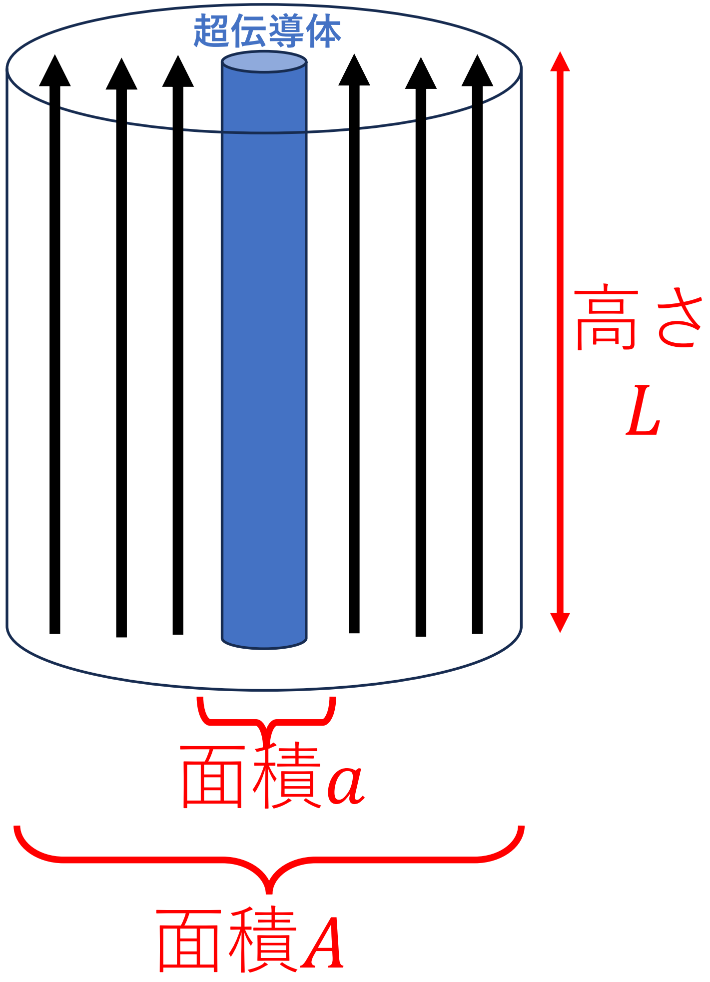
だけ大きくなる。（全磁束B*Aが面積(A-a)に分布するから磁束密度は$\frac{AB}{A-a} \simeq B(1+a/A)$となる）



もし常伝導体を入れていたなら

3.4 熱力学的臨界磁場

転移温度T_c以下で超伝導状態になるのは、超伝導状態の方が常伝導状態よりもエネルギーE_cだけ安定だからである（**E_cを凝縮エネルギーと呼ぶ**）。この安定性は磁場をかけると損なわれる。



高さL、底面積がAの空間の中に底面積がaの円柱状の超伝導体（a≪A）を入れて軸方向の磁場を印加する。

磁場はマイスナー効果によって超伝導体から外に押し出されるから、物質が常伝導の場合と比較して、磁束密度は、

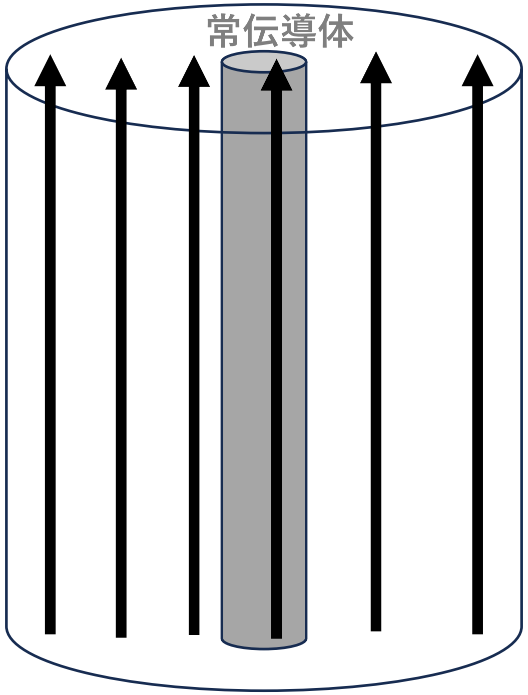
$$A\,/\,(A-a) \simeq \left(1+\frac{a}{A}\right) \text{倍}$$

だけ大きくなる。（全磁束B*Aが面積(A-a)に分布するから磁束密度は$\frac{AB}{A-a} \simeq B(1+a/A)$となる）

その結果、

磁場のエネルギー密度（$B^2/2\mu_0$）は、

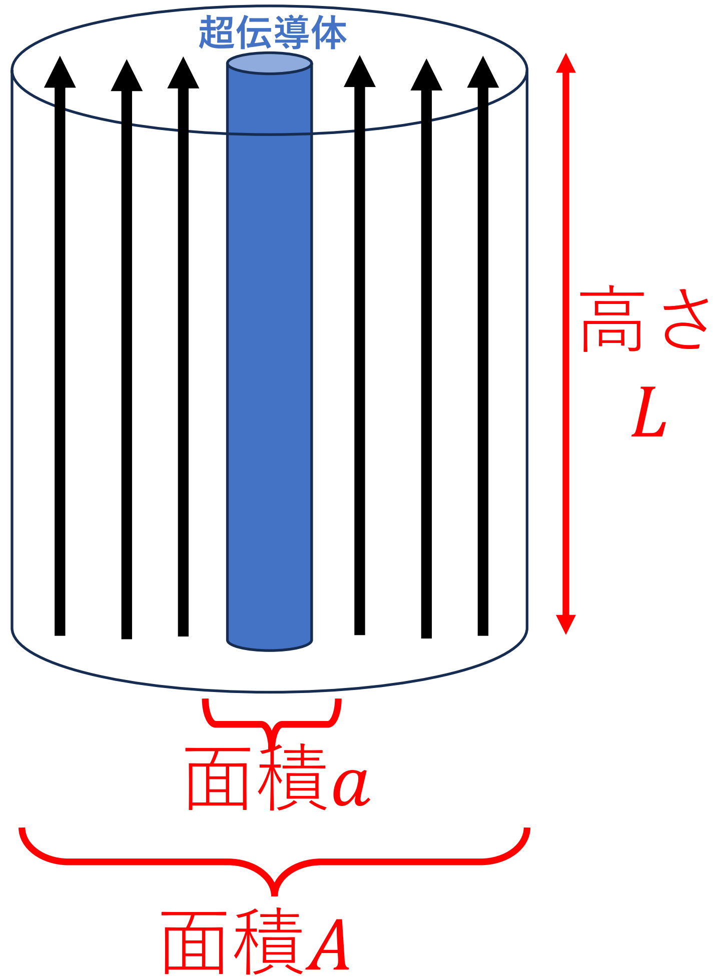
$\left(1+\frac{a}{A}\right)^2$ 倍だけ大きくなる。



もし常伝導体を入れていたなら

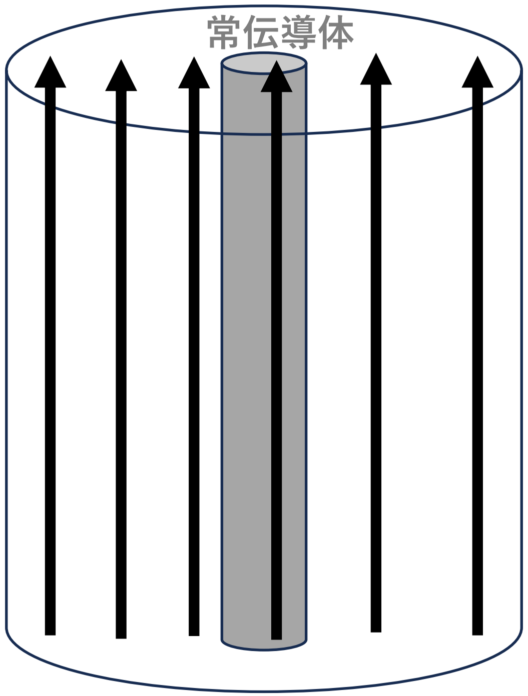
3.4 熱力学的臨界磁場

問題3 中に超伝導体が置かれている場合と常伝導体が置かれている場合の磁場のエネルギーの差はいくらか？



- 超伝導体が置かれている場合の磁束密度は$\dfrac{AB}{A-a} \simeq B(1+a/A)$
- 常伝導体が置かれている場合の磁束密度はB

であるとして計算せよ



もし常伝導体を
入れていたなら

問題3（解）

- 超伝導体が置かれている場合の磁束密度は$\frac{AB}{A-a} \simeq B(1+a/A)$
- 常伝導体が置かれている場合の磁束密度はB

超伝導の場合 $$\frac{B^2}{2\mu_0}\left(1+\frac{a}{A}\right)^2 \times (A-a)L = \frac{B^2}{2\mu_0}(A+a)L$$

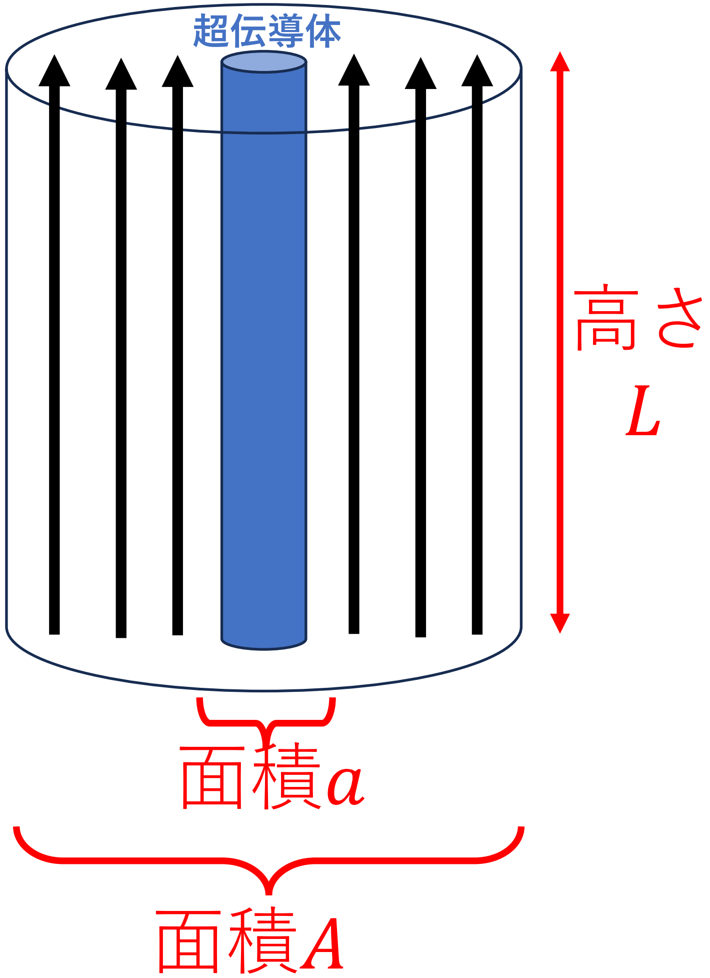
常伝導の場合 $$\frac{B^2}{2\mu_0} \times AL$$

両者の差は $$\boxed{\frac{B^2}{2\mu_0}aL}$$

3.4 熱力学的臨界磁場

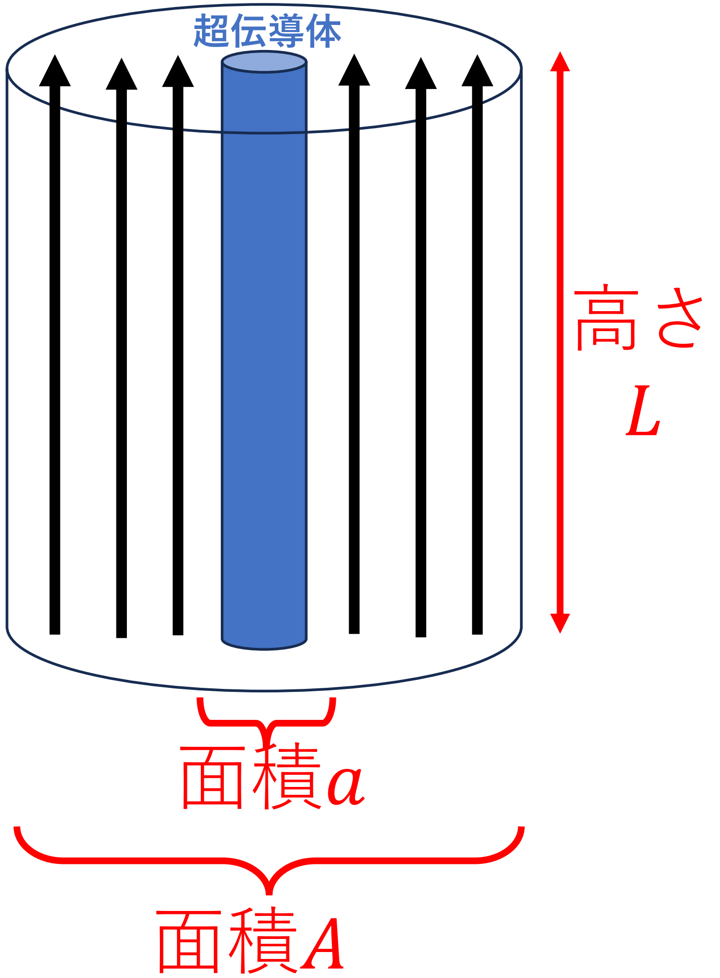
よって、超伝導体がある場合と常伝導体がある場合の磁場のエネルギーの差は

$$\frac{B^2}{2\mu_0}aL \qquad \text{（問題3より）}$$



よって、超伝導体がある場合と常伝導体がある場合の磁場のエネルギーの差は

$$\frac{B^2}{2\mu_0}aL \qquad \text{（問題3より）}$$

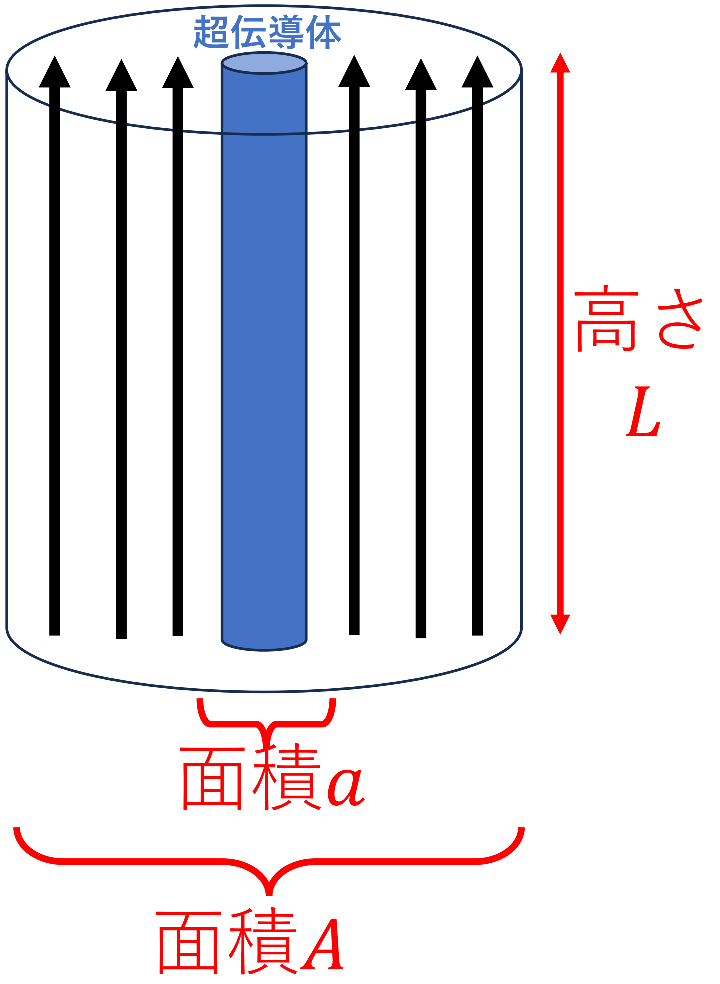


超伝導体があると、磁場のエネルギーが高くなってしまう。それでもなお、超伝導凝縮エネルギーによる得（$E_c \times aL$）が、磁場エネルギーの増加分を上回っていれば超伝導状態が安定である。両者が釣り合うときの磁場を熱力学的臨界磁場B_cと呼ぶ。

3.4 熱力学的臨界磁場

よって、超伝導体がある場合と常伝導体がある場合の磁場のエネルギーの差は

$$\frac{B^2}{2\mu_0}aL \qquad \text{（問題3より）}$$



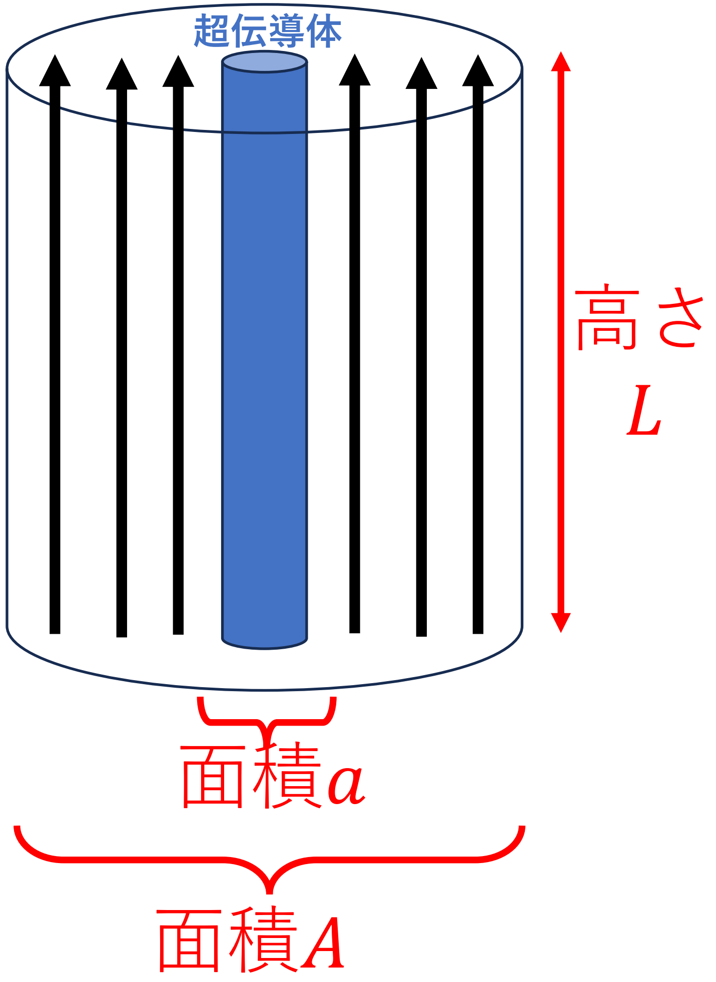
超伝導体があると、磁場のエネルギーが高くなってしまう。それでもなお、超伝導凝縮エネルギーによる得（$E_c \times aL$）が、磁場エネルギーの増加分を上回っていれば超伝導状態が安定である。両者が釣り合うときの磁場を熱力学的臨界磁場B_cと呼ぶ。すなわち、

$$\boxed{E_c = \frac{B_c^2}{2\mu_0}} \qquad or \qquad B_c = \sqrt{2\mu_0 E_c}$$

3.4 熱力学的臨界磁場

よって、超伝導体がある場合と常伝導体がある場合の磁場のエネルギーの差は

$$\frac{B^2}{2\mu_0}aL \qquad \text{（問題3より）}$$



超伝導体があると、磁場のエネルギーが高くなってしまう。それでもなお、超伝導凝縮エネルギーによる得（$E_c \times aL$）が、磁場エネルギーの増加分を上回っていれば超伝導状態が安定である。両者が釣り合うときの磁場を熱力学的臨界磁場B_cと呼ぶ。すなわち、

$$\boxed{E_c = \frac{B_c^2}{2\mu_0}} \qquad or \qquad B_c = \sqrt{2\mu_0 E_c}$$

BCS理論によると、$E_c(0) = \frac{1}{2}N_0\Delta^2$ で与えられる（N_0 は常伝導状態でのフェルミエネルギーでの状態密度、Δ は超伝導ギャップ）。これを代入すると $\boxed{B_c(0) = \sqrt{\mu_0 N_0}\,\Delta}$

3.4 熱力学的臨界磁場

熱力学的臨界磁場は物質によって異なる

$$B_c(0) = \sqrt{\mu_0 N_0}\,\Delta$$

Table 1. Superconducting parameters for some candidate materials considered for SRF applications.

Material	T_c (K)	ρ_n ($\mu\Omega$ cm)	$H_c(0)$ (T)	$H_{c1}(0)$ (T)	$H_{c2}(0)$ (T)	λ (nm)	Δ (meV)	ξ (nm)
Nb	9.23	2	0.2	0.18	0.28	40	1.5	35
NbN	16.2	70	0.23	0.02	15	200–350	2.6	3–5
NbTiN	17.3	35		0.03	15	150–200	2.8	5
Nb_3Sn	18	8–20	0.54	0.05	28	80–100	3.1	4
V_3Si	17	4	0.72	0.072	24.5	179	2.5	3.5
Nb_3Al	18.7	54			33	210	3	
Mo_3Re	15	10–30	0.43	0.03	3.5	140		
MgB_2	40	0.1–10	0.43	0.03	3.5–60	140	2.3 /7.2	5
Pnictides	30–55		0.5–0.9	30	50–135	200	10–20	2

Anne-Marie Valente-Feliciano, Supercond. Sci. Technol. **29**, 113002 (2016)

ここまでのまとめ（全部、この後で使います）

ロンドン方程式

$$\boxed{\frac{d^2B}{dx^2}=\frac{1}{\lambda^2}B}$$

超伝導体中の磁場分布や電流分布を計算できる

λを**ロンドン長**と呼ぶ

- 物質によって異なる
- 不純物濃度にも依存

超伝導リングを貫く磁束は量子化される

$$\phi=n\phi_0\ \ (n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$$

$$\boxed{\phi_0=\frac{h}{2e}=\frac{\pi\hbar}{e}=2.07\times10^{-15}\ \mathrm{Wb}}$$

Table 1. Superconducting parameters for some candidate materials considered for SRF applications.

Material	T_c (K)	ρ_n ($\mu\Omega$ cm)	$H_c(0)$ (T)	$H_{c1}(0)$ (T)	$H_{c2}(0)$ (T)	λ (nm)	Δ (meV)	ξ (nm)
Nb	9.23	2	0.2	0.18	0.28	40	1.5	35
NbN	16.2	70	0.23	0.02	15	200–350	2.6	3–5
NbTiN	17.3	35		0.03	15	150–200	2.8	5
Nb_3Sn	18	8–20	0.54	0.05	28	80–100	3.1	4
V_3Si	17	4	0.72	0.072	24.5	179	2.5	3.5
Nb_3Al	18.7	54			33	210	3	
Mo_3Re	15	10–30	0.43	0.03	3.5	140		
MgB_2	40	0.1–10	0.43	0.03	3.5–60	140	2.3 /7.2	5
Pnictides	30–55		0.5–0.9	30	50–135	200	10–20	2

熱力学的臨界磁場

$$\boxed{\frac{B_c^2}{2\mu_0}=E_c}$$

E_cは超伝導凝縮エネルギー

BCS理論を使えばE_cが分かって

$$\boxed{B_c(0)=\sqrt{\mu_0N_0}\,\Delta}$$

となる

3.5 下部臨界磁場 B_{c1}

※後で空洞性能の限界を論ずるときに使う

3.5 下部臨界磁場 $\boldsymbol{B_{c1}}$

実は、

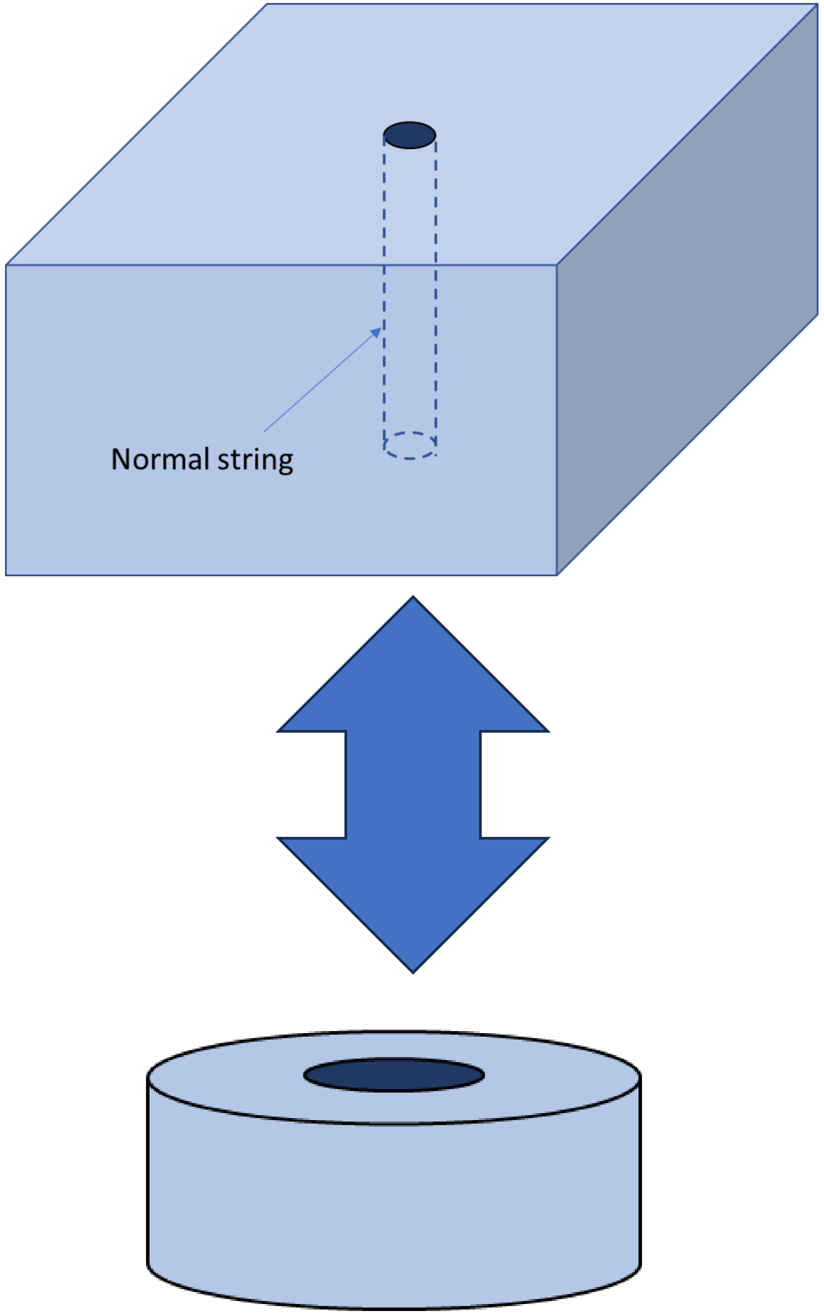
- 超伝導体は$B = B_c$で必ずしも常伝導に転移しない。

- 超伝導体はtype Iとtype IIに（type IIは更にtype II 1とtype II 2に）分けられ、$B = B_c$で常伝導に転移するのは、type I超伝導だけ（TiやAlはtype I）。

- 一方、**type II超伝導では、$\boldsymbol{B_c}$よりも低い磁場、下部臨界磁場$\boldsymbol{B_{c1}(< B_c)}$から磁束の部分的な侵入が始まり（磁束を完全に排除することを諦め）、それによりエネルギーが安定化し、$\boldsymbol{B_c}$よりも大きい磁場、上部臨界磁場$\boldsymbol{B_{c2}(> B_c)}$まで超伝導が生き延びられる**（NbやNbTi、Nb3Sn、NbN、NbTiNなどはtype II）。

3.5 下部臨界磁場 B_{c1}

type II超伝導では、**外部磁場を大きくしていくと、その内部に磁束を伴う糸状の常伝導領域（渦糸と呼ばれる）の形で磁束の部分的な侵入を受けいれ、磁場のエネルギーを安定化**させる。ここでは実験事実として受け入れることにする。



内部に糸状の常伝導領域(渦糸)を持つ超伝導体は第3.3節(磁束の量子化)で見た超伝導リングと本質的に同じ。
渦糸の磁束も$\phi = n\phi_0$（n=1,2,3,⋯)に量子化される。

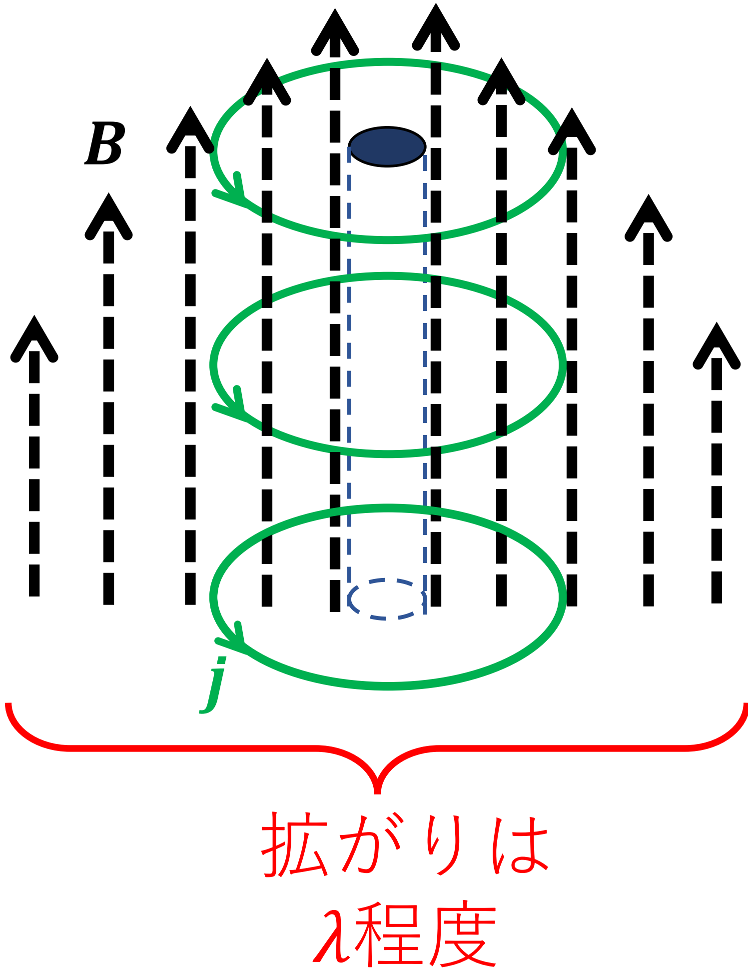
では、**その渦糸のエネルギーはどの程度か？**

問題4　渦糸のエネルギーを見積もろう

(1) ひとまず、渦糸が持つ磁束を$\boldsymbol{\phi = n\phi_0}$ **(n=1,2,3,…)** として、nの値は分からないものとし、渦糸のエネルギーを見積もろう

ヒント：渦糸の磁束もロンドン長λ程度の距離で減衰する（右図）。

(2) n=1の場合とn=2の場合のエネルギーを比較せよ



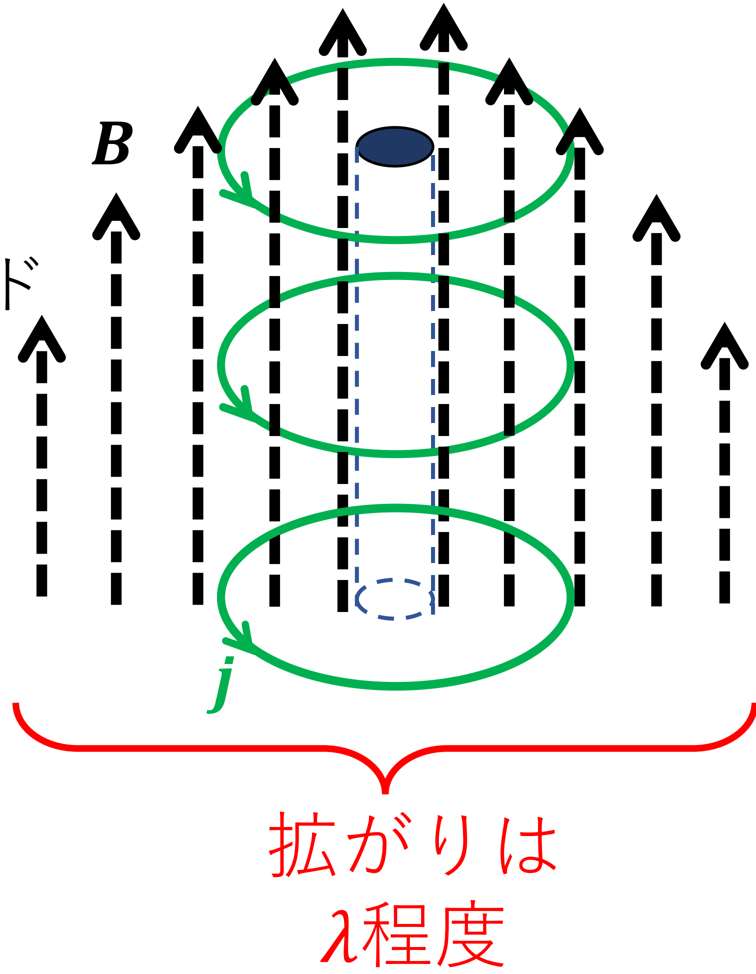
問題4（解）

(1) 渦糸の磁束の分布もロンドン方程式にしたがうから、ロンドン長λ程度の距離で減衰する。これより、磁束密度は大雑把に

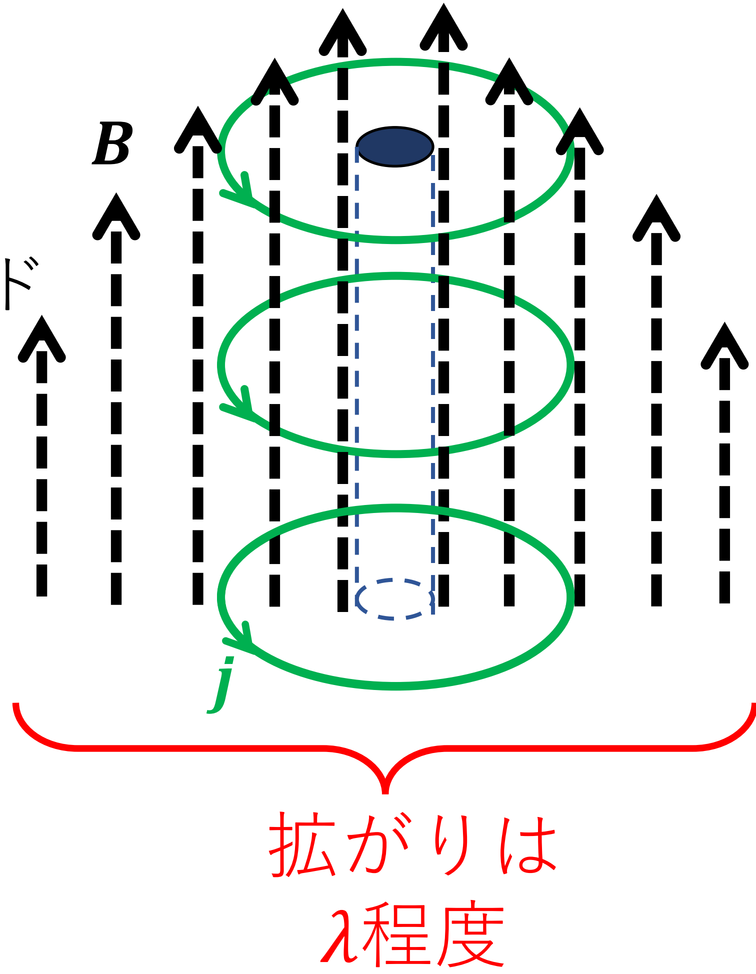
$$\mathrm{B}_\phi \sim \frac{n\phi_0}{\lambda^2}$$

と書ける。そうすると、渦糸のエネルギーは

$$\epsilon_\phi \sim \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} \times \lambda^2 L = \frac{n^2\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2} L$$



問題4（解）



(1) 渦糸の磁束の分布もロンドン方程式にしたがうから、ロンドン長λ程度の距離で減衰する。これより、磁束密度は大雑把に

$$B_{\phi} \sim \frac{n\phi_0}{\lambda^2}$$

と書ける。そうすると、渦糸のエネルギーは

$$\epsilon_{\phi} \sim \frac{B_{\phi}^2}{2\mu_0} \times \lambda^2 L = \frac{n^2\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2} L$$

(2)よって、1磁束量子(n=1)を運ぶ渦糸のエネルギーは

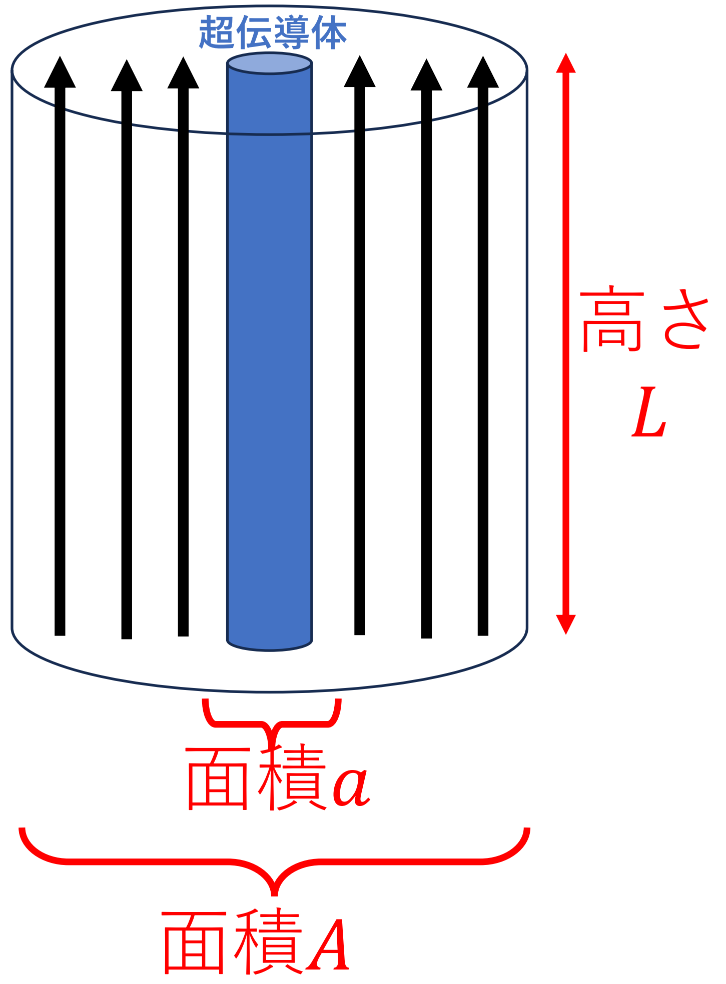
$$\boxed{\epsilon_{\phi_0} \sim \frac{\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2} L}$$

2磁束量子(n=2)を運ぶ渦糸のエネルギーは $\epsilon_{2\phi_0} \sim \frac{4\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2} L = 4\epsilon_{\phi_0}$

となり、n=1の磁束を2個作るよりもコストが大きい。→ 渦糸の磁束は$\boldsymbol{\phi = \phi_0}$

問題5

次に、渦糸が超伝導体に入ることで磁場のエネルギーはどの程度安定化されるかを見積もろう



ヒント：全磁束B × Aのうちϕ_0が超伝導体に入ると超伝導体外部の磁束密度は

$$\frac{BA - \phi_0}{A - a} \simeq B\left(1 + \frac{a}{A} - \frac{\phi_0}{AB}\right)$$

となる

問題5（解）

超伝導体外部の磁束密度は

$$\frac{BA-\phi_0}{A-a} \simeq B\left(1+\frac{a}{A}-\frac{\phi_0}{AB}\right)$$

となるから、磁束のエネルギーは

$$\frac{B^2}{2\mu_0}\left(1+\frac{a}{A}-\frac{\phi_0}{AB}\right)^2 \times (A-a)L \simeq \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}(A+a)L}_{\text{全磁束を排除したときのエネルギー（第3.4節で見た）}} \underbrace{-\frac{B\phi_0}{\mu_0}L}_{\text{渦糸を受け入れたことによる補正）}}$$

全磁束を排除したときのエネルギー（第3.4節で見た）

渦糸を受け入れたことによる補正）

したがって、
渦糸を受け入れたことによる得は

$$\boxed{-\frac{B\phi_0}{\mu_0}L}$$

3.5 下部臨界磁場 B_{c1}

問題4

問題5

渦糸を受け入れることで損する分 $\epsilon_{\phi_0} \sim \frac{\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2} L$ と、得する分$-\frac{B\phi_0}{\mu_0} L$が相殺する磁場が下部臨界磁場である。すなわち、

$$\boxed{B_{c1} = \frac{\mu_0 \epsilon_{\phi_0}}{\phi_0} \simeq \frac{\phi_0}{\lambda^2}}$$

3.5 下部臨界磁場 B_{c1}

渦糸を受け入れることで損する分 $\epsilon_{\phi_0} \sim \frac{\phi_0^2}{2\mu_0\lambda^2}L$ と、得する分$-\frac{B\phi_0}{\mu_0}L$が相殺する磁場が下部臨界磁場である。すなわち、

$$\boxed{B_{c1} = \frac{\mu_0\epsilon_{\phi_0}}{\phi_0} \simeq \frac{\phi_0}{\lambda^2}}$$

ロンドン方程式をもう少し真面目に解いて渦糸のエネルギーを評価すると $\epsilon_{\phi_0} = \frac{\phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2}\ln\frac{\lambda}{\xi}$ が得られる。これを用いると、

$$\boxed{B_{c1} = \frac{\mu_0\epsilon_{\phi_0}}{\phi_0} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2}\ln\frac{\lambda}{\xi}}$$

ただし、$\frac{\lambda}{\xi} \gg 1$

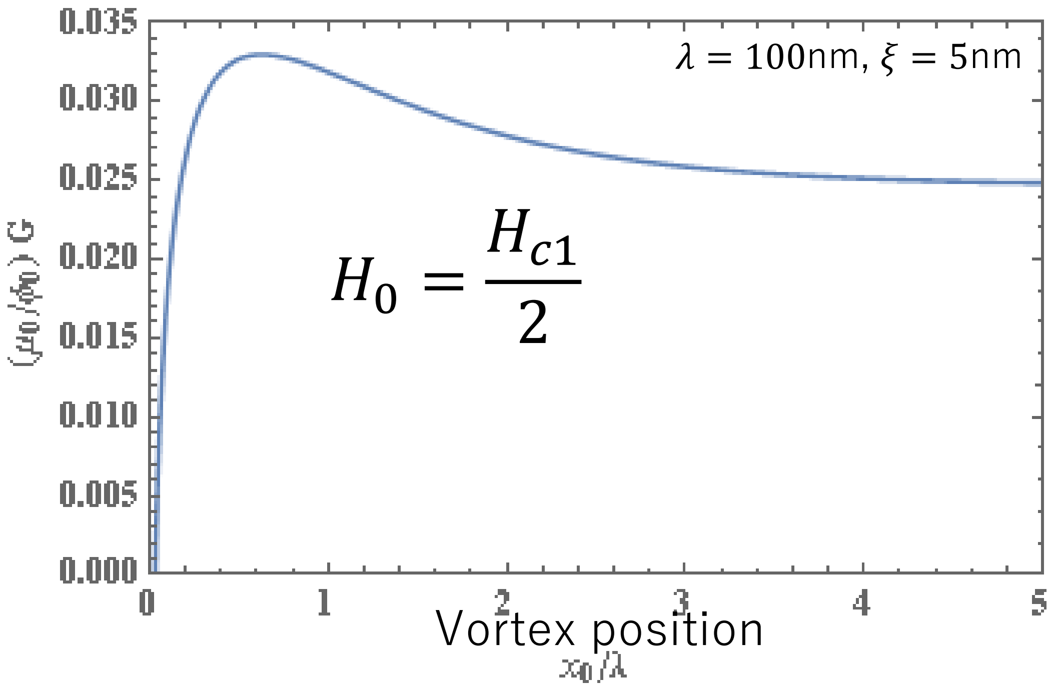
となる。ここで、ξはGLコヒーレンス長といい、超伝導が破壊されている領域から、どれくらい離れれば超伝導が回復するかを表す量である（常伝導の糸の太さに対応）。

3.5 下部臨界磁場 B_{c1}

補足

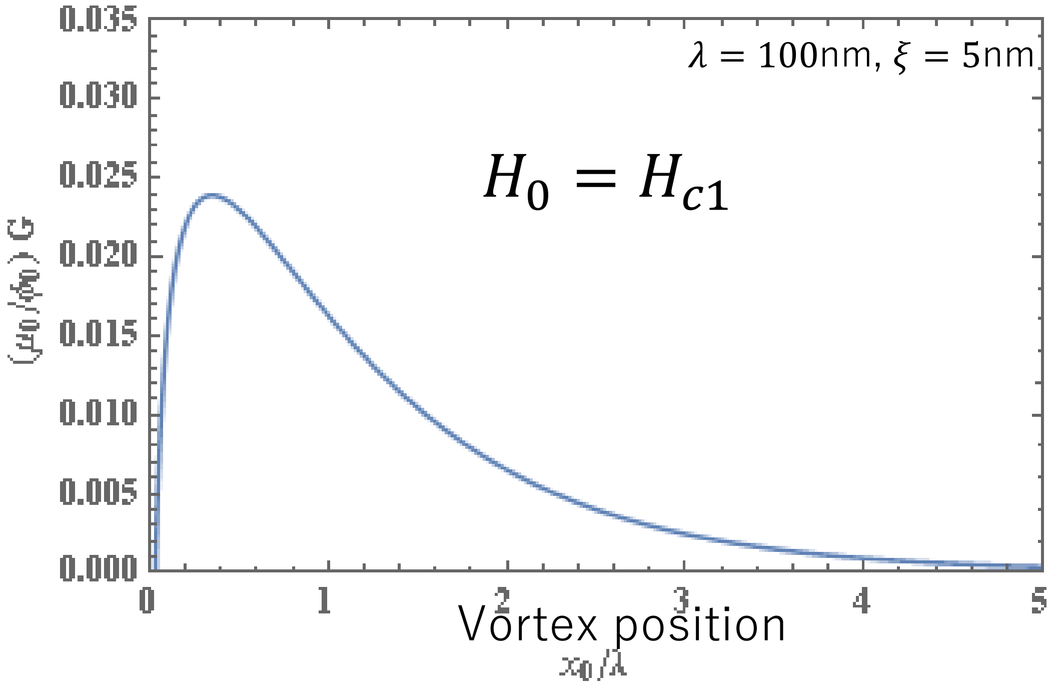
When $H_0 < H_{c1}$, we have $G(0) < G(\infty)$. This means that a superconductor containing a vortex is unstable.

Vortex state is unstable.
Meissner state is stable.



When $H_0 = H_{c1}$, we have $G(0) = G(\infty)$. This means that a superconductor containing a vortex is as stable as that without a vortex.

Vortex state is as stable as Meissner state.



問題6

Nb_3Snの下部臨界磁場の値を評価せよ。

ただし、

$$B_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}$$

（ただし、$\frac{\lambda}{\xi} \gg 1$）

および

$$\begin{cases} \phi_0 = 2.07 \times 10^{-15}\ \mathrm{Wb} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N{\cdot}A^{-2}} \\ \lambda = 100\ \mathrm{nm} \\ \xi = 4\ \mathrm{nm} \\ \ln(25) \simeq 3 \end{cases}$$

を用いて良い。

3.5 下部臨界磁場 $\boldsymbol{B_{c1}}$

問題6（解）

数値を代入すると

$$B_{c1} \simeq 0.05\ \mathrm{T} = 50\ \mathrm{mT}$$

が得られる。**ただし、不純物の量によってλやξは変化するので、$\boldsymbol{B_{c1}}$も変化する。**

Table 1. Superconducting parameters for some candidate materials considered for SRF applications.

Material	T_c (K)	ρ_n ($\mu\Omega$ cm)	$H_c(0)$ (T)	$H_{c1}(0)$ (T)	$H_{c2}(0)$ (T)	λ (nm)	Δ (meV)	ξ (nm)
Nb	9.23	2	0.2	0.18	0.28	40	1.5	35
NbN	16.2	70	0.23	0.02	15	200–350	2.6	3–5
NbTiN	17.3	35		0.03	15	150–200	2.8	5
$\boxed{Nb_3Sn}$	18	8–20	0.54	$\boxed{0.05}$	28	80–100	3.1	4
V_3Si	17	4	0.72	0.072	24.5	179	2.5	3.5
Nb_3Al	18.7	54			33	210	3	
Mo_3Re	15	10–30	0.43	0.03	3.5	140		
MgB_2	40	0.1–10	0.43	0.03	3.5–60	140	2.3 /7.2	5
Pnictides	30–55		0.5–0.9	30	50–135	200	10–20	2

他の材料は、例えば、

- Nb: $B_{c1} \simeq 180\mathrm{mT}$
- NbN: $B_{c1} \simeq 20\mathrm{mT}$

など。

注意：上で用いた公式は$\lambda \gg \xi$でないと使えないので、**同じ公式は高純度ニオブには適用できない**（ただし不純物を多く含む場合は$\lambda \gg \xi$となって適用できるようになる）。

3.6 対破壊電流密度

※空洞性能の限界を論ずる際に現れる過熱磁場の理解に必要
また、次章で行う積層薄膜についての計算にも現れる

3.6 対破壊電流密度　London理論に基づく対破壊電流の見積り

単位体積あたりの超伝導電子の運動エネルギー$\frac{1}{2}n_s m v_s^2$が凝縮エネルギー密度 $\mathrm{E_c} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}$と等しくなる辺りが超電流の最大値（対破壊電流密度）を決める。これより、

$$\boxed{J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}}$$

3.6 対破壊電流密度

問題7

(1) 単位体積あたりの超伝導電子の運動エネルギー$\frac{1}{2}n_s m v_s^2$は電流密度J_sを用いて

$$\frac{1}{2}n_s m v_s^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \lambda^2 J_s^2$$

と書けることを示せ。

ただし　$J_s = n_s(-e)v_s$　　$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$

(2) これが凝縮エネルギー$\mathrm{E_c} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}$と等しいとして $J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}$ が得られる。これが対破壊電流の大雑把な値を与える。高純度ニオブのT=0での対破壊電流を見積もれ。$B_c = 0.2\ \mathrm{T}$, $\lambda = 40\ \mathrm{nm}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$を用いて良い。

問題7（解）

$$(1)\ \frac{1}{2}n_s m v_s^2 = \frac{1}{2}n_s m\frac{J_s^2}{n_s^2 e^2} = \frac{1}{2}\mu_0\frac{m}{\mu_0 n_S e^2}J_s^2 = \frac{1}{2}\mu_0\lambda^2 J_s^2$$

$$(2)\ J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0\lambda} \sim \frac{0.2}{10^{-6}\times 40\times 10^{-9}}\ \mathrm{Am^{-2}} \sim 10^{12}\ \mathrm{Am^{-2}} = 10^{8}\ \mathrm{Acm^{-2}}$$

注：ニオブ空洞内面のマイクロ波磁場の世界記録は約200mT(=0.2T)で、ほぼB_c程度である。すなわち、内面を流れる電流はほぼ対破壊電流程度であり、上で見積もったような電流が流れている。

3.6 対破壊電流密度

London理論に基づく対破壊電流の見積り

単位体積あたりの超伝導電子の運動エネルギー$\frac{1}{2}n_s m v_s^2$が凝縮エネルギー密度 $\mathbf{E_c} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}$と等しくなる辺りが超電流の最大値（対破壊電流密度）を決める。これより、

$$\boxed{J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}}$$

3.6 対破壊電流密度　London理論に基づく対破壊電流の見積り

単位体積あたりの超伝導電子の運動エネルギー$\frac{1}{2}n_s m v_s^2$が凝縮エネルギー密度 $\mathrm{E_c} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}$と等しくなる辺りが超電流の最大値（対破壊電流密度）を決める。これより、

$$\boxed{J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}}$$

注意：このような非常に単純な議論からオーダーの見積りが可能であるが、あくまで、**大雑把な見積もり**である事に注意。**London理論は対破壊効果（超流動運動量の増加とともに超流動密度n_sが減少する効果）を無視した近似理論であるため、 London理論では対破壊電流の計算は<u>不可能</u>である。**Tc付近でのJ_dはGL理論で計算できる。

$$J_{dp}(T)\Big|_{T\simeq T_c} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}\Big|_{T\simeq T_c} = 0.544 \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}\Big|_{T\simeq T_c}$$

3.6 対破壊電流密度　London理論に基づく対破壊電流の見積り

単位体積あたりの超伝導電子の運動エネルギー$\frac{1}{2}n_s m v_s^2$が凝縮エネルギー密度 $\mathrm{E_c} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}$と等しくなる辺りが超電流の最大値（対破壊電流密度）を決める。これより、

$$\boxed{J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}}$$

注意：このような非常に単純な議論からオーダーの見積りが可能であるが、あくまで、**大雑把な見積もり**である事に注意。**London理論は対破壊効果（超流動運動量の増加とともに超流動密度n_sが減少する効果）を無視した近似理論であるため、 London理論では対破壊電流の計算は<u>不可能</u>である。**Tc付近でのJ_dはGL理論で計算できる。

$$J_{dp}(T)\Big|_{T\simeq T_c} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{B_c}{\mu_0\lambda}\Big|_{T\simeq T_c} = 0.544\,\frac{B_c}{\mu_0\lambda}\Big|_{T\simeq T_c}$$

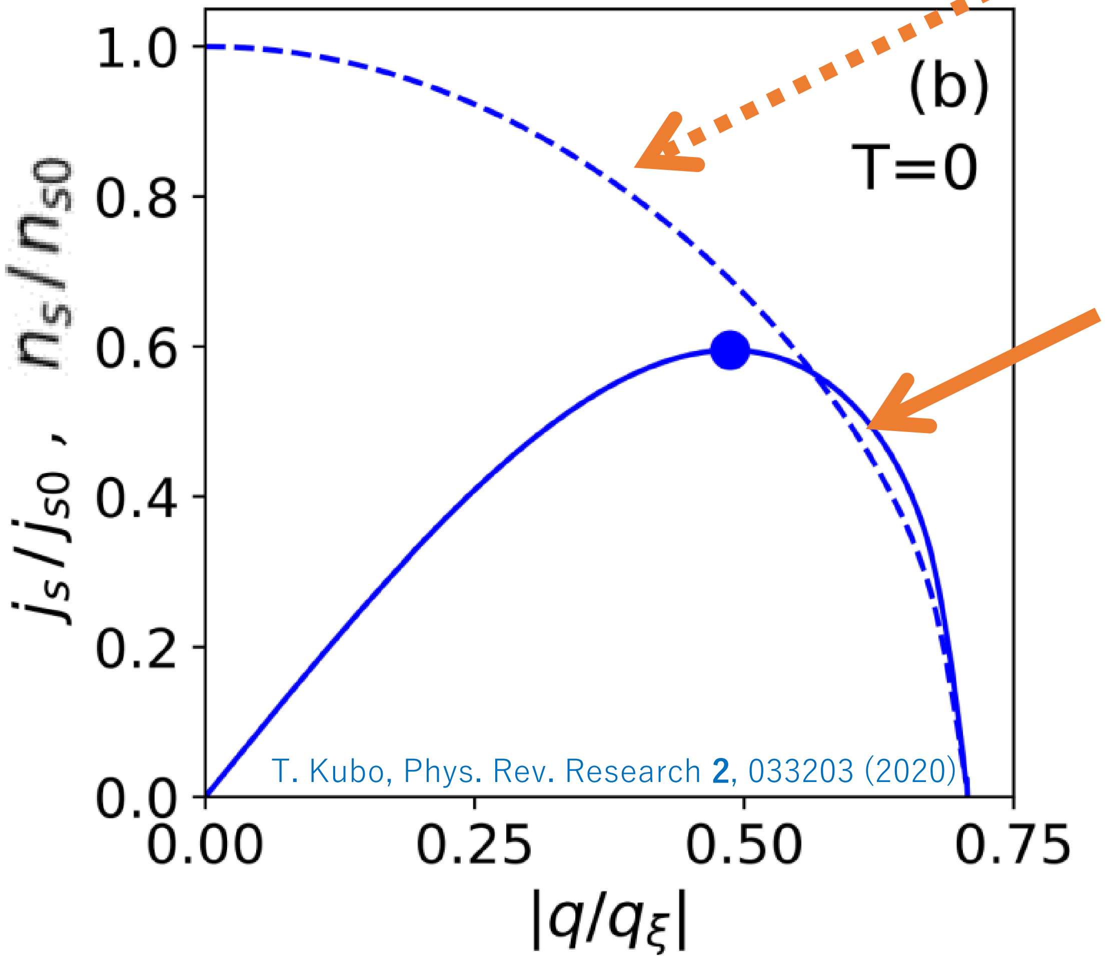
$T \ll T_c$を含む任意の温度（$0 < T < T_c$）でのJ_dを計算するには**BCS理論を使わねばならない**。これについては後のページで補足する。

3.6 対破壊電流密度

補足

BCS理論によると、超流動速度の増大とともに超伝導の破壊が進む

電流密度の規格化因子は、$j_{s0} = \frac{H_{c0}}{\lambda_0}$ で、
H_{c0}は T=0 かつ 電流ゼロにおけるBCS超伝導体の熱力学的臨界磁場
λ_0は T=0 かつ電流ゼロにおけるBCS超伝導体のロンドン長



点線

超流動運動量($\hbar q = 2mv_s$)の増加とともに超流動密度$\mathrm{n_s}$(点線)は単調に減少する。

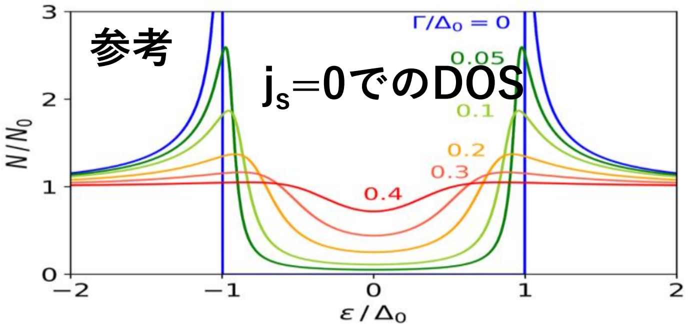
実線

$j_s = \mathrm{e n_s v_s}$だから、当然 $|q|$ ($\propto v_s$)とともに超電流j_s(実線)は増大する。しかし、次第に超流動密度$\mathrm{n_s}$の減少が支配的になり、j_sは増加しなくなる： j_sは最大値をとる。

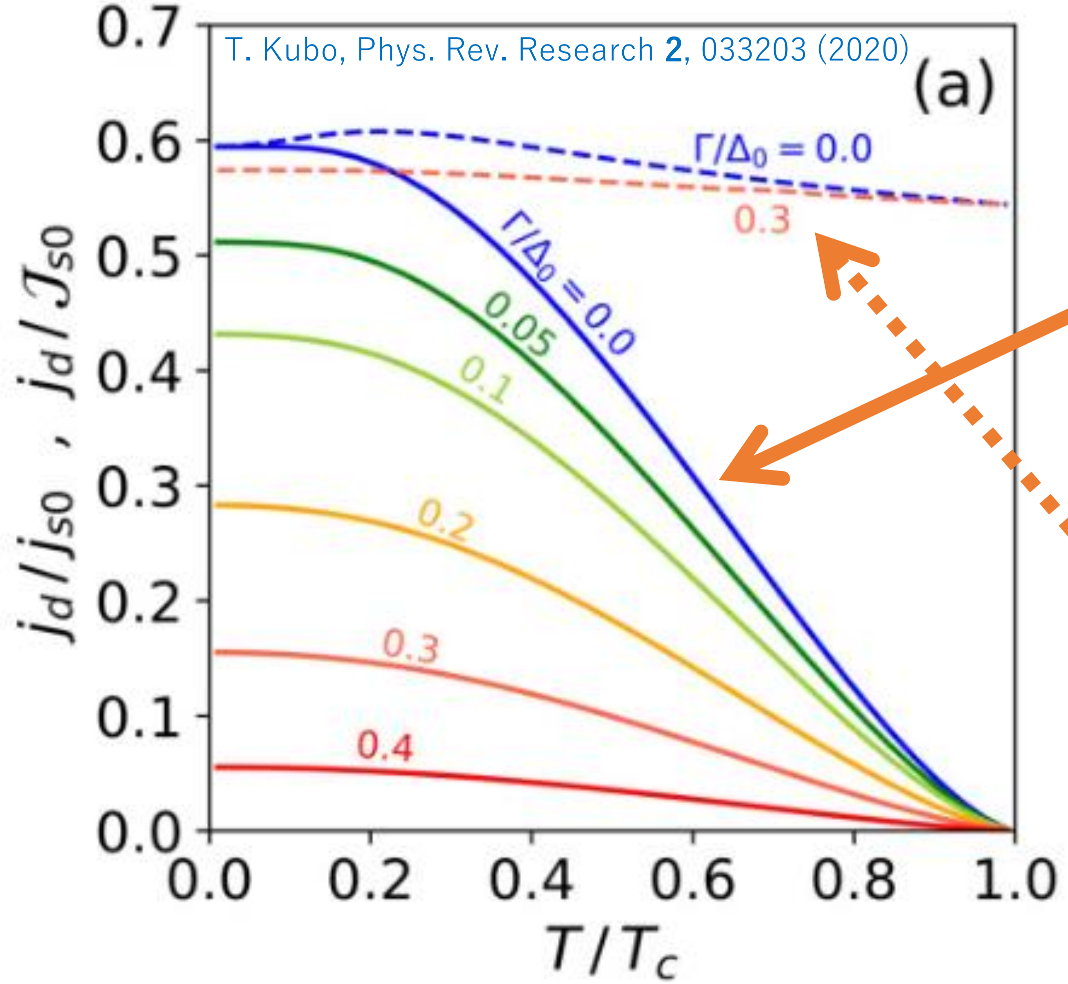
このj_sの最大値(●)が**対破壊電流j_d**である。 左の図では $j_d(0) = 0.595\frac{H_c(0)}{\lambda_0}$

3.6 対破壊電流密度

補足



対破壊電流密度(Depairing current density)の温度依存性



実線は、対破壊電流密度$j_d(\Gamma,T)$の温度依存。$j_{s0}=\frac{H_{c0}}{\lambda_0}$で規格化している。**$j_d$はΓとTの単調減少関数**。

点線は、$j_d(\Gamma,T)$と$\frac{H_c(\Gamma,T)}{\lambda(0,\Gamma,T)}$の比の温度依存。

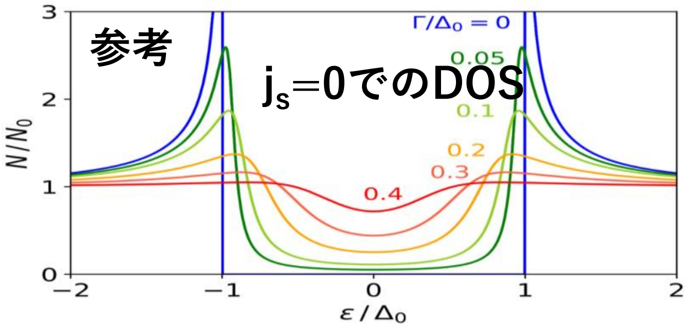
T~TcでGLに基づく有名な結果(0.544)を再現する。

T=0では

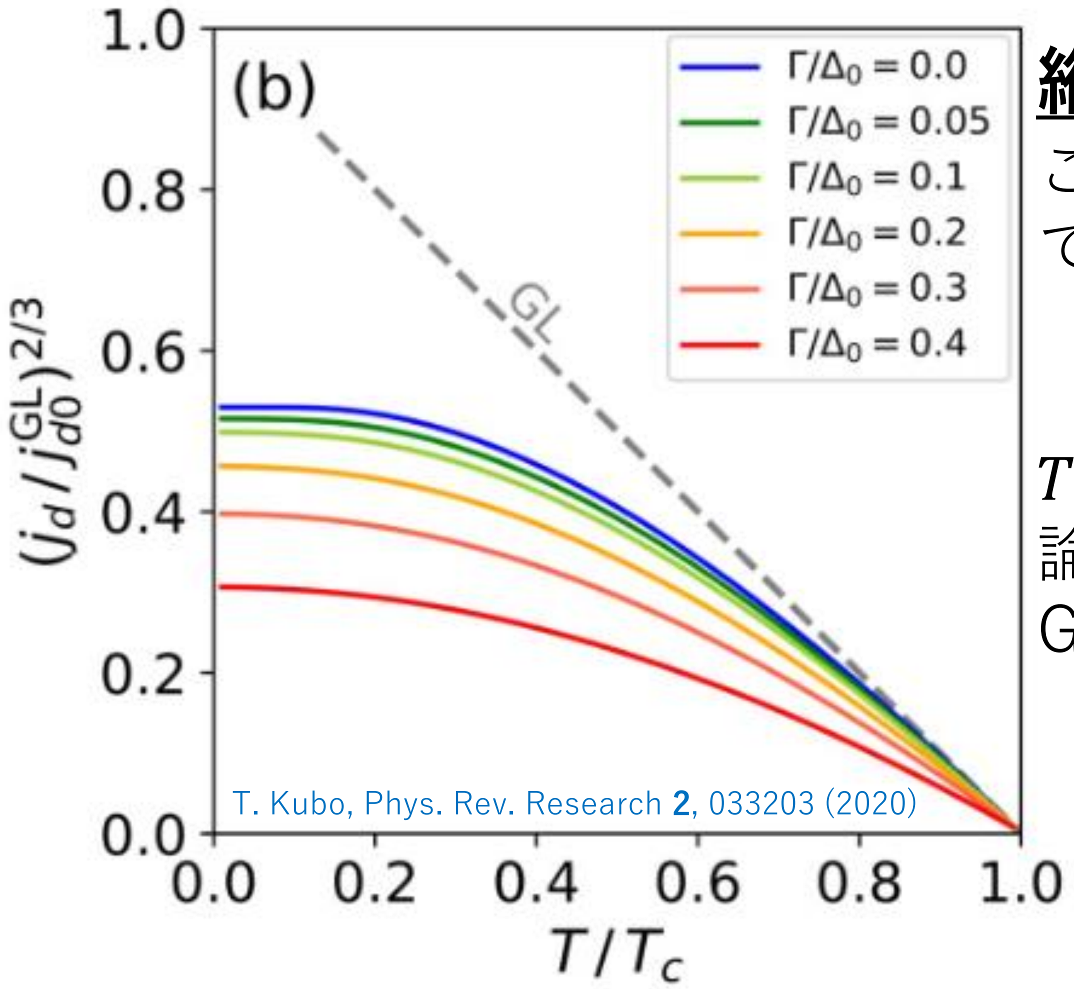
$$j_d(0)=0.595\,\frac{H_c(0)}{\lambda_0}$$

3.6 対破壊電流密度

補足



ついでに、GL理論(点線)の対破壊電流と比較



縦軸は、$j_d(\Gamma,T)$をj_{d0}^{GL}で規格化した値の2/3乗。
ここで j_{d0}^{GL}はGLの対破壊電流をT=0まで外挿した値で

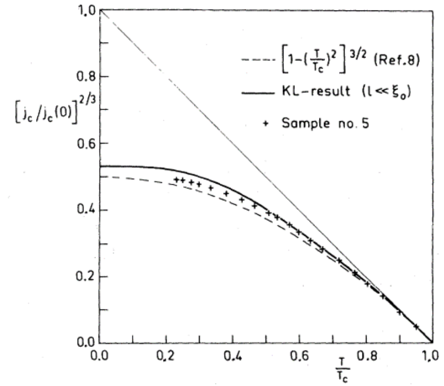
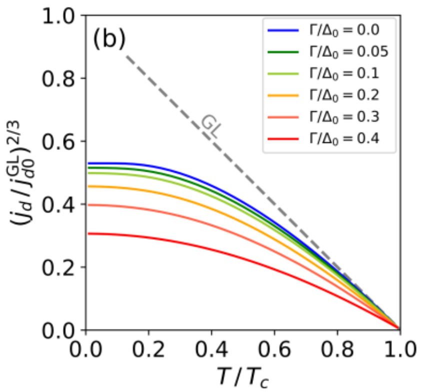
$$j_{d0}^{\rm GL}=\frac{16j_{s0}}{21\zeta(3)}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{e^{\gamma_E}T_c}{T_{c0}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8\pi^2\sqrt{2\pi}}{21\zeta(3)e}\sqrt{\frac{(k_BT_c)^3}{\hbar v_F\rho(\rho/\tau)}}$$

$T\simeq T_c$ではGLに基づく計算(**灰色の点線**)とBCS理論の結果(**カラー**の実線)が一致するが、低温ではGLは正しくない。

対破壊電流の実験値は、例えば、J. Romijn, T. M. Klapwijk, M. J. Renne, and J. E. Mooij, Phys.Rev. B **26**, 3648 (1982); A. Y. Rusanov, M. B. S. Hesselberth, and J. Aarts, Phys. Rev. B **70**, 024510 (2004); Y. Sun, H. Ohnuma, S. Ayukawa, T. Noji, Y. Koike, T.Tamegai, and H. Kitano, Phys. Rev. B **101**, 134516 (2020)

補足

Summary table (dirty limit)

$T \to 0$	$j_d(0) = 0.595\dfrac{H_c(0)}{\lambda_0}$	K. Maki, Prog. Theor. Phys. **29**, 10 (1963) See also J. R. Clem and V. G. Kogan, Phys. Rev. B **86**, 174521 (2012); T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 013302 (2020); T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 033203 (2020).
$T \simeq T_c$	$j_d(T)\Big\vert_{T\simeq T_c} = 0.544\dfrac{H_c(T)}{\lambda(T)}\Big\vert_{T\simeq T_c}$	V. L. Ginzburg, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **118**, 464 (1958) See also Tinkham's book
$0 < T < T_c$		M. Yu Kupriyanov and V. F. Lukichev, Sov. J. Low Temp. Phys. 6, 210 (1980) See also J. Romijn et al., Phys. Rev. B **26**, 3648 (1982), Figure 4 T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 013302 (2020), Figure 4 T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 033203 (2020), Figure 8
Effects of Subgap states		T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 013302 (2020); T. Kubo, Phys. Rev. Research **2**, 033203 (2020).

3.7 過熱磁場 (superheating field)

空洞の加速性能の理論限界に対応する量

3.7 過熱磁場(superheating field)

- 既に見たとおり、超伝導体は$0 \leq B < B_{c1}$でマイスナー状態にあるが、$B > B_{c1}$では渦糸状態が安定になる。

3.7 過熱磁場(superheating field)

- 既に見たとおり、超伝導体は$0 \leq B < B_{c1}$でマイスナー状態にあるが、$B > B_{c1}$では渦糸状態が安定になる。

- しかし、$B > B_{c1}$であっても渦糸状態になるとは限らない。電子レンジに入れた水が、温度T> 100 ℃となっても必ずしも沸騰して気体（安定状態）にならず、液体（準安定状態）で居続けられる事と同様。

3.7 過熱磁場(superheating field)

- 既に見たとおり、超伝導体は$0 \leq B < B_{c1}$でマイスナー状態にあるが、$B > B_{c1}$では渦糸状態が安定になる。

- しかし、$B > B_{c1}$であっても渦糸状態になるとは限らない。電子レンジに入れた水が、温度T>100 ℃となっても必ずしも沸騰して気体（安定状態）にならず、液体（準安定状態）で居続けられる事と同様。

- 超伝導体は$B > B_{c1}$でも、安定な渦糸状態ではなく、準安定状態であるマイスナー状態に居座り続けることが可能である。マイスナー状態が真に不安定な状態となる磁場を過熱磁場（superheating field）B_{sh}と呼ぶ。これはちゃんと計算できる量である。

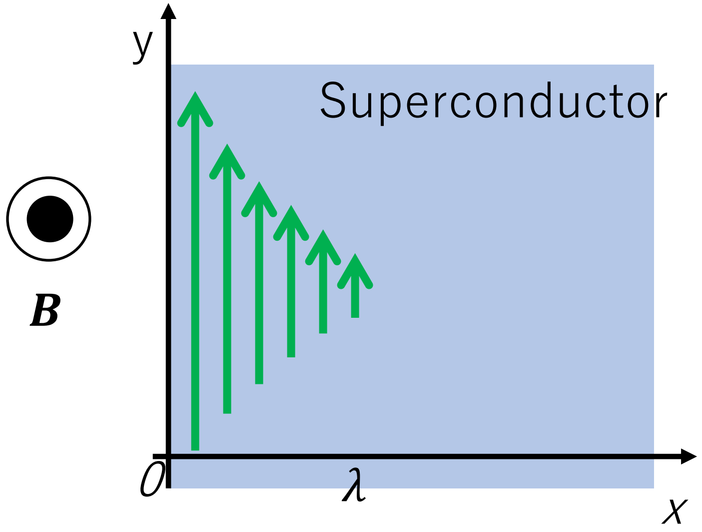
3.7 過熱磁場(superheating field)

再び半無限の超伝導体を考えよう[問題1参照]。磁場B_0を印加すると磁場分布は$B = B_0\, e^{-x/\lambda}$、電流分布$J = J_0\, e^{-x/\lambda}$の遮蔽電流が流れる（ここで、$J_0 = B_0/\mu_0\lambda$）。

[問題1]を思い出そう

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}$$

$$j(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda} e^{-x/\lambda}$$



3.7 過熱磁場(superheating field)

再び半無限の超伝導体を考えよう[問題1参照]。磁場B_0を印加すると磁場分布は$B = B_0\, e^{-x/\lambda}$、電流分布$J = J_0\, e^{-x/\lambda}$の遮蔽電流が流れる（ここで、$J_0 = B_0/\mu_0\lambda$）。

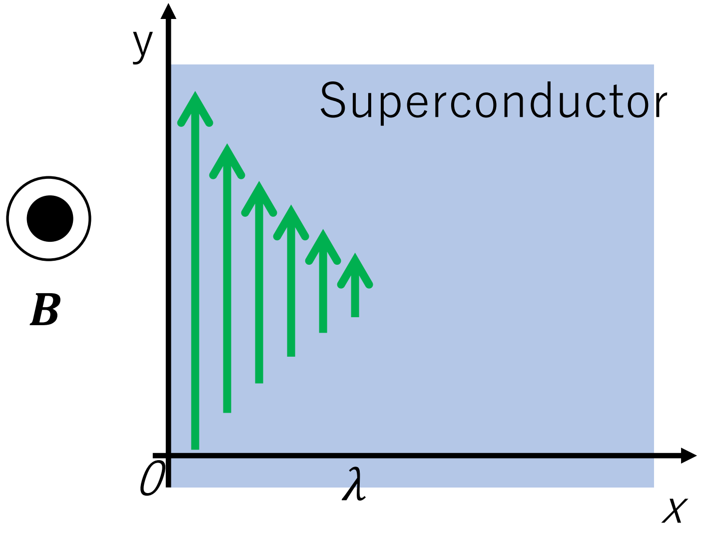
最表面を流れる電流$J_0 = B_0/\mu_0\lambda$が対破壊電流$J_{dp} \sim B_c/\mu_0\lambda$程度になるとき、すなわち、$B_0 \sim B_c$となるとき、超伝導体表面は真に不安定になる。これより、

$$\boxed{B_{sh} \sim B_c}$$

[問題1]を思い出そう

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}$$

$$j(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda} e^{-x/\lambda}$$



3.7 過熱磁場(superheating field)

再び半無限の超伝導体を考えよう[問題1参照]。磁場B_0を印加すると磁場分布は$B = B_0\, e^{-x/\lambda}$、電流分布$J = J_0\, e^{-x/\lambda}$の遮蔽電流が流れる（ここで、$J_0 = B_0/\mu_0\lambda$）。

最表面を流れる電流$J_0 = B_0/\mu_0\lambda$が対破壊電流$J_{dp} \sim B_c/\mu_0\lambda$程度になるとき、すなわち、$B_0 \sim B_c$となるとき、超伝導体表面は真に不安定になる。これより、

$$\boxed{B_{sh} \sim B_c}$$

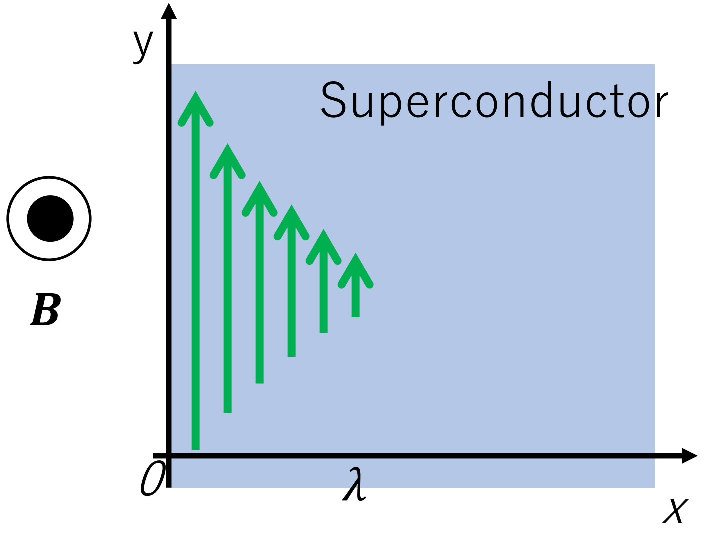
ロンドン理論における見積もりは（Bean-Livingstoneバリアというものを考えることで)

$$B_{sh} = B_v = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_c = 0.71 B_c$$

[問題1]を思い出そう

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda}$$

$$j(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda} e^{-x/\lambda}$$

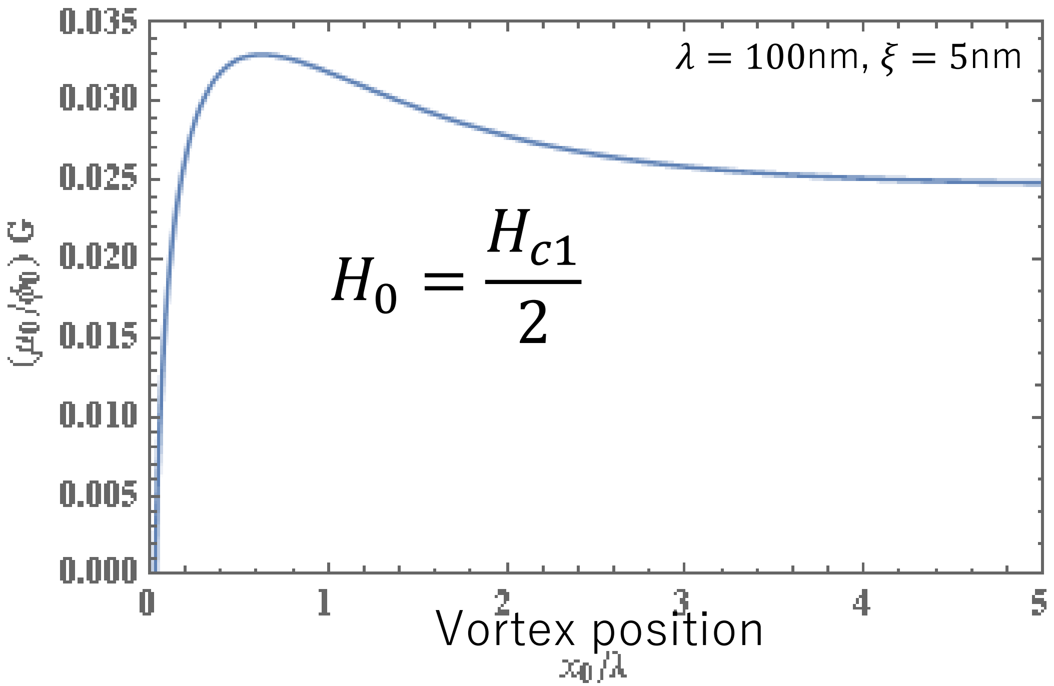


補足

Lower Critical Field H_{c1}

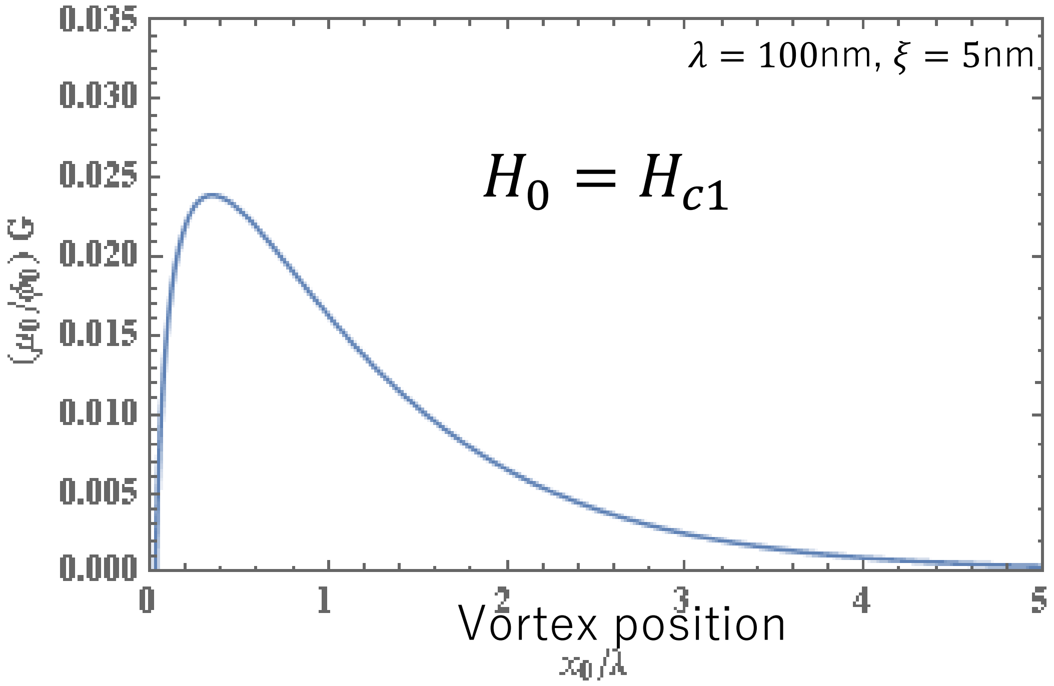
When $H_0 < H_{c1}$, we have $G(0) < G(\infty)$. This means that a superconductor containing a vortex is unstable.

Vortex state is unstable.
Meissner state is stable.



When $H_0 = H_{c1}$, we have $G(0) = G(\infty)$. This means that a superconductor containing a vortex is as stable as that without a vortex.

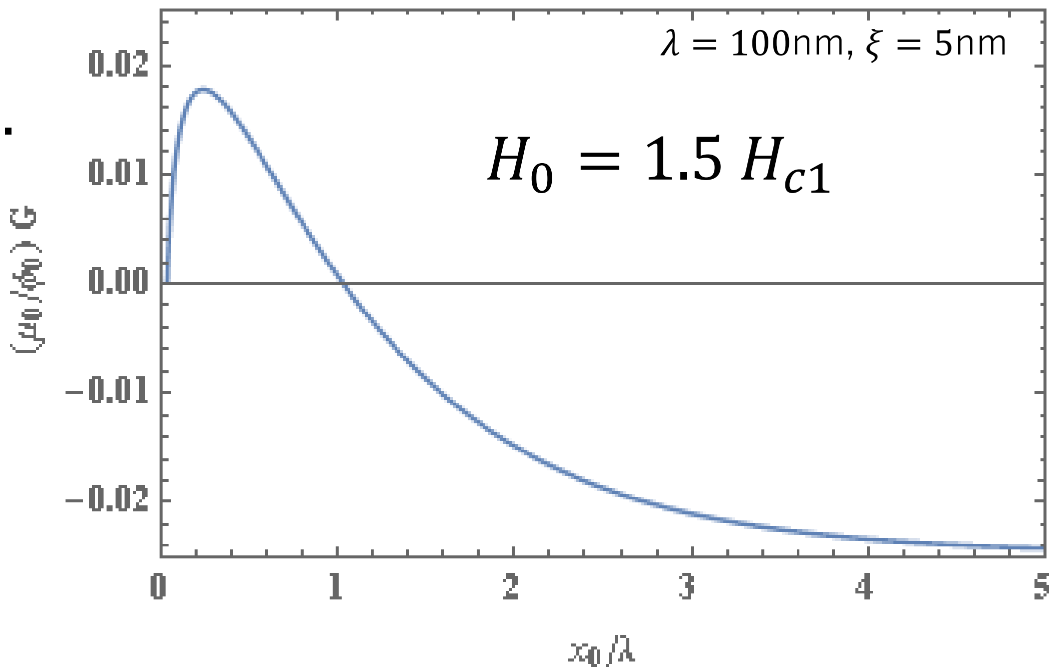
Vortex state is as stable as Meissner state.



補足

Superheating Field H_{sh}

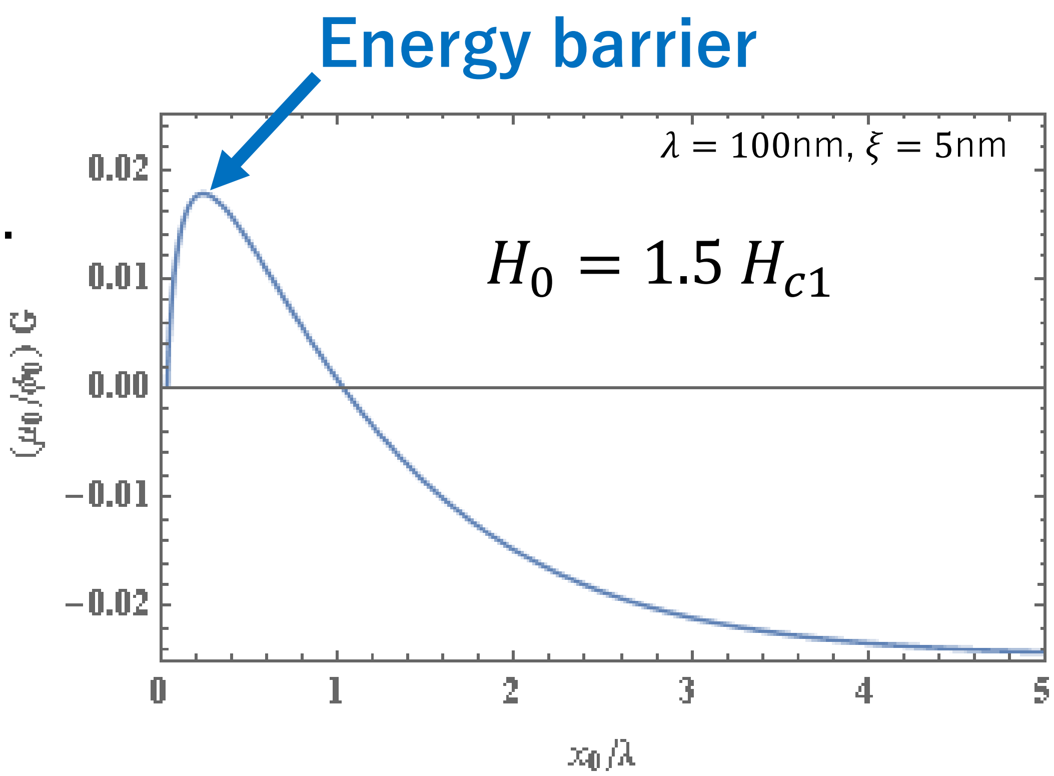
Let us consider $H_0 > H_{c1}$,
where we have $G(0) > G(\infty)$.
This means a superconductor containing a vortex is more stable than that without a vortex.
Vortex state is more stable than Meissner state.



補足

Superheating Field H_{sh}

Let us consider $H_0 > H_{c1}$, where we have $G(0) > G(\infty)$. This means a superconductor containing a vortex is more stable than that without a vortex.
Vortex state is more stable than Meissner state.



Meissner state is still "**metastable**".
It is not the global minimum but a local minimum.
There is an "**energy barrier**".

補足

Superheating Field H_{sh}

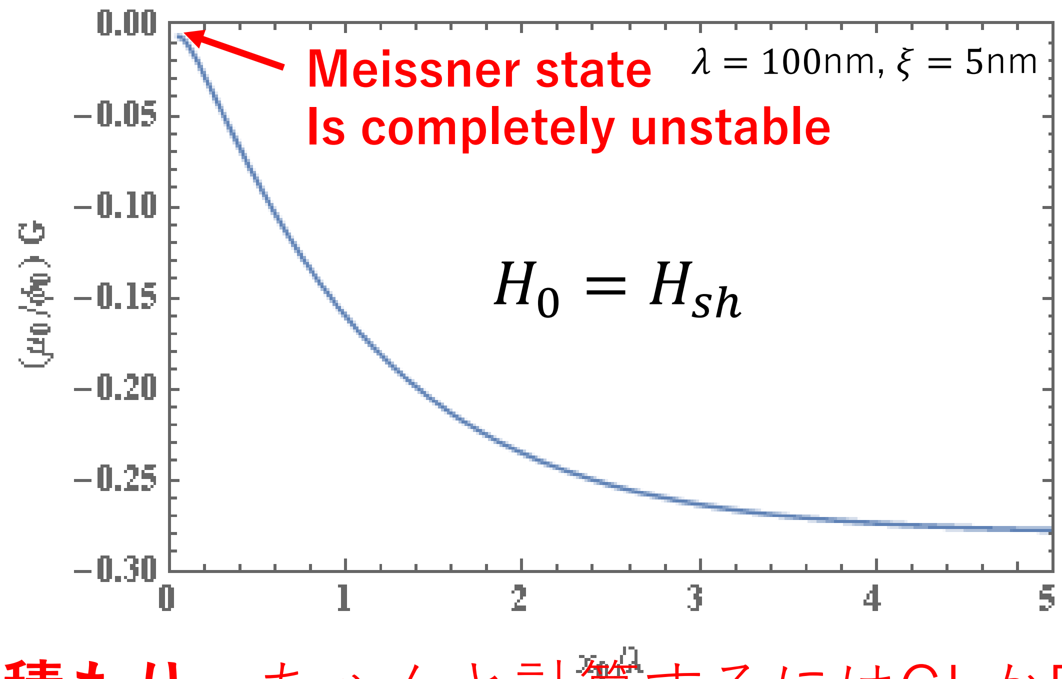
When does the Meissner state become **completely unstable**?
It is when H_0 exceeds the superheating field H_{sh} at which the energy barrier disappears: $G(x_0)$ is flat at $x_0 = 0$.
Note here our formulation is not applicable to the vicinity of the vortex core: we have a short distance cutoff $\sim \xi$. So we examine the condition $G(x_0)$ is flat at $x_0 = \xi$ instead of $x_0 = 0$.
Then

$$G'(\xi) = 0 \quad \text{or}$$

$$B_{sh} = \mu_0 H_{sh} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda\xi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} B_c = 0.71 B_c$$

Here the GL result $B_c = \frac{\phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi}$ is used



これはあくまでロンドン理論に基づく**見積もり**。ちゃんと計算するにはGLかBCSが必要

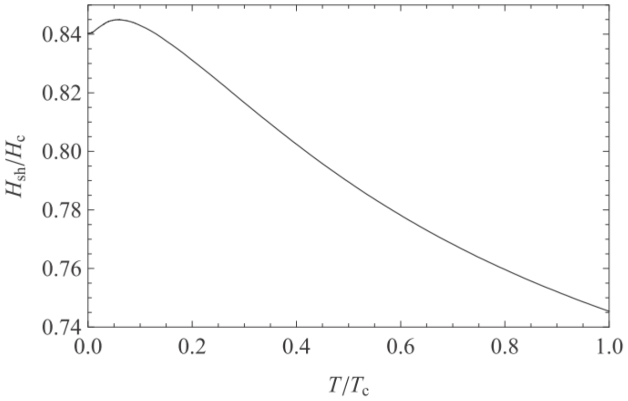
3.7 過熱磁場(superheating field)

補足

$\frac{\lambda}{\xi} \gg 1$ and clean limit

(e.g., clean-limit Nb_3Sn, clean-limit NbN etc.)

* clean limit Nb has $\frac{\lambda}{\xi} \sim 1$. So, these formulas are **not** applicable to Nb

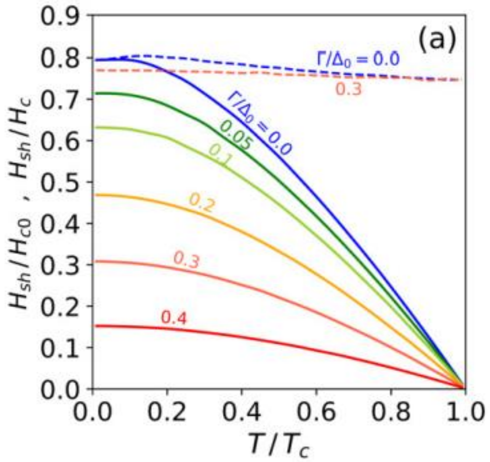
$T \to 0$	$H_{sh}(0) = 0.84 H_c(0)$	V. P. Galaiko, Sov. Phys. JETP **23**, 475 (1966)
$0 < T < T_c$	$H_{sh}(\mathrm{T}) =$ 	G. Catelani and J. P. Sethna, Phys. Rev. B **78**, 224509 (2008) F. Pei-Jen Lin and A. Gurevich, Phys. Rev. B **85**, 054513 (2012)
$T \simeq T_c$	$H_{sh}(T)\Big\vert_{T \simeq T_c} = \frac{\sqrt{5}}{3} H_c(T)\Big\vert_{T \simeq T_c} = 0.745 H_c(T)\Big\vert_{T \simeq T_c} \quad (\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \to \infty)$	V. P. Galaiko, Sov. Phys. JETP **23**, 475 (1966) L. Kramer, Phys. Rev. **170**, 475 (1968)
	$H_{sh}(T)\Big\vert_{T \simeq T_c} = \left(1 + \frac{0.731}{\sqrt{\kappa}}\right) \frac{\sqrt{5}}{3} H_c(T)\Big\vert_{T \simeq T_c} \quad (\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \gg 1)$	P. V. Christiansen, Solid State Commun. **7**, 727 (1969) M. K. Transtrum, G. Catelani, and J. P. Sethna, Phys. Rev. B **83**, 094505 (2011)

補足

Dirty limit

(e.g., dirty Nb_3Sn, dirty NbN, dirty Nb etc.)

* These results are applicable to dirty Nb (e.g., doped Nb)

$T \to 0$	$H_{sh}(0) = 0.795 H_c(0)$	T. Kubo, Phys. Rev. Research 2, 033203 (2020)
$0 < T < T_c$	$H_{sh}(\mathrm{T}) =$ 	T. Kubo, Phys. Rev. Research 2, 033203 (2020) * Effects of Dynes Gamma are also studied in this paper
$T \simeq T_c$	$H_{sh}(T)\Big\vert_{T\simeq T_c} = \frac{\sqrt{5}}{3} H_c(T)\Big\vert_{T\simeq T_c} = 0.745 H_c(T)\Big\vert_{T\simeq T_c}$	L. Kramer, Phys. Rev. **170**, 475 (1968)

問題8

Estimate B_{sh} $(T \ll T_c)$ of Nb_3Sn in the **clean** limit

Nb_3Snの場合、$\lambda \gg \xi$だから$B_{sh}(0) = 0.84B_c(0)$を使って良い

You can use $B_c = 540$ mT.

問題8（解）

公式 $B_{sh}(0) = 0.84 B_c(0)$ に代入して

$$0.84 \times 540\ \mathrm{mT} \simeq 450\ \mathrm{mT}$$

因みに、高純度ニオブの場合、$\lambda \simeq \xi$だから、公式$B_{sh}(0) = 0.84 B_c(0)$は使えない。
$\lambda \simeq \xi$の場合、$T \simeq T_c$におけるGL理論に基づく公式

$$B_{sh}(T)\Big|_{T \simeq T_c} = 1.26 B_c(T)\Big|_{T \simeq T_c} \quad \left(\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = 1\right)$$

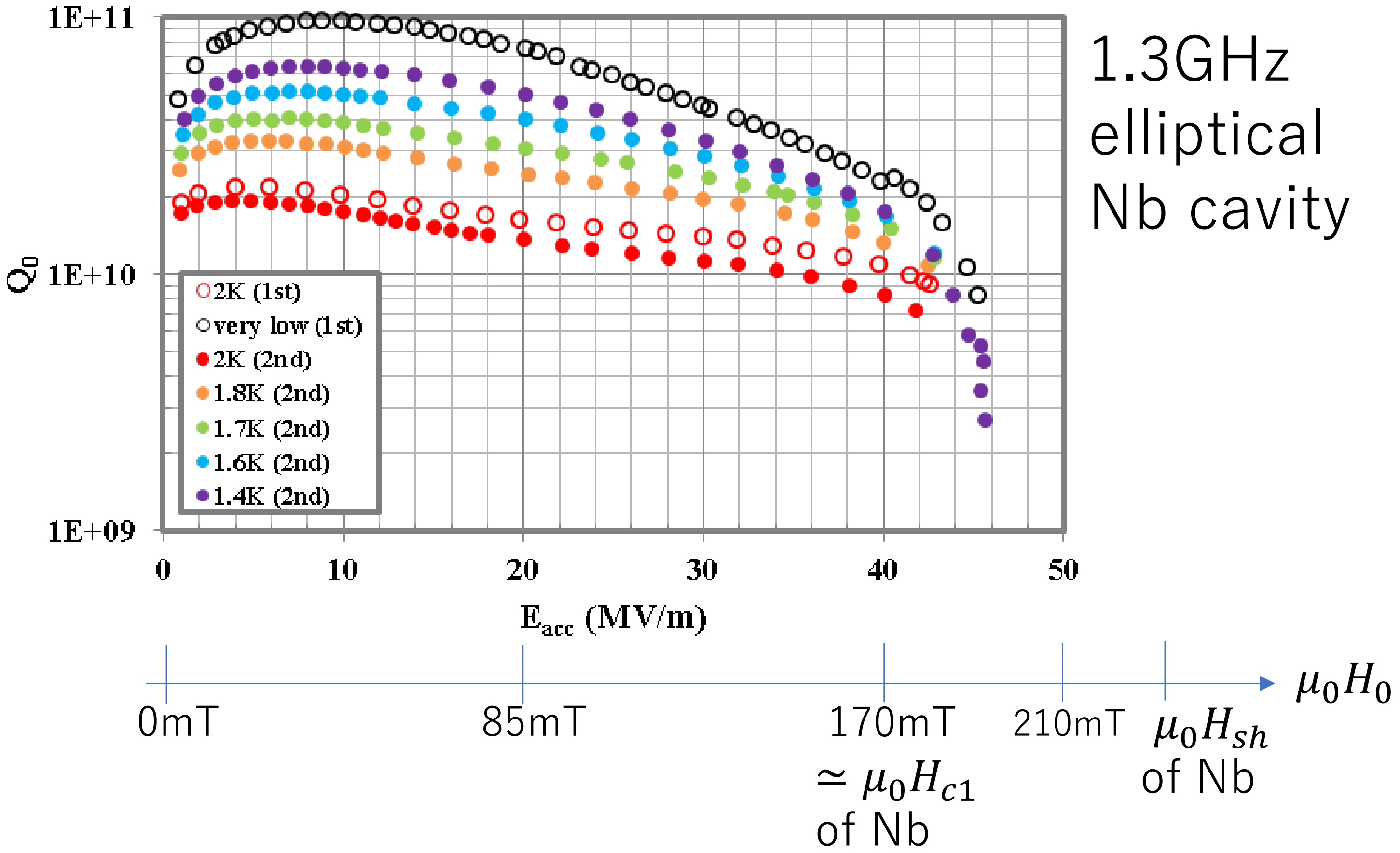
が使える。$T \ll T_c$における係数は未だ得られていない。しかし、低温でも同様の係数で与えられると仮定すると、

$$B_{sh}(0) \sim 1.2 B_c(0) = \mathbf{240mT}$$

3.8 空洞の加速性能の限界

3.8 空洞の加速性能の限界

Q-E curve

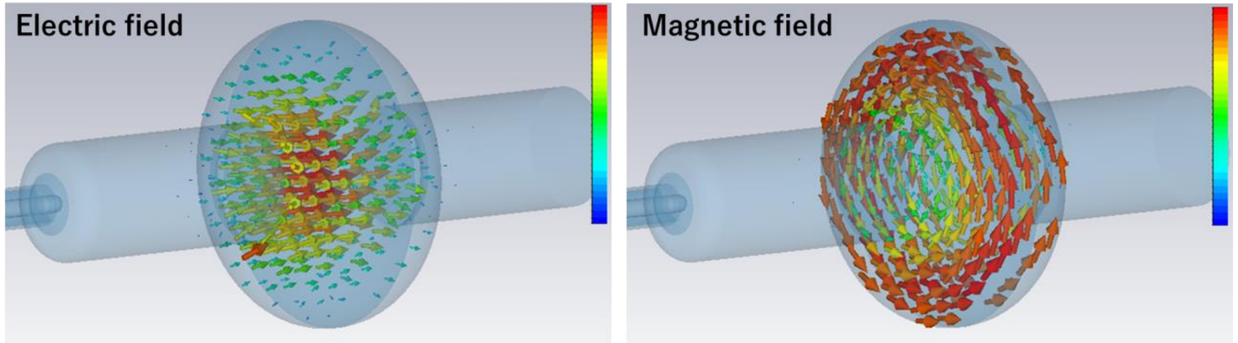


1.3GHz elliptical Nb cavity

Our cavities can regularly exceed B_{c1}, but have never achieved B_{sh}. The ultimate limit of cavities made from bulk material is considered as

$$\boxed{B_{c1} \leq B_0^{max} < B_{sh}}$$

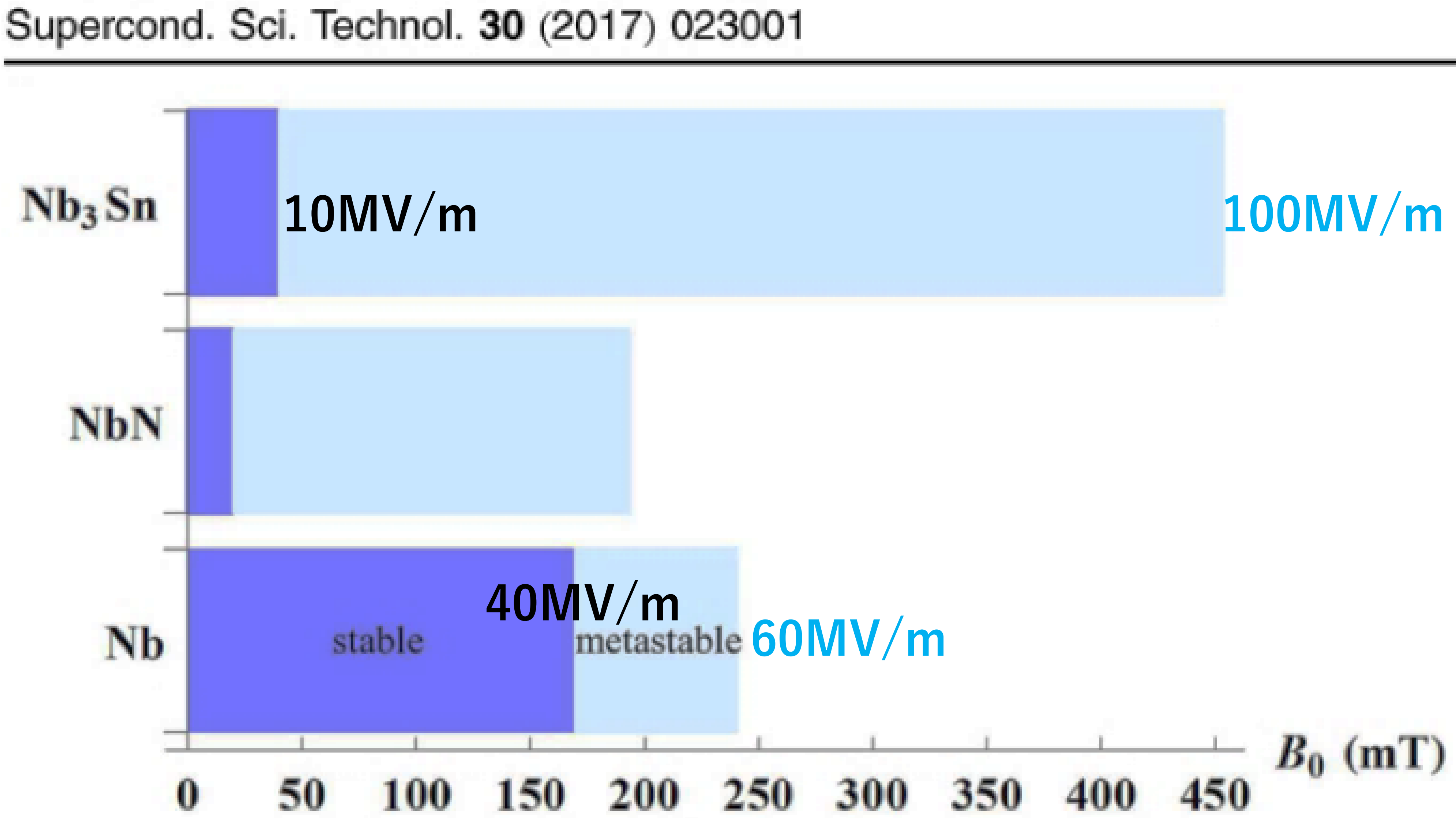
問題9



- ✓ 加速勾配は空洞内壁のマイクロ波磁場に比例する（上の図↑）。
- ✓ また、これまでに見てきたように、Nb_3SnやNbの下部臨界磁場や過熱磁場は、$B_{c1}^{Nb} \simeq 170\, mT$、 $B_{sh}^{Nb} \simeq 240\ \mathrm{mT}$ 、 $B_{c1}^{Nb_3Sn} \simeq 50\, mT$ 、 $B_{sh}^{Nb_3Sn} \simeq 450\ \mathrm{mT}$ で与えられる。

- Calculate the corresponding value of E_{acc} for Tesla shape cavity. You can use the relation between the surface magnetic field and gradient: $B_0 = gE_{acc}$ and $g = 4.26\mathrm{mT/(MV/m)}$.
- Compare it with the record field of Nb cavity, $\mathrm{E_{acc}} \simeq 50\ \mathrm{MV/m}$

問題9（解）


Supercond. Sci. Technol. 30 (2017) 023001
Nb3 Sn
10MV/m
100MV/m
NbN
Nb
stable
40MV/m
metastable
60MV/m
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
B0 (mT)

ここまでのまとめ

3.5節 下部臨界磁場

$$\boxed{B_{c1} = \frac{\mu_0 \epsilon_{\phi_0}}{\phi_0} \simeq \frac{\phi_0}{\lambda^2}}$$

3.6節 対破壊電流

$$\boxed{J_d \sim \frac{B_c}{\mu_0 \lambda}}$$

BCS理論に基づく詳細な
計算結果は3.6節の表にまとめた

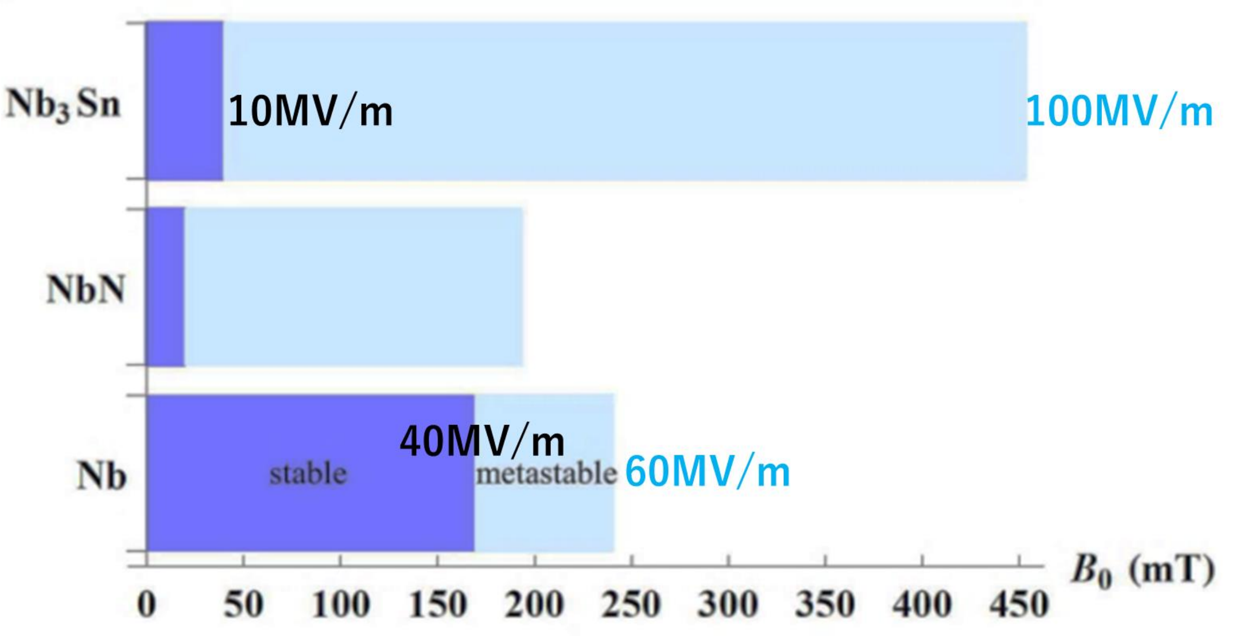
3.7節 過熱磁場

$$\boxed{B_{sh} \sim B_c}$$

BCS理論に基づく詳細な
計算結果は3.7節の表にまとめた

3.8節
空洞性能の限界

Supercond. Sci. Technol. **30** (2017) 023001



もくじ

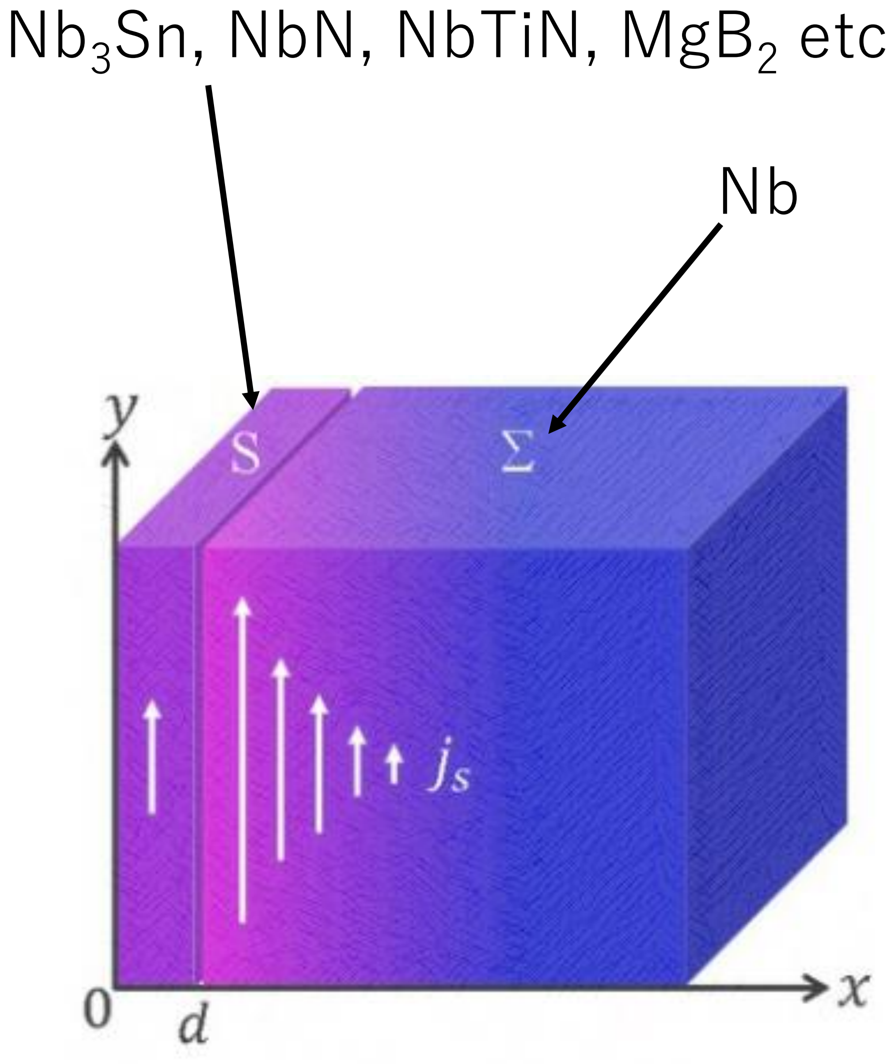
積層薄膜構造は、

- 土台となる**バルクの超伝導体(Σ)**の上に
- **薄い絶縁層（I）**を挟んで
- 厚みdの**超伝導薄膜（S）**

を載せた構造 (SIΣ構造)である。

超伝導加速空洞の内面にこの構造を導入することで加速性能の大幅な向上が可能になると期待されている。

表面で渦糸が生成したとしても、絶縁層で一旦消えてくれるため、渦糸が大きな損失を生まないというのが特徴の一つ。

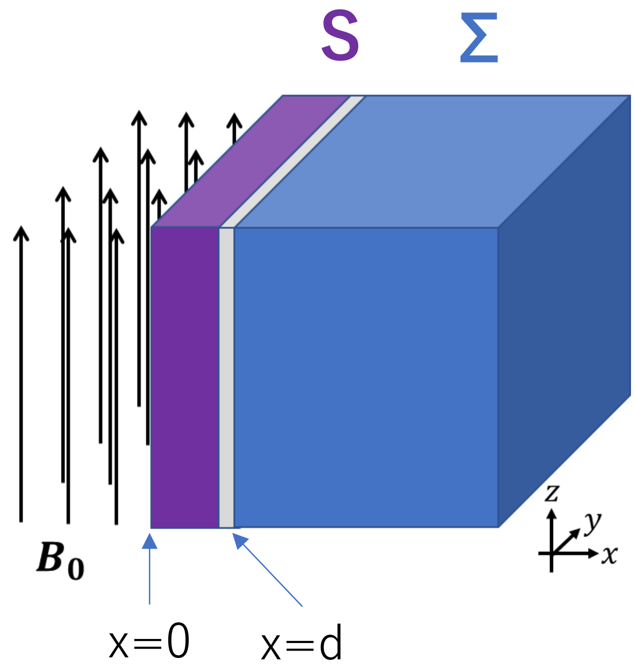


4.1 ロンドン方程式の解

4.1 ロンドン方程式の解

早速、ロンドン方程式を解くことで、磁場分布・電流分布を調べてみよう。それが、この系の面白さを理解する一番の近道である。

ここでは簡単のため、絶縁層の厚みは無視する。
ロンドン方程式は $B'' = B\ /\ \lambda_i^2$ （i=s, Σ）の2本である。



4.1 ロンドン方程式の解

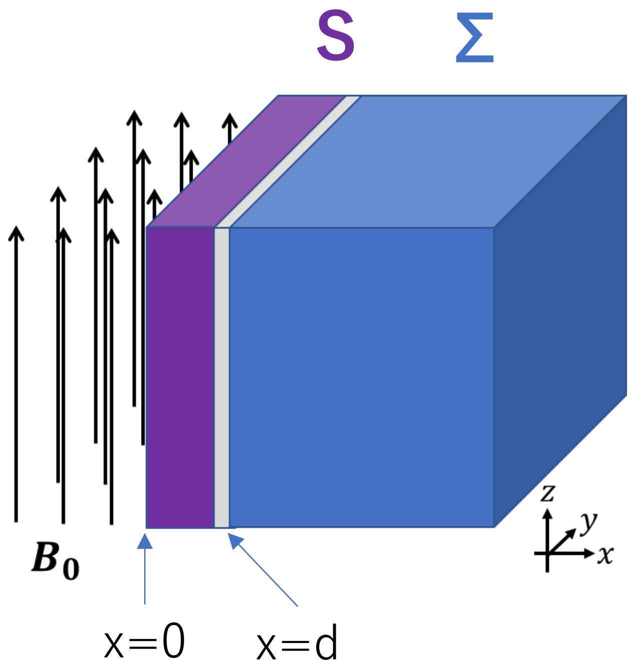
早速、ロンドン方程式を解くことで、磁場分布・電流分布を調べてみよう。それが、この系の面白さを理解する一番の近道である。

ここでは簡単のため、絶縁層の厚みは無視する。
ロンドン方程式は $B'' = B \,/\, \lambda_i^2$ （i=s, Σ）の2本である。

各領域での磁束密度とベクトルポテンシャルは以下の一般解で書ける。

領域S
(0≤x<d)

$$\begin{cases} B(x) = C_1 e^{x/\lambda_s} + C_2 e^{-x/\lambda_s} \\ A(x) = \lambda_s \left(C_1 e^{x/\lambda_s} - C_2 e^{-x/\lambda_s} \right) \end{cases}$$



$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \text{ or } B = \partial_x A$$

4.1 ロンドン方程式の解

早速、ロンドン方程式を解くことで、磁場分布・電流分布を調べてみよう。それが、この系の面白さを理解する一番の近道である。

ここでは簡単のため、絶縁層の厚みは無視する。
ロンドン方程式は $B'' = B / \lambda_i^2$ （i=s, Σ）の2本である。

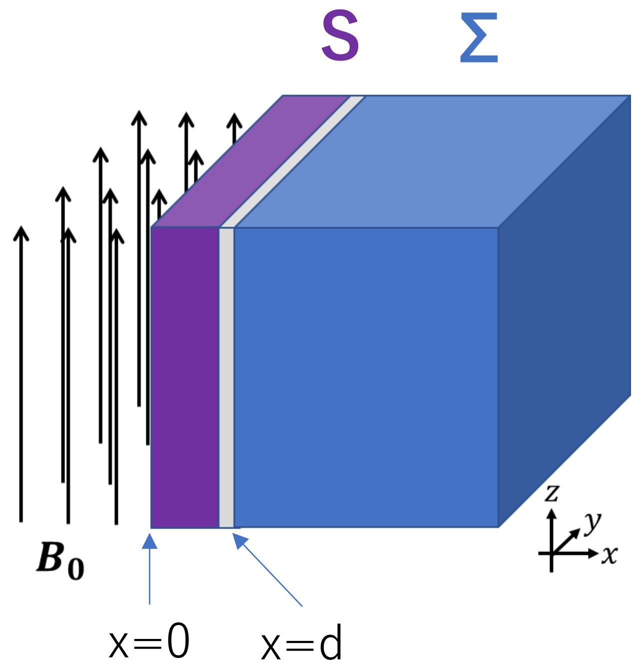
各領域での磁束密度とベクトルポテンシャルは以下の一般解で書ける。

領域S (0≤x<d)

$$\begin{cases} B(x) = C_1 e^{x/\lambda_s} + C_2 e^{-x/\lambda_s} \\ A(x) = \lambda_s\left(C_1 e^{x/\lambda_s} - C_2 e^{-x/\lambda_s}\right) \end{cases}$$

領域Σ (x>d)

$$\begin{cases} B(x) = C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \\ A(x) = -\lambda_\Sigma C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \end{cases}$$



$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

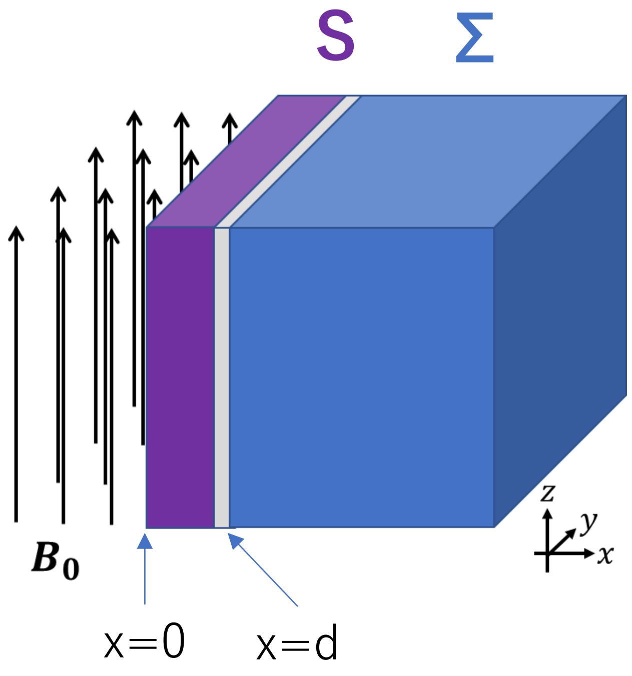
$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \text{ or } B = \partial_x A$$

4.1 ロンドン方程式の解

早速、ロンドン方程式を解くことで、磁場分布・電流分布を調べてみよう。それが、この系の面白さを理解する一番の近道である。

ここでは簡単のため、絶縁層の厚みは無視する。
ロンドン方程式は $B'' = B\ /\ \lambda_i^2$ （i=s, Σ）の2本である。

各領域での磁束密度とベクトルポテンシャルは以下の一般解で書ける。



$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \text{ or } B = \partial_x A$$

領域S (0≤x<d)

$$\begin{cases} B(x) = C_1 e^{x/\lambda_s} + C_2 e^{-x/\lambda_s} \\ A(x) = \lambda_s\left(C_1 e^{x/\lambda_s} - C_2 e^{-x/\lambda_s}\right) \end{cases}$$

領域Σ (x>d)

$$\begin{cases} B(x) = C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \\ A(x) = -\lambda_\Sigma C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \end{cases}$$

境界条件

$$\begin{cases} B(0) = B_0 \\ B(d_-) = B(d_+) & \text{磁場の連続性} \\ A(d_-) = A(d_+) & \text{電場}(E = i\omega A)\text{の連続性} \end{cases}$$

問題10

(1) 一般解に境界条件を代入することで

$$B_0 = C_1 + C_2 \quad ①$$

$$C_1 e^{d/\lambda_s} + C_2 e^{-d/\lambda_s} = C_3 \quad ②$$

$$C_1 e^{d/\lambda_s} - C_2 e^{-d/\lambda_s} = -\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s} C_3 \quad ③$$

の３つの式が得られることを確認せよ

領域S (0≤x<d)

$$\begin{cases} B(x) = C_1 e^{x/\lambda_s} + C_2 e^{-x/\lambda_s} \\ A(x) = \lambda_s\left(C_1 e^{x/\lambda_s} - C_2 e^{-x/\lambda_s}\right) \end{cases}$$

領域Σ (x>d)

$$\begin{cases} B(x) = C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \\ A(x) = -\lambda_\Sigma C_3 e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma} \end{cases}$$

境界条件

$$\begin{cases} B(0) = B_0 \\ B(d_-) = B(d_+) \\ A(d_-) = A(d_+) \end{cases}$$

磁場の連続性

電場($E = i\omega A$)の連続性

(2) これを解いてC_1, C_2, C_3を求めよ

問題10（解）

（1）は省略

（2）まず②+③から $C_1=\frac{C_3}{2}\left(1-\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{-d/\lambda_s}$　　また、②-③から $C_2=\frac{C_3}{2}\left(1+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{+d/\lambda_s}$

これらを①に入れて、

$$B_0=C_1+C_2=C_3\left(\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}\right)$$

すなわち

$$C_3=\frac{B_0}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

よって

$$C_1=\frac{C_3}{2}\left(1-\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{-d/\lambda_s}=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1-\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{-d/\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

$$C_2=\frac{C_3}{2}\left(1+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{+d/\lambda_s}=\frac{B_0}{2}\frac{\left(1+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)e^{+d/\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

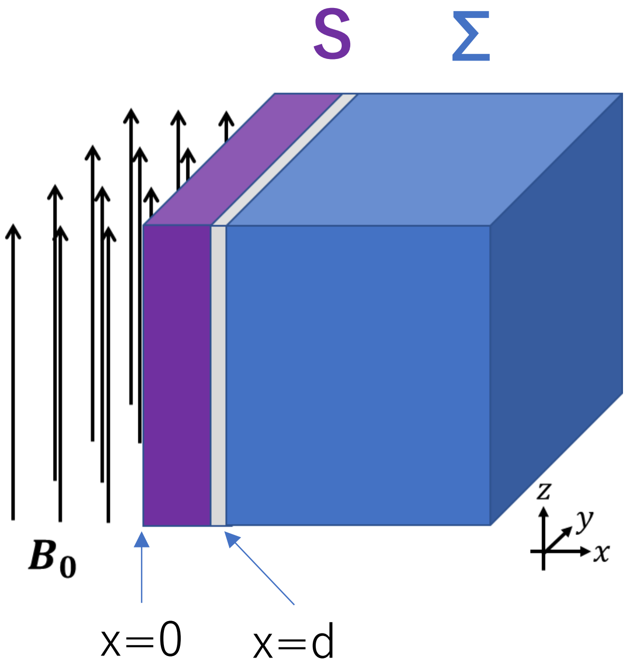
問題11

領域S (0≤x<d)

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

領域Σ (x>d)

$$B(x) = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$



(1) 領域Sと領域Σが同じロンドン長を持つ場合($\lambda_S = \lambda_\Sigma = \lambda$)、磁場分布

$$B(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

が得られることを確認せよ

(2) 領域Sの厚みdが無限大のとき、磁場分布

$$B(x) = e^{-\frac{x}{\lambda_s}}$$

が得られることを確認せよ

問題11（解）

(1) $\lambda_S = \lambda_\Sigma = \lambda$を代入すると

領域S (0≤x<d)

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}} = B_0 \frac{e^{(d-x)/\lambda}}{e^{d/\lambda}} = B_0 e^{-x/\lambda}$$

領域Σ (x>d)

$$B(x) = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}} = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda}}{e^{d/\lambda}} = B_0 e^{-x/\lambda}$$

(2) $d \gg \lambda_s$のとき、coshとsinhは(1/2)*expで置き換えられるから

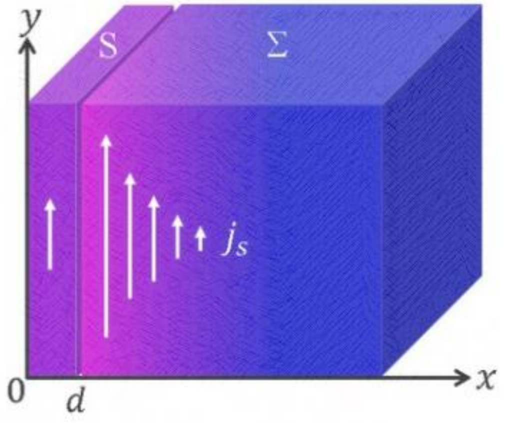
$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}} = B_0 \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right) e^{(d-x)/\lambda_s}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right) e^{d/\lambda_s}} = B_0 e^{-x/\lambda}$$

4.2 最適膜厚の存在

4.2 最適膜厚の存在

電流分布はいつもの通り
アンペールの法則 $\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}$
から求まる

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ J(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$



領域S
(0≤x<d)

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

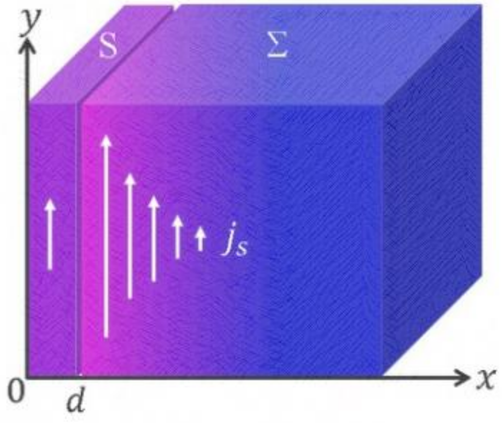
領域Σ
(x>d)

$$B(x) = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

4.2 最適膜厚の存在

電流分布はいつもの通り
アンペールの法則 $\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$
から求まる

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ J(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$



領域S (0≤x<d)

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

領域Σ (x>d)

$$B(x) = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

アンペールの法則
$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$

$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_s} \frac{\sinh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_\Sigma} \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

これより、**領域Sと領域Σにおける電流分布が、SとΣの材料の組合せ（λ_sとλ_Σの組合せ）に大きく依存する**ことが分かる。例えば、境界での値を見るためx=dを代入すると、

$J(d_-) = \left(\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\right)^2 J(d_+)$ となる。

4.2 最適膜厚の存在

$\lambda_S > \lambda_\Sigma$の場合には、S上の遮蔽電流を抑えられる！

例

Supercond. Sci. Technol. **30** (2017) 023001 Topical Review

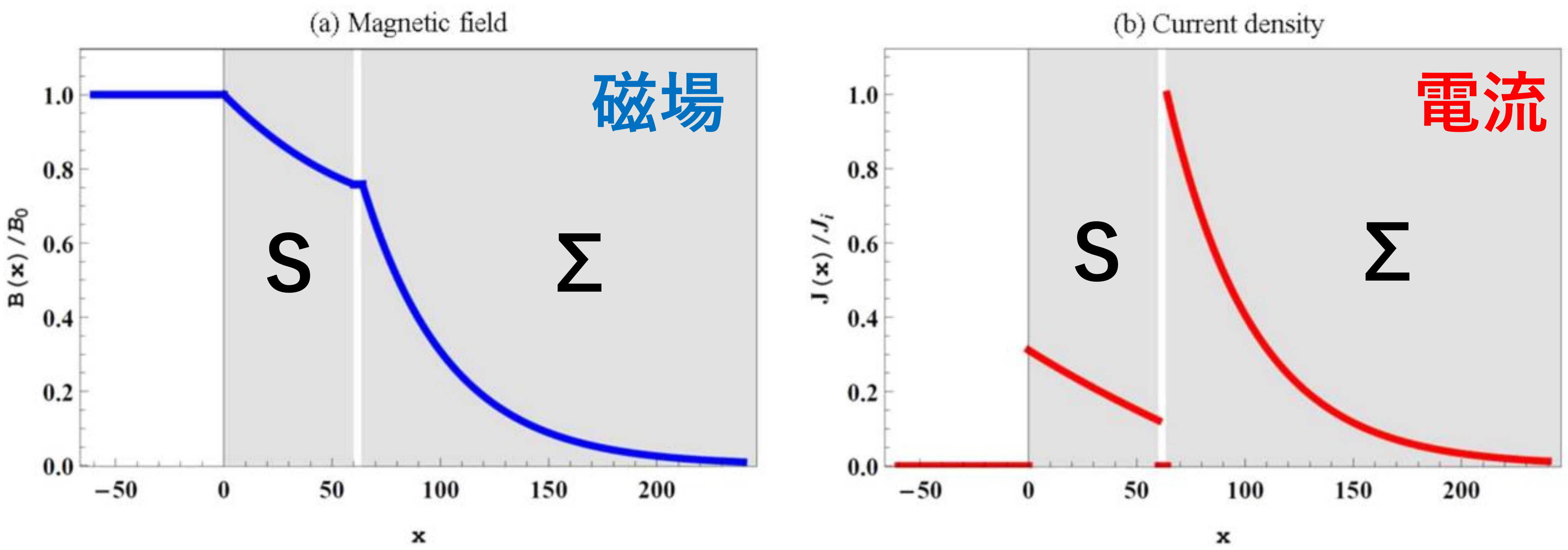
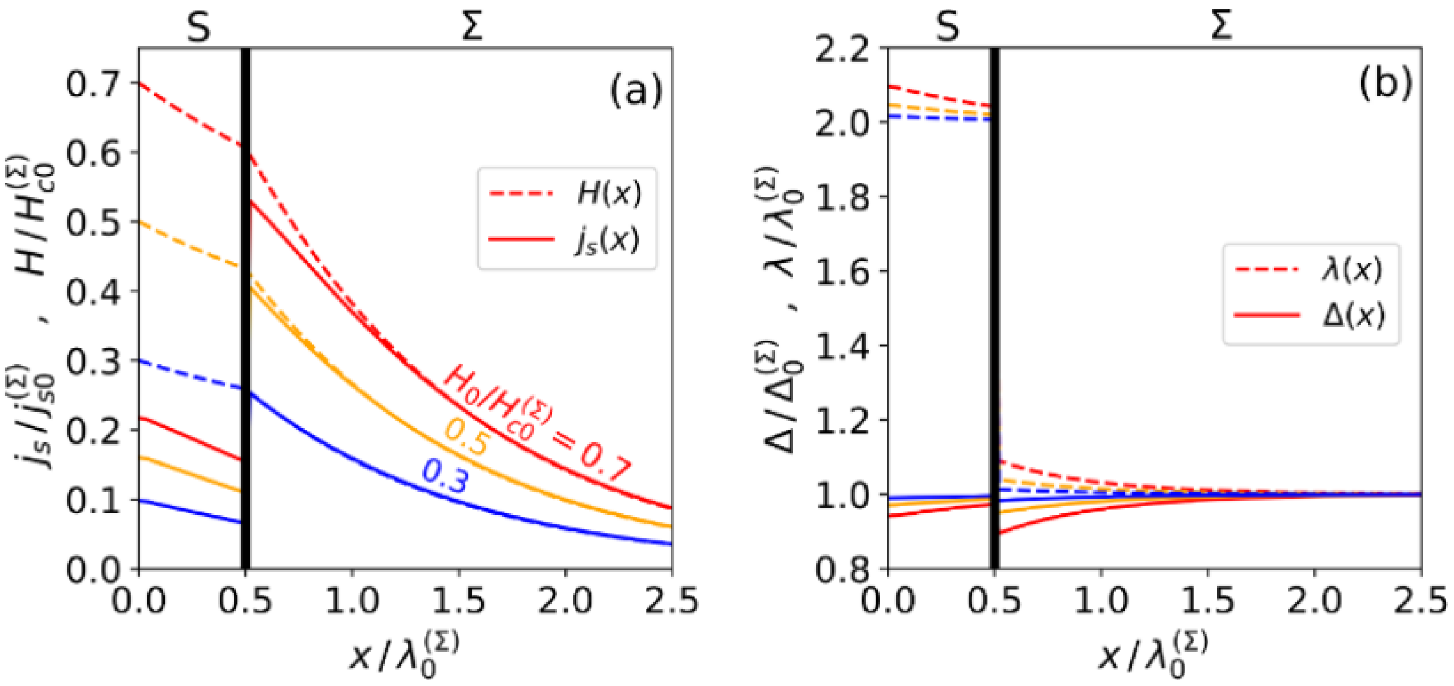


Figure 7. Examples of the magnetic field and current density distributions in a SIS structure, where the magnetic field is normalized by B_0 and the current density is normalized by that at the interface J_i. Assumed parameters are $d_S = 60$ nm, $d_I = 4$ nm, $\lambda_1 = 120$ nm and $\lambda_2 = 40$ nm.

Supercond. Sci. Technol. **30**, 023001 (2017)

補足 BCS理論による非線形マイスナー効果も含んだ数値計算の結果は
ロンドン理論による電流分布・磁場分布と余り変わらない

磁場分布
電流分布



ロンドン長

超伝導ギャップ

Figure 4. Spatial distributions of (a) H, j_s, (b) Δ, and λ in a layered superconductor calculated for $d = 0.5\lambda_0^{(\Sigma)}$, $r_\Delta = r_H = 1$, and $r_\sigma = 0.25$. The penetration depth of the S layer in the zero-current state is given by $\lambda_0^{(S)} = \lambda_0^{(\Sigma)}/\sqrt{r_\Delta r_\sigma} = 2\lambda_0^{(\Sigma)}$.

T. Kubo, Supercond. Sci. Technol. **34**, 045006 (2021)

Table 1. Parameters of the layered structure.

S layer thickness	d,
Pair-potential ratio	$r_\Delta = \Delta_0^{(S)}/\Delta_0^{(\Sigma)}$,
Critical-field ratio	$r_H = H_{c0}^{(S)}/H_{c0}^{(\Sigma)}$,
Normal-conductivity ratio	$r_\sigma = \sigma_n^{(S)}/\sigma_n^{(\Sigma)}$.

4.2 最適膜厚の存在

既に見たように、$\lambda_s > \lambda_\Sigma$の場合にはS上の遮蔽電流を抑えられる。電流による超伝導破壊を抑えられるので、より高い磁場に到達できると期待される。どれくらいの磁場まで耐えられるか、評価しよう。

S
$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_s} \frac{\sinh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

Σ
$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_\Sigma} \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

4.2 最適膜厚の存在

既に見たように、$\lambda_s > \lambda_\Sigma$の場合にはS上の遮蔽電流を抑えられる。電流による超伝導破壊を抑えられるので、より高い磁場に到達できると期待される。どれくらいの磁場まで耐えられるか、評価しよう。

S

$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_s} \frac{\sinh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

Σ

$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_\Sigma} \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

S上の最表面の電流は

$$J(0) = \gamma_s \frac{B_0}{\mu_0 \lambda_s} \qquad \gamma_s = \frac{\sinh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

と書けて、 γ_s のファクターだけ電流が小さくなる。

4.2 最適膜厚の存在

既に見たように、$\lambda_s > \lambda_\Sigma$の場合にはS上の遮蔽電流を抑えられる。電流による超伝導破壊を抑えられるので、より高い磁場に到達できると期待される。どれくらいの磁場まで耐えられるか、評価しよう。

S
$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_s}\frac{\sinh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

Σ
$$J(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda_\Sigma}\frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

S上の最表面の電流は
$$J(0) = \gamma_s \frac{B_0}{\mu_0\lambda_s} \qquad \gamma_s = \frac{\sinh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$
と書けて、 γ_s のファクターだけ電流が小さくなる。

この電流密度がSの対破壊電流$J_{dp}^{(\mathrm{S})}$に達するときが最大のB_0を与える。Sが破壊される最大印加磁場は

$$B_{\max}^{(\mathrm{S\ in\ SI\Sigma})} = \gamma_s^{-1}\mu_0\lambda_s J_{dp}^{(\mathrm{S})} \simeq \gamma_s^{-1} B_{sh}^{(S)}$$

となる。つまり、最大磁場はγ_s^{-1}だけ増幅される。

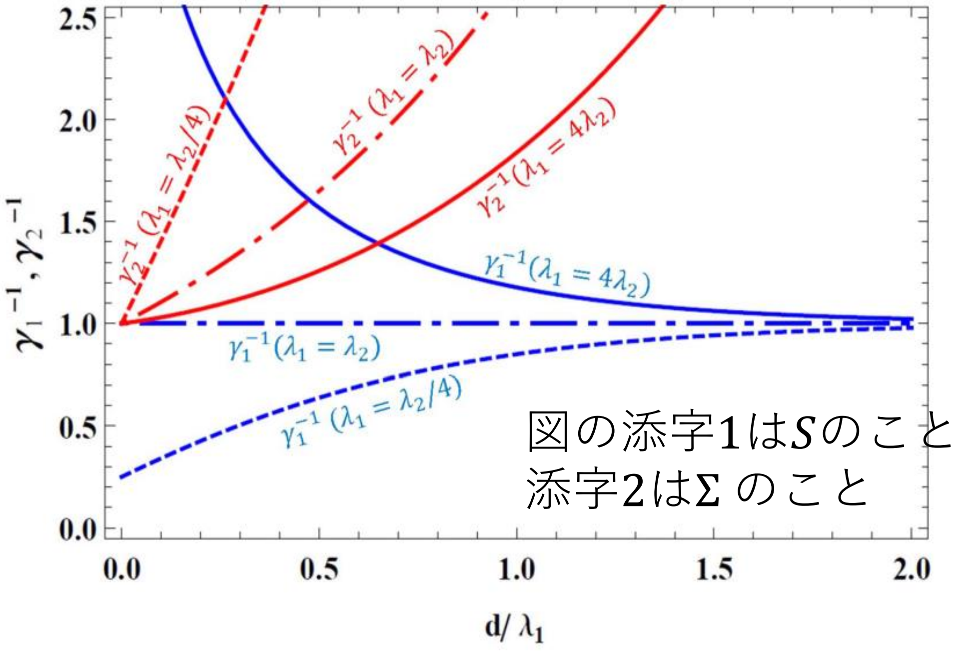
4.2 最適膜厚の存在

S
$$J(x)=\frac{B_0}{\mu_0\lambda_s}\frac{\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$
Σ
$$J(x)=\frac{B_0}{\mu_0\lambda_\Sigma}\frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

既に見たように、$\lambda_s > \lambda_\Sigma$の場合にはS上の遮蔽電流を抑えられる。電流による超伝導破壊を抑えられるので、より高い磁場に到達できると期待される。どれくらいの磁場まで耐えられるか、評価しよう。

S上の最表面の電流は
$$J(0)=\gamma_s\frac{B_0}{\mu_0\lambda_s}\qquad \gamma_s=\frac{\sinh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\cosh\frac{d}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s}+\frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$
と書けて、 γ_s のファクターだけ電流が小さくなる。

この電流密度がSの対破壊電流$J_{dp}^{(S)}$に達するときが最大のB_0を与える。Sが破壊される最大印加磁場は
$$B_{\max}^{(\mathrm{S\ in\ SI\Sigma})}=\gamma_s^{-1}\mu_0\lambda_s J_{dp}^{(S)}\simeq\gamma_s^{-1}B_{sh}^{(S)}$$
となる。つまり、最大磁場はγ_s^{-1}だけ増幅される。
右図の青線に示されているように、**$\lambda_s > \lambda_\Sigma$でかつ、厚みdが小さいほど増幅率$\gamma_s^{-1}$は大きくなる。**



図の添字1はSのこと
添字2はΣ のこと

Figure 8. γ_1^{-1} and γ_2^{-1} as functions of the S-layer thickness d_S/λ_1.
Supercond. Sci. Technol. **30**, 023001 (2017)

4.2 最適膜厚の存在

一方で、Sがいくら強くてもΣが磁場で壊されれば、そこまでである。そこで、次にΣがどれだけの磁場に耐えられるかを評価しよう。

領域S (0≤x<d)	$B(x) = B_0 \dfrac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$
領域Σ (x>d)	$B(x) = B_0 \dfrac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$

4.2 最適膜厚の存在

一方で、Sがいくら強くてもΣが磁場で壊されれば、そこまでである。そこで、次にΣがどれだけの磁場に耐えられるかを評価しよう。

領域S (0≤x<d)	$B(x) = B_0 \dfrac{\cosh \frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s} \sinh \frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh \frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s} \sinh \frac{d}{\lambda_s}}$
領域Σ (x>d)	$B(x) = B_0 \dfrac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh \frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s} \sinh \frac{d}{\lambda_s}}$

Σの表面磁場は $B(d) = \gamma_\Sigma B_0$

$$\gamma_\Sigma = \frac{1}{\cosh \frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s} \sinh \frac{d}{\lambda_s}}$$

4.2 最適膜厚の存在

領域S (0≤x<d)	$B(x)=B_0\dfrac{\cosh\dfrac{d-x}{\lambda_s}+\dfrac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\dfrac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\dfrac{d}{\lambda_s}+\dfrac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\dfrac{d}{\lambda_s}}$
領域Σ (x>d)	$B(x)=B_0\dfrac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\dfrac{d}{\lambda_s}+\dfrac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\dfrac{d}{\lambda_s}}$

一方で、Sがいくら強くてもΣが磁場で壊されれば、そこまでである。そこで、次にΣがどれだけの磁場に耐えられるかを評価しよう。

Σの表面磁場は $B(d)=\gamma_\Sigma B_0$

$$\gamma_\Sigma=\frac{1}{\cosh\dfrac{d}{\lambda_s}+\dfrac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\dfrac{d}{\lambda_s}}$$

Σが破壊されるのは、$B(d)$がΣの過熱磁場$B_{sh}^{(\Sigma)}$に達するような印加磁場B_0である。よって

$$B_{\max}^{(\Sigma\text{ in SI}\Sigma)}=\gamma_\Sigma^{-1}B_{sh}^{(\Sigma)}$$

が得られる。

4.2 最適膜厚の存在

一方で、Sがいくら強くてもΣが磁場で壊されれば、そこまでである。そこで、次にΣがどれだけの磁場に耐えられるかを評価しよう。

領域S (0≤x<d)

$$B(x) = B_0 \frac{\cosh\frac{d-x}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d-x}{\lambda_s}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

領域Σ (x>d)

$$B(x) = B_0 \frac{e^{-(x-d)/\lambda_\Sigma}}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$$

Σの表面磁場は　$B(d) = \gamma_\Sigma B_0$　　$\gamma_\Sigma = \dfrac{1}{\cosh\frac{d}{\lambda_s} + \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_s}\sinh\frac{d}{\lambda_s}}$

Σが破壊されるのは、$B(d)$がΣの過熱磁場$B_{sh}^{(\Sigma)}$に達するような印加磁場B_0である。よって

$$B_{\max}^{(\Sigma\ \mathrm{in\ SI\Sigma})} = \gamma_\Sigma^{-1} B_{sh}^{(\Sigma)}$$

が得られる。
つまり、最大磁場はγ_Σ^{-1}だけ増幅される（図の赤線）

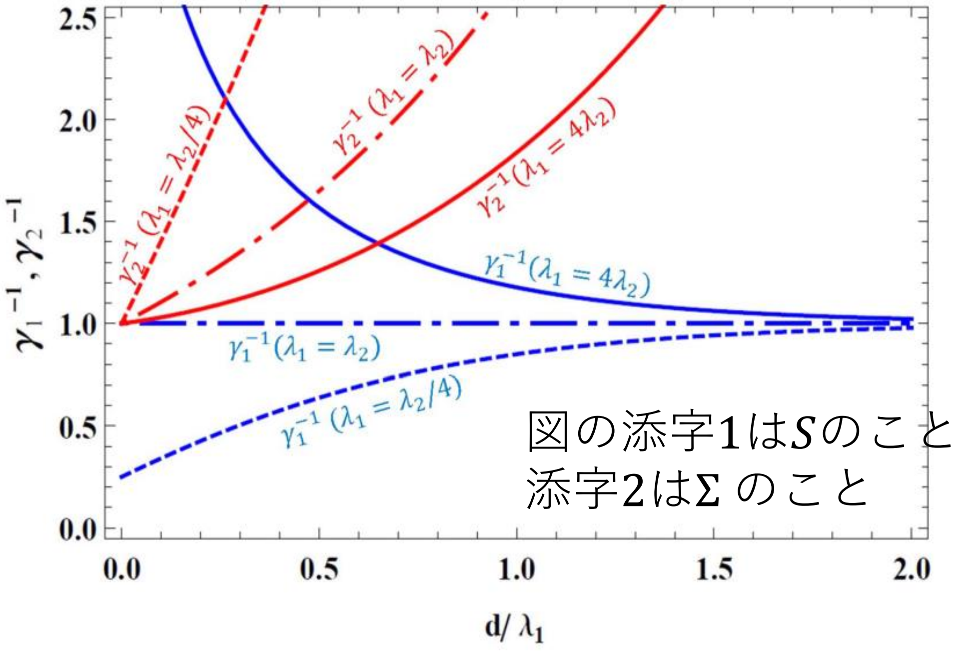


Figure 8. γ_1^{-1} and γ_2^{-1} as functions of the S-layer thickness d_S/λ_1.
Supercond. Sci. Technol. **30**, 023001 (2017)

4.2 最適膜厚の存在

SIΣ構造全体として耐えられる磁場は薄膜Sとバルク Σ の弱い方で決まる。
すなわち、

$$B_{\mathrm{sh}}^{(\mathrm{SI\Sigma})} = \min\left(B_{\mathrm{max}}^{(\mathrm{S\ in\ SI\Sigma})}, B_{\mathrm{max}}^{(\Sigma\ \mathrm{in\ SI\Sigma})}\right) = \min\left(\gamma_s^{-1} B_{sh}^{(S)}, \gamma_\Sigma^{-1} B_{sh}^{(\Sigma)}\right)$$

4.2 最適膜厚の存在

SIΣ構造全体として耐えられる磁場は薄膜Sとバルク Σ の弱い方で決まる。
すなわち、

$$B_{\rm sh}^{(\rm SI\Sigma)} = \min\left(B_{\rm max}^{(\rm S\ in\ SI\Sigma)}, B_{\rm max}^{(\Sigma\ \rm in\ SI\Sigma)}\right) = \min\left(\gamma_S^{-1} B_{sh}^{(S)}, \gamma_\Sigma^{-1} B_{sh}^{(\Sigma)}\right)$$

Supercond. Sci. Technol. **30** (2017) 023001 Topical Review

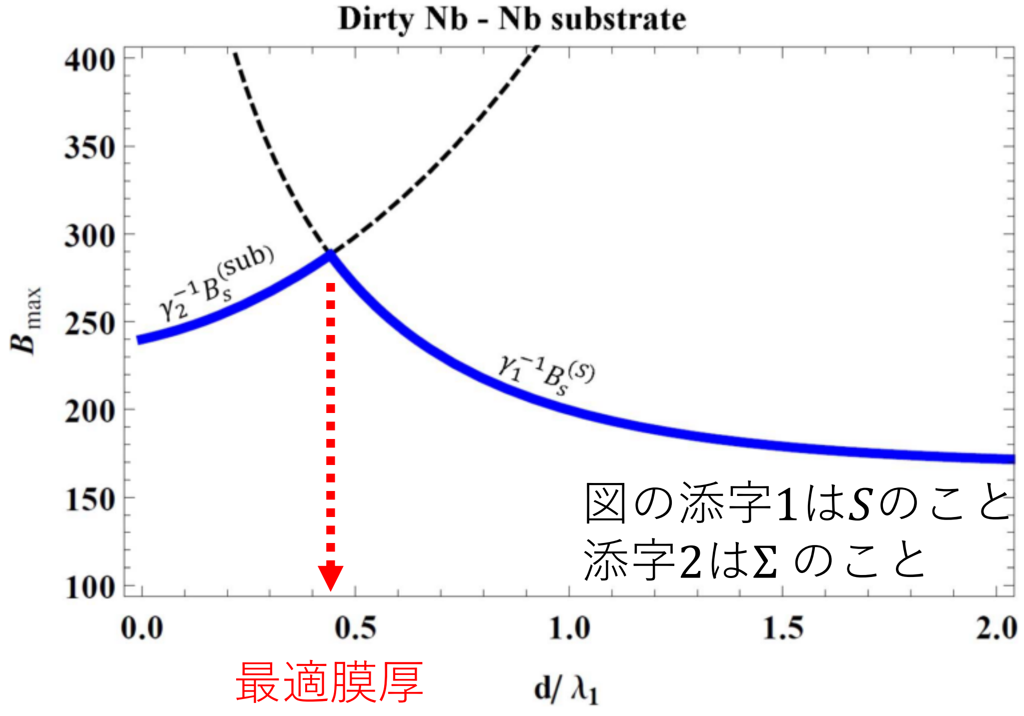


Figure 16. Theoretical field limit of an SS bilayer structure that consists of a dirty Nb layer and a clean Nb substrate as a function of surface layer thickness. The assumed parameters are $\lambda_1 = 180$ nm, $B_s^{(S)} = 0.84 B_c^{(S)} = 170$ mT, $\lambda_2 = 40$ nm and $B_s^{(\rm sub)} = 240$ mT.

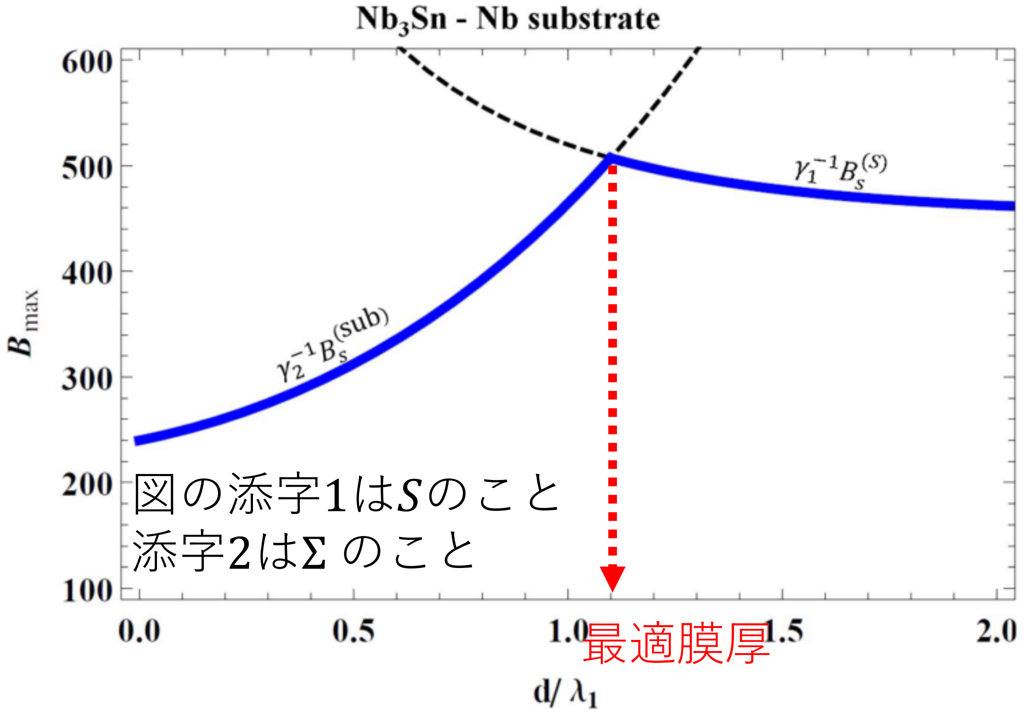


Figure 17. Theoretical field limit of an SS bilayer structure that consists of a Nb_3Sn layer and a clean Nb substrate as a function of the surface layer thickness. The assumed parameters are $\lambda_1 = 120$ nm, $B_s^{(S)} = 0.84 B_c^{(S)} = 450$ mT, $\lambda_2 = 40$ nm and $B_s^{(\rm sub)} = 240$ mT.

4.2 最適膜厚の存在

補足

- **実線**は、BCS理論による非線形マイスナー効果も含んだ数値計算の結果。
- **点線**は前ページのロンドン理論を用いて導いた公式から計算したもの。

両者の最適膜厚の違いは10％程度。

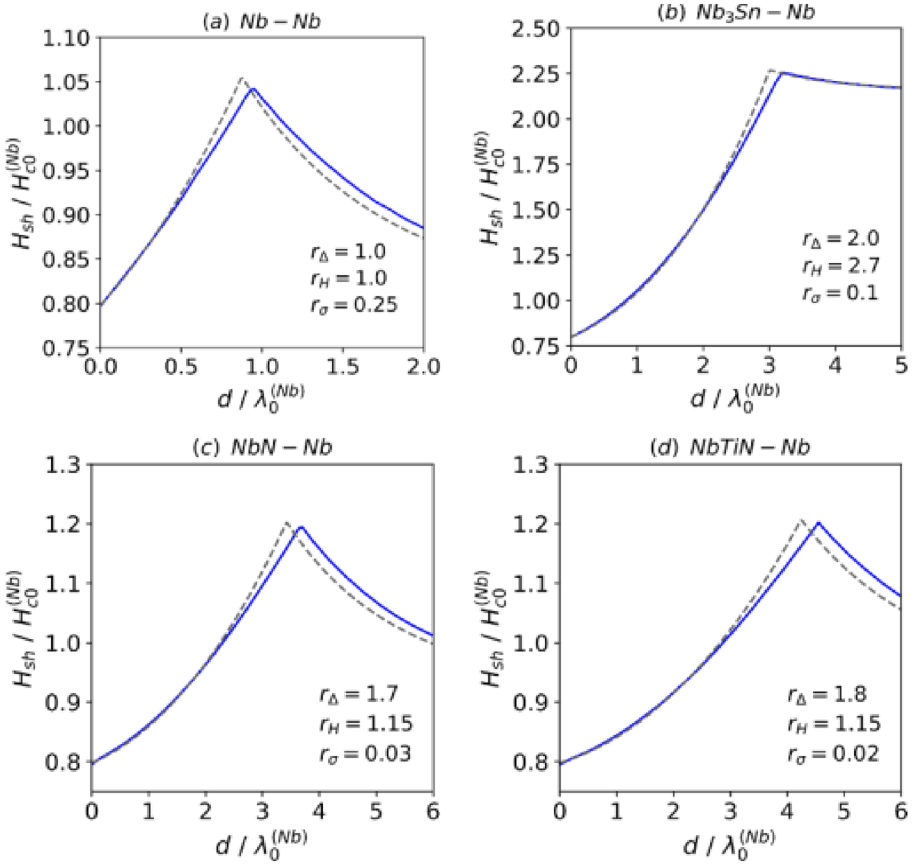


Figure 5. Superheating field of layered structures as functions of d. The solid curves are obtained from the self-consistent solutions of the coupled Maxwell–Usadel equations at $T \to 0$ (equations (5)–(11)). The dashed curves are calculated from the approximate formula (equation (21)). (a) Nb-Nb structure modeled by the parameter set $(r_\Delta, r_H, r_\sigma) = (1, 1, 0.25)$. (b) Nb_3Sn-Nb structure modeled by $(r_\Delta, r_H, r_\sigma) = (2, 2.7, 0.1)$. (c) NbN-Nb structure modeled by $(r_\Delta, r_H, r_\sigma) = (1.7, 1.15, 0.03)$. (d) NbTiN-Nb structure modeled by $(r_\Delta, r_H, r_\sigma) = (1.8, 1.15, 0.02)$. In these cases, the penetration depths of the S layer in the zero-current state are given by (a) $\lambda_0^{(S)} = \lambda_0^{(\Sigma)}/\sqrt{r_\Delta r_\sigma} = 2\lambda_0^{(\Sigma)}$, (b) $\lambda_0^{(\mathrm{Nb_3Sn})} = 2.2\lambda_0^{(\mathrm{Nb})}$, (c) $\lambda_0^{(\mathrm{NbN})} = 4.4\lambda_0^{(\mathrm{Nb})}$, and (d) $\lambda_0^{(\mathrm{NbTiN})} = 5.3\lambda_0^{(\mathrm{Nb})}$.

T. Kubo, Supercond. Sci. Technol. **34**, 045006 (2021)

Table 1. Parameters of the layered structure.

S layer thickness	d,
Pair-potential ratio	$r_\Delta = \Delta_0^{(S)}/\Delta_0^{(\Sigma)}$,
Critical-field ratio	$r_H = H_{c0}^{(S)}/H_{c0}^{(\Sigma)}$,
Normal-conductivity ratio	$r_\sigma = \sigma_n^{(S)}/\sigma_n^{(\Sigma)}$.

補足(実験結果)

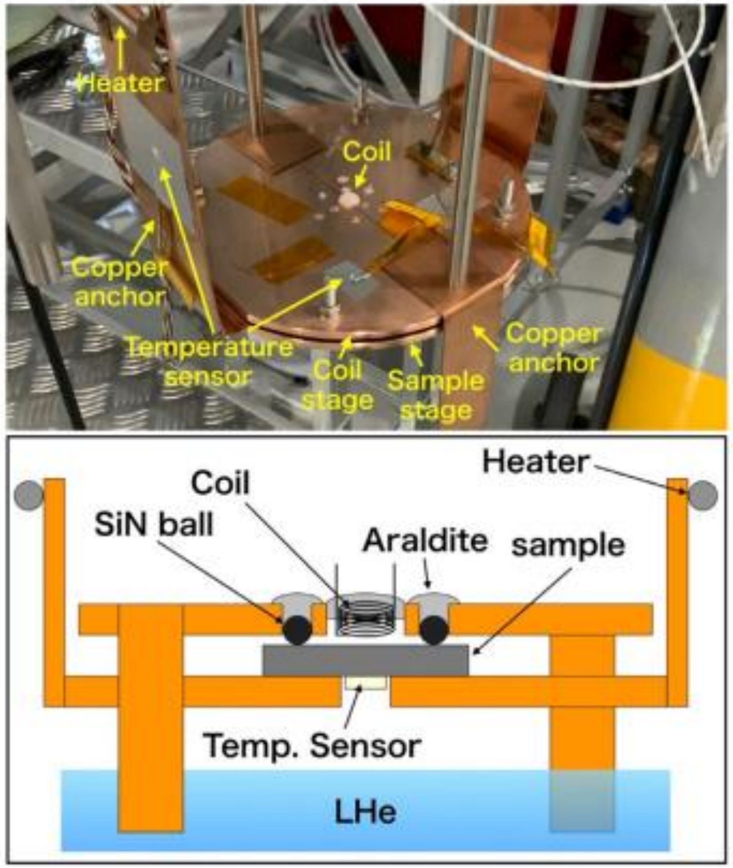


Fig. 3. Copper stage setup for third-harmonic measurement. The upper photograph shows the copper stage setup. The lower panel shows the cross-sectional schematic of the copper stage setup.

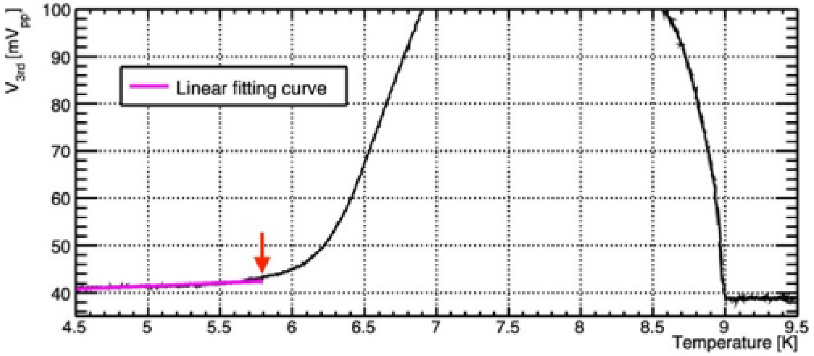


Fig. 10. Typical third-harmonic signal of bulk Nb sample 1. The upper graph shows the phase variation of the third harmonic signal ($\Delta\phi$), while the lower graph shows the variation in the third-harmonic signal strength (V_{3rd}). Note that the third-harmonic signal strength is amplified by a factor of 10 by means of the selectable gain adjustor. The magenta curve is the linear fitting curve to the third-harmonic signal strength in the temperature region lower than the left onset. The red arrow represents the onset of the third-harmonic signal as per our analysis of the third-harmonic signal strength.

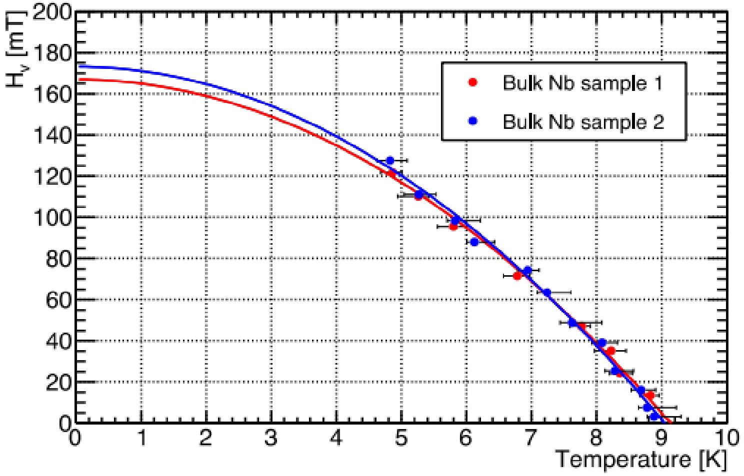


Fig. 11. Temperature dependence of H_v of two bulk Nb samples. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

H. Ito, Vortex penetration field measurement system based on third-harmonic method for superconducting RF materials, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, **955**, 163284 (2020)

H. Ito et la., “Lower critical field measurement of NbN multilayer thin film superconductor at KEK, “ Proceedings, 19th International Conference on RF Superconductivity, SRF2019 : Dresden, Germany, June 30-July 5, 2019, 632-636

R. Katayama et al., “Evaluation of the Superconducting Characteristics of Multi-Layer Thin-Film Structures of NbN and SiO2 on Pure Nb Substrate, ” Proceedings, 19th International Conference on RF Superconductivity, SRF2019 : Dresden, Germany, June 30-July 5, 2019, 807-809

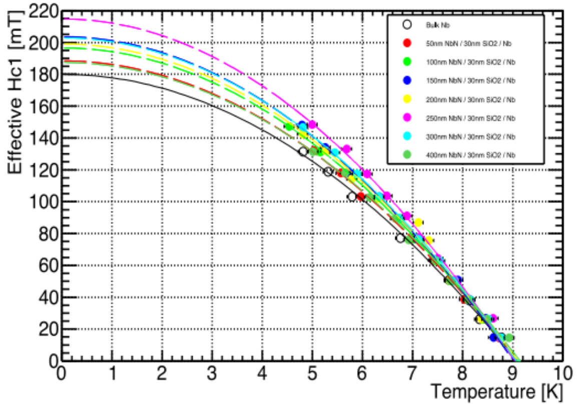


Figure 6: measurement result of the temperature dependence of the effective H_{c1} for NbN-SiO_2-Nb multilayer and comparison with the result of bulk Nb sample.

A comparison of the value of the effective H_{c1} of each NbN-SiO_2-Nb multilayer sample at 0 K with the theoretical prediction [11] is shown in Fig. 7. The open circle represents the measurement values of the effective H_{c1} for the 200 nm sample during the development stage of the measurement setup. The measurement error for the 200 nm sample was 18 mT because the lower limit of the

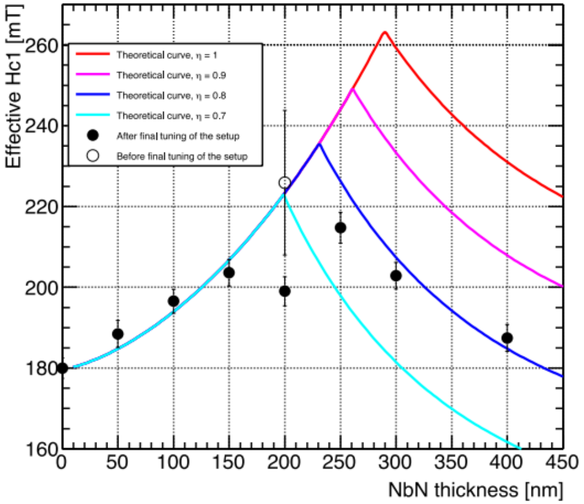


Figure 7: Effective H_{c1} of NbN-SiO_2-Nb multilayer samples vs. thickness of NbN layer and comparison with theoretical prediction. The open circle represents the measurement values of the effective H_{c1} for the 200 nm sample during the development stage of the measurement setup. The closed circles represent the measurement values of the effective H_{c1} for each NbN-SiO_2-Nb multilayer sample after final tuning of the setup.

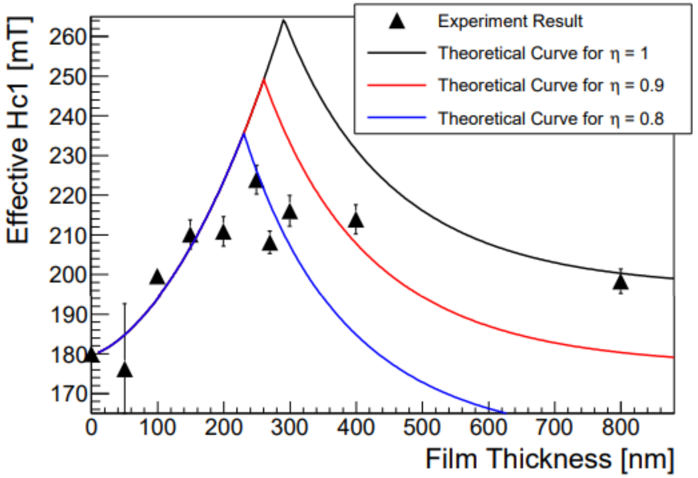


Figure 3: Dependence of the effective Hc1 of NbN/SiO_2/Nb multilayer samples on the thickness of the NbN layer. The theoretical calculation is superimposed for comparison. Black triangles represent the measurement values of the effective H_{C1} for each NbN/SiO_2/Nb multilayer sample.

おわり