

## 2. 誘電体加速と超高周波源

高エネルギー加速器研究機構

吉 田 光 宏

# 目次

## 誘電体加速と超高周波源

概要	2-1
第 I 部 誘電体加速	2-1
1 超高周波帯(ミリ波=サブTHz 帯)の誘電体加速	2-1
1.1 必要な位相空間と周波数の上限	2-1
1.2 加速器と理想の加速構造、究極の加速構造	2-3
1.3 誘電体加速の方式	2-4
1.4 壁材質	2-4
1.5 周波数重畳とモード同期	2-5
2 Dielectric Lined Waveguide:DLW	2-5
2.1 固有モード解析	2-6
2.2 DLW の実証実験	2-8
第 II 部 電子ビーム駆動の超高周波源(ミリ波源=サブTHz源)	2-9
1 電子管	2-9
1.1 Gylotron	2-9
1.2 TWT(Travelling Wave Tube)	2-9
1.3 Extended Interaction Klystron	2-9
1.4 後進波発振管:BWO(Backward Wave Oscillator)	2-9
2 相対論的電子ビームによるミリ波生成	2-10
2.1 航跡場	2-10
2.2 FEL	2-11
第 III 部 レーザー駆動の超高周波源(ミリ波源=サブTHz 源)	2-14
1 レーザー光源	2-14
1.1 量子光学	2-14
1.2 レーザー発振とモードロック発振	2-18
1.3 レーザーの発振モード	2-18
1.4 レーザー媒質と配置	2-19
1.5 分散とチャープパルス増幅	2-22
2 非線形光学素子	2-24
2.1 非線形光学素子	2-24
2.2 擬似位相整合 (quasi-phase matching:QPM)	2-24
2.3 QPMの設計	2-25
3 第 2 高調波発生	2-25
4 差周波発生	2-26
5 カスケード第 2 高調波発生/差周波発生	2-27
5.1 QPMによるDFGの時間発展計算	2-28
5.2 MgO:PPLNによるTHz発生	2-28
参考文献	2-29

# 誘電体加速と超高周波源

## 概要

本講義は、超高周波帯 (ミリ波=サブ THz 帯) の誘電体加速と、そのための超高周波源について述べる。

超高周波帯での誘電体加速は、従来のマイクロ波帯の高周波加速器との親和性が良く既存の高周波加速器からのビームを追加速するなど、近未来に実用化できる可能性が高い事が魅力的な所である。理想的な加速器はどのようなもので、また誘電体加速でどのようなパラメーターの加速が可能なのかという事を説明する。

さらに超高周波加速で問題となる超高周波源について、電子ビーム駆動とレーザー駆動のそれぞれについて原理や実験レベルでの成果などを含めて記載した。

## 第 I 部

# 誘電体加速

### 1 超高周波帯 (ミリ波=サブ THz 帯) の誘電体加速

超高周波帯 (ミリ波=サブ THz 帯) の誘電体加速の有効性として、従来のマイクロ波帯の高周波加速器との親和性が良く既存の高周波加速器からのビームを追加速するなど、近未来に実用化できる可能性が高い事が誘電体加速の魅力的な所である。まずは誘電体加速において、どのようなパラメーターの加速器が期待されるかを、まずは従来の加速器のパラメーターと近年の発展について述べたい。

荷電粒子の加速器業界においては、従来のマイクロ波加速器では  $TEM_{01}$  の単一周波数の空洞を用いて、大電力の高周波源と空洞の Q 値だけで高い電界を得る方法が発展してきた。特に近年の大型加速器で次々に採用されている Nb 超伝導加速器では Q 値は  $10^{10}$  程度と非常に高く、電子レンジ程度のパワーで数 10 MV/m の電界を得る事ができ、1.5K 冷却が必要なため、冷凍機などのインフラの電力やコストを考えなければ、超高効率の加速器となっている。

ただし、常伝導では放電やクライストロン等のエネルギー源の尖頭出力が、超伝導ではクエンチによる電界の限界により、それぞれ数 10MV/m の電界強度から長い年月あまり大きな進展が見られない。

そこで過去には一時だがレーザー駆動の加速器に大きな注目が集まった時期がある。しかし、その後高周波加速も少し高い周波数の X バンドや、薄膜超伝導など多少のブレークスルーが見いだされてきておりこれらの方法で近い将来 100 MV/m 程度の電界が実現される可能性もあり、最近では加速器業界ではレーザー駆動の加速器への注目は低迷してきているように見受けられる。一つの要因としては単純に電界が高いだけでは加速器としての要求は満たされず、ルミノシティや放射光強度などの観点などから、電子ビームの品質の維持や、総合的なエネルギー効率を考えると、レーザー駆動では今の所は超伝導加速器には遠く及ばない事が挙げられる。

一方、既存の加速技術の発展と、このような高効率のマイクロ波加速器で生成された電子ビームをエネルギー源とした高効率の超高周波 (サブ THz 帯) の誘電体加速は今後非常に有望であると考えている。レーザー駆動では、これらを超える電力効率の誘電体加速が提案できないと魅力が無く、最終的に必要な加速効率も含めたパラメーターを見据えて上でレーザー駆動の加速器を検討する必要がある。本稿では、従来のマイクロ波加速器からの電子ビームを追加速するために 1GV/m 程度を目標とした誘電体加速に必要なパラメーターを目標として、それに必要なパラメーターや必要な電子ビーム駆動、レーザー駆動を含めた超高周波源 (ミリ波源=サブ THz 源) などについて述べたいと思う。

#### 1.1 必要な位相空間と周波数の上限

アプリケーションによって必要な電荷量やエミッタンスが異なるが、現時点での大型の電子加速器のアプリケーションとして以下の2つが挙げられる。

- 高エネルギー物理をターゲットとした加速器高エネルギー物理学で近年興味のある事象として例えば電子陽電子衝突の場合の Higgs 粒子の生成断面積は 1 pb 以下という所で、これらを統計的に十分な数生成するためには  $10^{34} cm^{-2} s^{-1}$  程度のルミノシティが必要であり、このような

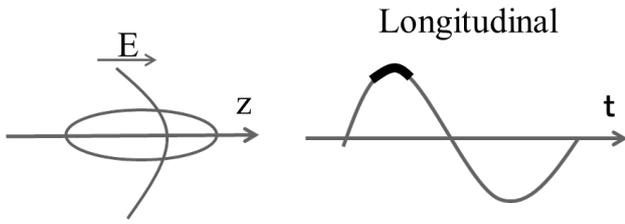


図1 エネルギー分散

高いルミノシティを得るためには数 nC の電荷 × 数万バンチ/秒の電流を超低エミッタンスを保存したまま加速する必要がある。このためには電子ビームのエミッタンスを保存する十分な位相空間と、高周波の高い蓄積効率が必須である。

- X線自由電子レーザー (XFEL) 電荷量は数 100 pC と小さいが、10 kA 程度と非常に高い尖頭電流と超低エミッタンスの電子ビームでないと X線領域での増幅は難しい。高い尖頭電流を得るには進行方向-運動量空間での線形なバンチ圧縮が必要であり、元のビームのエネルギー分散を極めて小さくする必要があり、加速で利用できる電磁波の周波数に上限がある。また近年は EuroXFEL 等の超伝導加速器駆動の XFEL が実現してきているため、将来的な展望も考慮するとマルチバンチの加速が可能な加速方式が望まれる。

輸送中のエミッタンスの保存などを考えると、電荷量は nC 程度が限界であり、それを考慮するとマルチバンチでしか高い効率を得る事は不可能である事が分かる

高エネルギー物理用の加速器や XFEL ではエネルギー分散やエミッタンスを保存する必要がある事は変わらない。これら进行评估するには図1のような電磁波で加速されるビームの運動量の横方向の分散  $\delta_x$ 、縦方向の運動量分散  $\delta_z$  を考えると

Transverse :

$$1\text{GeV}, \varepsilon_n = 1 \mu\text{m rad}, \beta = 1m \quad (1)$$

$$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\varepsilon_n \beta / \gamma} = 20 \mu\text{m} \quad (2)$$

Longitudinal :

$$\sigma_t = 60 \text{fs} \quad (3)$$

$$\rightarrow \sigma_z = 18 \mu\text{m} \quad (4)$$

$$\delta_x \text{ or } z = \frac{\Delta p}{p} = 1 - \cos\left(2\pi \frac{\sigma_x \text{ or } z}{\lambda}\right) \quad (5)$$

$$= 0.01\% (\lambda = 10\text{mm}) \quad (6)$$

$$0.4\% (\lambda = 1.5\text{mm}, f = 200\text{GHz}) \quad (7)$$

$$10\% (\lambda = 0.3\text{mm}, f = 1\text{THz}) \quad (8)$$

これらから周波数上限が分かる。コライダーでも XFEL でも必要なビームのエネルギー分散のオーダーは 0.1 % のレベルだが、この 10 倍を許容したとしても周波数上限は 200GHz 程度である事が分かる。

例えば現状のプラズマ加速などで超高電界が得られているパラメーターでは一般的に 30fs などのビームやレーザーが用いられており、これに共鳴するプラズマ振動の周波数は 10THz 程度となり、コライダーなどの高電荷のビームの輸送は、1バンチですら不可能である事が分かる。もちろんプラズマ加速でも電界は極端に下がるが、共鳴周波数を数 100GHz まで下げれば高電荷の輸送は可能である。しかしマルチバンチとなると、プラズマはエネルギー消費が激しく時間的に減衰してしまうため、やはり効率は極端に低くなってしまうため、コライダーの実現は難しい。

一方超高周波の電磁波を用いた加速では、電磁波の蓄積は可能であり、マルチバンチの加速にも対応できる所が大きな違いである。ただし超高周波になると後述のように金属などの導体の壁損失が非常に大きくなり、従来の高周波加速のような金属壁の構造を用いた方法では効率が下がってしまう。そこで誘電体や自由空間での伝搬を組み合わせた加速方式が有効となる。また超高周波では高出力の電磁波の発生源が難しく、ここが一つのテーマとなるため、後半の章で超高周波源について述べる。

## 1.2 加速器と理想の加速構造、究極の加速構造

そもそも理想的な加速器とはどういう物なのか、また現実はどうなのか、そしてさらに究極の加速器はどういう物であるかという事から再考したい。

蓄積されている電磁波のエネルギーは電界強度と磁場強度から

$$W = \int \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (9)$$

電磁波では電界と磁界は双方エネルギー交換をしているので、電界のエネルギーと磁界のエネルギーは同じであり、ピーク時のエネルギーで考えるとこれは  $E^2$  のみの項のみ考えれば良い

また電子加速器では電子の速度はほぼ光速であるため、電磁波を再利用する事はできず、電子が通るまでの時間分のエネルギーは先に貯めておく必要がある。ただし、電磁波も群速度  $v_g$  で移動はするため、 $1 - \frac{v_g}{c}$  分のエネルギーが貯めておくべき電磁波の時間であり、この時間を  $\Delta t$  とした。通常の空洞型のマイクロ波帯の加速管では  $v_g$  は非常に小さい(小さくして電界を上げている)ため、ほぼ無視できるが、超高周波の加速器ではエネルギー密度が高いため、 $v_g$  は0ではない。

ここで加速効率を概算で計算するため、電磁波のエネルギーを  $U$ 、加速によるエネルギーゲインを  $U_{beam}$  とおき、また壁での損失を  $P_{loss}$ 、マルチバンチでのビーム電流による加速エネルギーゲインの単位時間辺りの電力を  $P_{beam}$  とおくと以下のようになる。

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \quad (10)$$

$$U = \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \int \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (11)$$

$$\sim \frac{\varepsilon_0 E^2 \lambda^2 \pi^2 L}{16} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \quad (12)$$

$$U_{beam} = qE \quad (13)$$

$$\eta_{bunch} = \frac{U_{beam}}{U} \quad (14)$$

$$I = q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}}, \quad Q = \frac{\omega U}{P_{loss}} \quad (15)$$

$$P_{beam} = IEL = q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}} EL \quad (16)$$

$$\eta = \frac{P_{beam}}{P_{loss}} \quad (17)$$

$$= \frac{q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}} EL}{\frac{\omega \varepsilon_0 E^2 \lambda^2 \pi^2 L}{16Q} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right)} \quad (18)$$

空洞の蓄積エネルギー  $U$  と、ビームの1バンチが加速で得られるエネルギー  $U_{beam}$  を比較すると例えば S バンド加速器と超高周波加速器の典型的なパラメーターを考えると

- $3GHz, 20MV/m, 1nC \rightarrow U = 20J/m, U_{beam} = 0.02J/m$
- $300GHz, 200MV/m, 1nC \rightarrow U = 0.2J/m, U_{beam} = 0.2J/m$

となり、単一のバンチではエネルギー効率が 0.1 % しかない事が分かる。従って、従来の高周波加速ではマルチバンチでないと効率は上がらない事が分かる。

また単位時間辺りの電力損失は、壁損失は Q 値で決まり、ビーム電力はマルチバンチの時間の長さと同数で決まる。これからマイクロ波では

これらからこれらのビームの時間的構造は、常伝導及び超伝導では、図 2 のようになっており、近年の加速器ではパルスレインのマルチバンチ加速により、高周波電力からビームエネルギーへの変換効率が従来より格段に高効率になっている。

本来どのような周波数帯であろうと、超高出力の尖頭出力さえ得られるのなら、壁損失を最低限に抑えつつ、位相エラーも最小限に抑えられる。従って超高出力の尖頭出力で駆動するのが理想的であり、

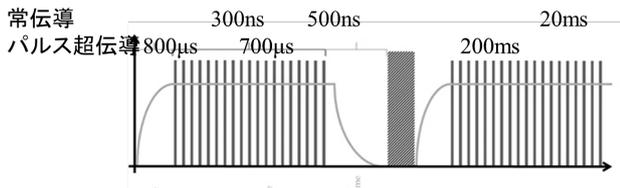


図2 ビームの時間的構造

蓄積すればするだけエネルギー効率も悪くなり、また蓄積すればするだけ位相エラーも蓄積する。

常伝導のマイクロ波加速器で一般的にディスクローディッド型の加速器が一般的なのは、ただ単にマイクロ波のエネルギー密度が低く、なおかつクライストロンというパワーソースが貧弱なため、群速度を落として、双方が満たされるような中庸点を探した結果であり、現実的なパワーソースなどのパラメーターから仕方なくこうなっていると良いだろう。結果として進行波管では位相エラーや製作の難しさから、100波程度の構造までしか1本で作れず、分割した分のエネルギー損失も発生する。これは現状のマイクロ波の尖頭出力では電磁波を貯めないと十分な加速電界が出ないからである。

一方超高周波でも原理は全く同ではあるが、エネルギー密度が極端に高くなるため現実的に達成可能なパラメーターは大きく異なる。エネルギーを貯める空間が  $1/f$  で小さくなるため、同じ電界強度を得るための電力は、 $1/f^2$  で下がるためである。ただし、超高周波で悪い事もあり、単位時間辺りに壁に電磁波が当たる回数が  $f$  倍になり、さらに悪い事に表皮効果は以下のような式で表されるため、壁損失は  $\sqrt{f}$  倍増える。従ってそもそもエネルギーを貯めるのには向かないため、高い尖頭出力を得るのかにかかっている事になる。

### 1.3 誘電体加速の方式

真空中を伝搬する電磁波は横波であり、荷電粒子を加速するには、横または斜め方向からの波を合成して縦方向の電場を生成するしかない。また加速する荷電粒子と電磁波の位相速度を合わせる方法が必要であり、この位相整合のために誘電体を利用する方法を総称して誘電体加速と呼んでいる。さらに相対論的な粒子に対しては光(光子)が粒子と相互作用できるのは1回のみで再利用はできないため、長距

離加速するには、粒子との相互作用回数分の電磁波の波数が必要であり、超短パルスの超高電界を利用する事は原理的にできない。さらに同じ粒子には電磁波が再利用できない事から加速の電力効率を上げるには後続の粒子に対して再利用する事が必須であり、このために電磁波蓄積の Quality Factor(Q 値 =  $\omega U/W$ ,  $\omega$  は角周波数、 $U$  は蓄積エネルギー、 $W$  は空洞の損失)、または Finesse という電磁波のエネルギーの蓄積または循環が必要である。

- Dielectric Lined Circular Waveguide (DLW) :  
キャピラリー中の THz 波で加速  
ビーム駆動 : 超短パルス電子ビームを通す際に生じる超高電界の THz 航跡場で後続のビームを加速  
レーザー駆動 : THz-PPLN で生成した高強度 THz
- Dielectric Laser Acceleration (DLA) :  
グレーティング構造に電磁波を照射して表面を走行する電子を加速する方式  
レーザーの周波数でも構造体が製作可能な方法  
しかしシャントインピーダンスがかなり低い
- Dielectric Wall Accelerator (DWA)  
光伝導スイッチ (PCSS) を用いて誘電体伝送路を高速にスイッチして加速電界を得る  
後述のモードロックと似たパルスが得られる
- Dielectric Assisted Accelerator (DAA)  
誘電体装荷型加速管 高い Q 値が得られる

### 1.4 壁材質

導電体表面では導電率が大きく変位電流は無視できるため、以下のようなになる。

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j \omega \mu \sigma \mathbf{H} \quad (19)$$

これを導体の深さ方向を  $d$  として解くと

$$H(d) = H(0) e^{j \omega t} e^{-(1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2}} d} \quad (20)$$

となり、電流は指数関数的に深さ方向に減衰する事が分かる。ここで電流もしくは磁界が  $1/e$  になる深さを表皮深さ ( $\delta$ ) と言う。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (21)$$

ここで表皮抵抗  $R_S$  を以下のようにおけば、

$$R_S = \frac{1}{\delta\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{\omega\mu\delta}{2} \quad (22)$$

表皮深さは周波数の平方根に反比例するため、例えば 3GHz が 300GHz になると、表皮深さが 1/10 になってしまい、結果的に表皮抵抗は 10 倍になってしまい、損失は 10 倍となる。従って、Q 値が 1/10 と非常に低くなってしまいうため、蓄積するような通常の空洞は超高周波では非常に電力効率が悪くなってしまふ。

超高周波では上述のように、表皮深さが短くなり、さらに壁に衝突する回数も増えてしまうため、通常の金属壁の空洞での Q 値は非常に低い。これは例えばレーザーなどの光の周波数 (数 100THz) などでは、金属ミラーの反射率が低くなるので使われないのが良い例である。そこでレーザーなどのミラーは通常は誘電体多層膜ミラーが利用されている。ミリ波帯では、この誘電体多層膜ミラーを使うのが微妙な領域であり、波長がそれなりに長いため、スパッタなどの方法で製造するには厚すぎて不可能である。そこで考えられる方法としては、金属と誘電体の組み合わせが考えられる。超高周波では、金属の反射率も光に比べれば高く、誘電体の誘電率も光に比べれば高い。従って、金属と高誘電率の誘電体の組み合わせを利用すれば、比較的高い反射率の壁を作る事ができる。この考え方は、OHO24 の別講で述べられている我々が考案した誘電体アシスト型加速空洞でも利用されている。

### 1.5 周波数重畳とモード同期

超高周波でさらに究極の加速器を考える時に新たな候補となる可能性があるのが周波数重畳である。マイクロ波でも周波数重畳は可能であり、研究はされている。例えば基本波と 2 倍波での重畳空洞は空洞の形状の変更で可能であるが、ビームとの位相速度を保ちつつ数個の周波数を重畳するだけでも、かなり難しい。

一方レーザーではモード同期レーザーは周波数重

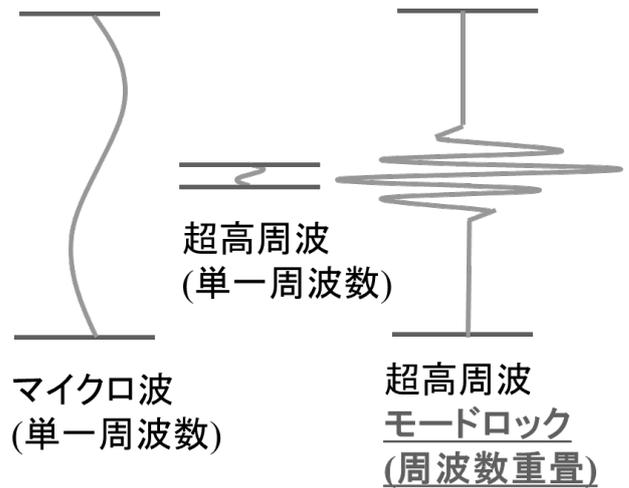


図 3 単一周波数の加速器とモードロック型の加速器

畳そのものの名称であるが、現在は当たり前の技術となっており、通常のモード同期レーザーで、Yb ファイバーレーザーや Ti:Sapphire のモード同期レーザーでは帯域としては 30THz (100nm) 程度で 100MHz 毎のモード同期が実現しており、これは 30 万個近い周波数の重畳が実現している事になる。

例えば 300GHz 程度の超高周波では、これらのマイクロ波とレーザーの中庸程度のモード同期は可能であり、例えば 10% (30GHz) の帯域のモード同期が可能だとして、加速器の構造体が 300 MHz (半波長で 50cm) 程度だと 100 個の周波数重畳が可能である事になり、単一周波数の超高周波と比べて 10 倍の電界が同じ電力で得られる事になる。例えば図 3 で、単一周波数で 1 GV/m が得られるのであれば、右図のようなモード同期では 10 GV/m が得られる事となり、非常に有望な超高電界加速器の候補となり得る。

## 2 Dielectric Lined Waveguide:DLW

誘電体装荷加速管とはビームの速度と加速管の位相を整合するために、誘電体壁または誘電体ディスクを用いた構造であり、電子ビーム駆動では 10GV/m 以上の電界が得られている [5]。

最も簡単な誘電体加速の構造としては筒状のガラス管を用いて電子ビームとの位相速度を合わせる方法がある。これは Dielectric Lined Waveguide(DLW) と呼ばれており、この DLW の加速モー

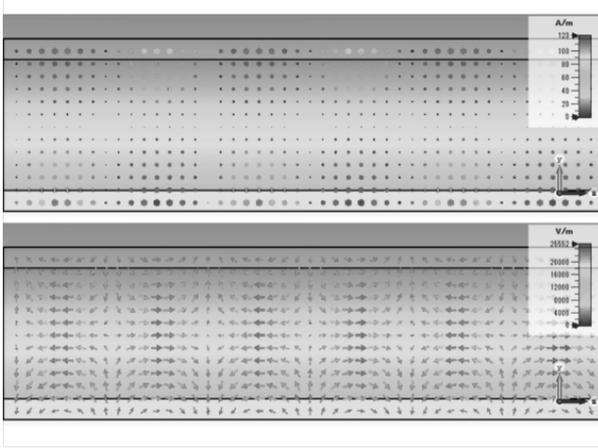


図4 DLWの加速モードの電界と磁界分布

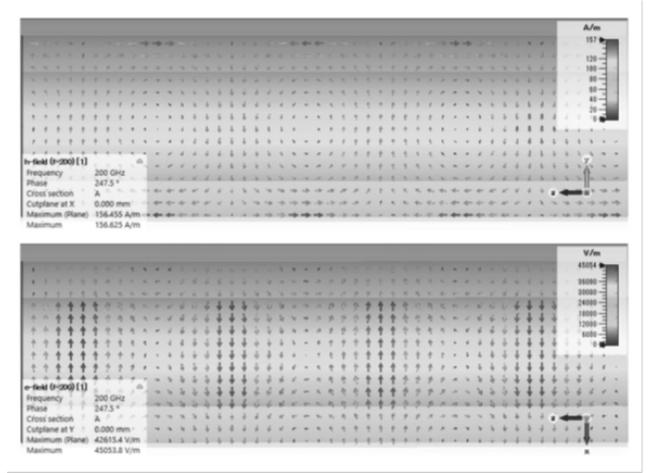
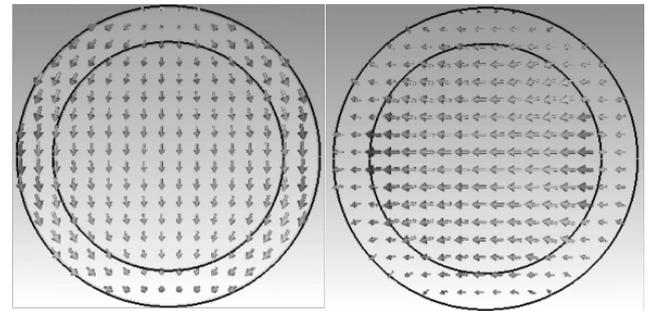
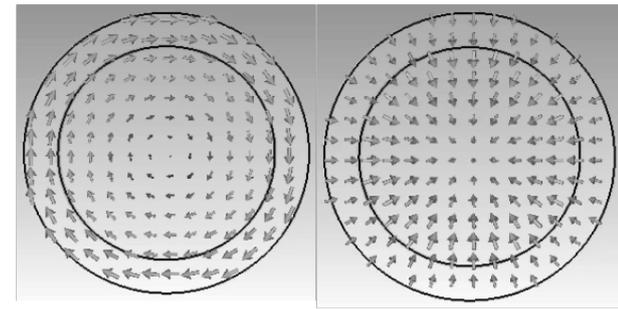


図5 DLWの偏向モードの電界と磁界分布



ドは図4で、また偏向モードは図5となっている、偏向モードはRFディフレクターと同じ原理でTHzディフレクターとして利用でき、XFELなどの超短バンチビームのスライス測定などに利用できる。

## 2.1 固有モード解析

誘電体円筒導波路の固有モード解析は文献[1]とその参考文献で研究されている。これらを[4]としてまとめている。

ここでは、誘電率  $\epsilon_0$  の真空孔を持つ誘電体で金属管の一部を満たしたものを考える。金属管の半径を  $b$ 、真空孔の1つを  $a$  とする。以下、真空領域 ( $0 \leq r \leq a$ ) を添え字1、誘電体領域 ( $a < r \leq b$ ) を添え字2とする。( $a < r \leq b$ ) を添え字2とする。例えば、真空領域の半径波数を  $k_{r1}$ 、誘電体領域の半径波数を  $k_{r2}$  とする。

角周波数  $k_\omega$ 、伝搬定数  $k_z$  のDLW内部を伝搬する電磁場は、ヘルムホルツ方程式から  $n$  方位波と  $m$  半径波の固有モードとして求めることができる。 $n = 0$  のとき  $E_z$  と  $H_z$  の成分は切り離されるので、 $H_z = 0$  の解には純粋な  $TM_{0m}$  モードを、 $E_z = 0$

の解には純粋な  $TE_{0m}$  モードを定義できる。一方、 $k_z > 0$  である限り、 $n > 0$  の解は  $E_z$  と  $H_z$  成分が0でなく、 $TEM_{nm}$  モードと呼ばれる。

位相速度  $v_p$  がビーム速度  $v_b < c$  と一致する場合を考えると、縦波数  $k_z$  は自由空間の波数  $k_0$  より大きくなるはずである。つまり、 $k_0 < k_z$  となる。

$$k_{r1}^2 = k_0^2 - k_z^2 \equiv -\alpha_1^2 < 0, \quad (23)$$

$$k_{r2}^2 = \epsilon_r k_0^2 - k_z^2 \equiv k_2^2 > 0. \quad (24)$$

ビーム軸に沿った一様性とマクスウェル方程式から、軸方向の磁場成分とその他の成分との関係は次のようになる。

$$\vec{E}_{ti} = \frac{i}{k_{ri}^2} \left[ -k_z \vec{\nabla}_t E_{zi} + \frac{\omega}{c} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t (Z_0 H_{zi}) \right], \quad (25)$$

$$Z_0 \vec{H}_{ti} = -\frac{i}{k_{ri}^2} \left[ k_z \vec{\nabla}_t (Z_0 H_{zi}) + \frac{\omega}{c} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_{zi} \right], \quad (26)$$

ここで、 $Z_0$  は真空中の波動インピーダンスである。すると、Eq.(25) と Eq.(26) を次のように縮約す

ることができる。

$$(\nabla_T^2 + k_{r_i}^2)E_{zi}(r, \theta) = 0, \quad (27)$$

$$(\nabla_T^2 + k_{r_i}^2)H_{zi}(r, \theta) = 0. \quad (28)$$

$k_{r_1}^2 < 0$  なので、真空領域での半径依存性はであるべきであり、 $I_n(\alpha_1 r)$  と  $K_n(\alpha_1 r)$  の第 1 種と第 2 種の修正ベッセル関数の線形結合である。原点に特異点があるため、 $\lim_{r \rightarrow \infty} K_n(\alpha_1 r) = \infty$  となる、 $I_n(\alpha_1 r)$  だけで十分である。誘電体領域では  $k_{r_1}^2 > 0$  なので、半径依存性は第 1 種と第 2 種のベッセル関数の線形結合  $J_n(k_2 r)$  と  $Y_n(k_1 r)$  の線形結合である。

$$E_{z1} = A_1 I_n(\alpha_1 r) \cos(n\phi) e^{i\psi(z,t)}, \quad (29)$$

$$H_{z1} = B_1 I_n(\alpha_1 r) \sin(n\phi) e^{i\psi(z,t)}, \quad (30)$$

$$E_{z2} = (A_2 J_n(k_2 r) + A_3 Y_n(k_2 r)) \cos(n\phi) e^{i\psi(z,t)} \quad (31)$$

$$H_{z2} = (B_2 J_n(k_2 r) + B_3 Y_n(k_2 r)) \sin(n\phi) e^{i\psi(z,t)} \quad (32)$$

ここで、 $\psi(z, t) = \Gamma t - k_z z$ 。

軸方向の電場の振幅と軸方向の磁場の振幅の比をと軸方向磁場の振幅の比を

$$\eta = \frac{A_1}{B_1}, \quad (33)$$

と定義する。これは DLW の伝搬モードのインピーダンスは Eq.(52) または Eq.(53) を用いて計算される。

議論を簡単にするために、 $u = \alpha_1 a$ ,  $v = k_2 a$ ,  $w = k_2 b$  と定義する。 $w = k_2 b$  と定義する。金属壁表面の境界条件  $E_{z2}|_{r=b} = 0$  と  $H_{r2}|_{r=b} = 0$  は次のようになる。

$$A_3 = -\frac{J_n(w)}{Y_n(w)} A_2 \equiv A_{32} A_2 \equiv A_{31} A_1, \quad (34)$$

$$B_3 = -\frac{J'_n(w)}{Y'_n(w)} B_2 \equiv B_{32} B_2 \equiv B_{31} B_1, \quad (35)$$

をそれぞれ定義する。また、比  $A_2 = A_{21} A_1$ ,  $B_2 = B_{21} B_1$  を定義する。

方位角  $n$  を持つ真空領域の電磁場は次のように与えられる：

$$E_{z1}^n = E_0 I_n(\lambda_1) \cos(n\phi) \cos \psi(z, t), \quad (36)$$

$$E_{r1}^n = -\gamma_p E_0 R_n(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi(z, t), \quad (37)$$

$$E_{\phi 1}^n = \beta_p \gamma_p E_0 R_n(\lambda_1, r_\eta, 1/\beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi(z, t) \quad (38)$$

$$H_{z1}^n = \frac{E_0}{Z_0} r_\eta I_n(\lambda_1) \sin(n\phi) \cos \psi(z, t), \quad (39)$$

$$H_{r1}^n = -\gamma_p \frac{E_0}{Z_0} R_n(\lambda_1, r_\eta, \beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi(z, t), \quad (40)$$

$$H_{\phi 1}^n = -\beta_p \gamma_p \frac{E_0}{Z_0} R_n(\lambda_1, 1, r_\eta/\beta_p) \cos(n\phi) \sin \psi(z, t) \quad (41)$$

ここで、 $\lambda_1 = \alpha_1 r$ ,  $r_\eta = Z_0/\eta$  である。 $k_z/\alpha_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_p^2} \equiv \gamma_p$  の関係を使う。 $Z_0$  は自由空間のインピーダンスで、誘電率  $\epsilon_0$ 、誘電率  $\mu_0$ 、自由空間の光速  $c$  と関係し、 $\epsilon_0 = 1/cZ_0$  である。とする。簡単のために、半径依存、縦・時間依存の関数を次のように定義する。

$$R_n(\lambda, A, B) = A I'_n(\lambda) + B \frac{n I_n(\lambda)}{\lambda}, \quad (42)$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{A}{2} \lambda, & (n=0) \\ \frac{A+B}{2}. & (n=1) \end{cases} \quad (43)$$

ここで、 $R_n(r, A, B)$  をビーム軸  $\lambda_1 = \alpha_1 r (\ll 1)$  の周りに展開する。

領域  $2(a < r < b)$  の磁場は次式で得られる。

$$E_{z2}^n = E_0 C_n(\lambda_2) \cos(n\phi) \cos \psi, \quad (44)$$

$$E_{r2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} E_0 R_{2n}(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi, \quad (45)$$

$$E_{\phi 2}^n = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} E_0 \bar{R}_{2n}(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) \sin(n\phi) \sin \psi, \quad (46)$$

$$H_{z2}^n = \frac{E_0}{Z_0} r_\eta D_n(\lambda_2) \sin(n\phi) \cos \psi, \quad (47)$$

$$H_{r2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} \frac{E_0}{Z_0} \bar{R}_{2n}(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi, \quad (48)$$

$$H_{\phi 2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} \frac{E_0}{Z_0} R_{2n}(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi, \quad (49)$$

ここで  $C_n(\lambda) = A_{21}J_n(\lambda) + A_{31}Y_n(\lambda)$ ,  $D_n(\lambda) = B_{21}J_n(\lambda) + B_{31}Y_n(\lambda)$ ,  $R_{2n}(\lambda, A, B) = AC'_n(\lambda) + B(nD_n(\lambda)/\lambda)$ ,  $\bar{R}_{2n}(\lambda, A, B) = AD'_n(\lambda) + B(nC_n(\lambda)/\lambda)$ . とした

誘電体と真空の境界の連続条件としては、電場の接線成分  $\vec{E}_i$  と磁場の接線成分  $\vec{H}_i$  が境界で同じになるようにする。縦成分は

$$E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a} \text{ and } H_{z1}|_{r=a} = H_{z2}|_{r=a} \text{ give}$$

$$A_2 = \frac{I_n(u)Y_n(w)}{J_n(v)Y_n(w) - J_n(w)Y_n(v)} A_1 \equiv A_{21}A_1, \quad (50)$$

$$B_2 = \frac{I_n(u)Y'_n(w)}{J_n(v)Y'_n(w) - J'_n(w)Y_n(v)} B_1 \equiv B_{21}B_1. \quad (51)$$

方位角成分については  $E_{\phi 1}|_{r=a} = E_{\phi 2}|_{r=a}$  and  $H_{\phi 1}|_{r=a} = H_{\phi 2}|_{r=a}$  で与えられる

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{nk_z}{\omega\mu_0} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (A_{21}J_n(v) + A_{31}Y_n(v)) \right] \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{1}{v} (B_{21}J'_n(v) + B_{31}Y'_n(v)) \right]^{-1} \quad (52)$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega\epsilon_0}{nk_z} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (B_{21}J_n(v) + B_{31}Y_n(v)) \right]^{-1} \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{\epsilon_r}{v} (A_{21}J'_n(v) + A_{31}Y'_n(v)) \right]. \quad (53)$$

(52) と (53) を減らすと、DLW の固有モードの分散関係は次のようになる。

$$f_{\text{disp}}(k_0, k_z, a, r_{ab}, \epsilon_r)$$

$$= \frac{k_0^2}{n^2 k_z^2} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (B_{21}J_n(v) + B_{31}Y_n(v)) \right]^{-1} \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{\epsilon_r}{v} (A_{21}J'_n(v) + A_{31}Y'_n(v)) \right] - \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (A_{21}J_n(v) + A_{31}Y_n(v)) \right] \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{1}{v} (B_{21}J'_n(v) + B_{31}Y'_n(v)) \right]^{-1}, \quad (54)$$

ここで、自由空間の波数  $k_0 = \omega/c$  と定義する。無次元パラメータ  $r_{ab} = a/b$  を定義し、金属壁の半径を  $b = a/r_{ab}$  とする。また、 $\text{TM}_{nm}$  モードについては、 $f_{\text{disp}}(k_0, k_z, a, r_{ab}, \epsilon_r) = 0$  の  $m$  番目の解の共鳴条件を求める。ここで周波数  $f = ck_0/2\pi$ 、伝搬定数  $k_z = k_0/\sqrt{1-1/\gamma^2}$ 、真空孔

半径  $a$ 、真空と誘電体の半径の比  $r_{ab} = a/b$ 、比誘電率  $r_{ab} = a/b$ 。比、比誘電率  $\epsilon_r$ 。

単位長さあたりのエネルギー  $U = (1/2) \int dS (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2)$ 。となり、電力束  $P_z = \int dS (E_r H_{\phi i}^* - E_{\phi i} H_r^*)$  は以下のように求められる：

$$U = \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{1}{\alpha_1^2} \Lambda_{u1}^n + \frac{\epsilon_r E_0^2}{2cZ_0} \frac{1}{k_2^2} \Lambda_{u2}^n,$$

$$= \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{\gamma_p^2 \beta_p^2}{k_0^2} \Lambda_{u1}^n + \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{\beta_p^2}{(\epsilon_r \beta_p^2 - 1) k_0^2} \Lambda_{u2}^n, \quad (55)$$

$$P_z = \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{k_z^2}{\alpha_1^4} \Lambda_{p1}^n + \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{k_z^2}{k_2^4} \Lambda_{p2}^n,$$

$$= \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{\gamma_p^4 \beta_p^2}{k_0^2} \Lambda_{p1}^n + \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{\beta_p^2}{(\epsilon_r \beta_p^2 - 1)^2 k_0^2} \Lambda_{p2}^n \quad (56)$$

ここで、無次元積分を次のように定義する。

$$\Lambda_{u1}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_1 \lambda_1 \left[ (c_n^2 + r_\eta^2 s_n^2) I_n^2(\lambda_1) + \gamma_p^2 (c_n^2 (R_n^2(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) + R_n^2(\lambda_1, \beta_p, r_\eta)) + s_n^2 (R_n^2(\lambda_1, \beta_p r_\eta, 1) + R_n^2(\lambda_1, r_\eta, \beta_p))) \right],$$

$$\Lambda_{u2}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_v^w d\lambda_2 \lambda_2 \left[ (\epsilon_r c_n^2 C_n^2(\lambda_2) + r_\eta^2 s_n^2 D_n^2(\lambda_2)) + \frac{1}{\epsilon_r \beta_p^2 - 1} (c_n^2 (\epsilon_r R_{2n}^2(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) + R_{2n}^2(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta)) + s_n^2 (\epsilon_r \bar{R}_{2n}^2(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) + \bar{R}_{2n}^2(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p))) \right],$$

$$\Lambda_{p1}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_1 \lambda_1 \left[ c_n^2 R_n(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) R_n(\lambda_1, \beta_p, r_\eta) + s_n^2 R_n(\lambda_1, \beta_p r_\eta, 1) R_n(\lambda_1, r_\eta, \beta_p) \right],$$

$$\Lambda_{p2}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_2 \lambda_2 \left[ c_n^2 R_{2n}(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) R_{2n}(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta) + s_n^2 \bar{R}_{2n}(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) \bar{R}_{2n}(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p) \right].$$

ここで、 $s_n = \sin(n\phi)$  と  $c_n = \cos(n\phi)$  を使う。

## 2.2 DLW の実証実験

現時点で外部の超高周波源による DLW の加速はまだ電界が低く、これまでの実証実験としては相対論的電子ビームを用いた航跡場によるものが行われている。これらについては電子ビーム駆動の超高周波源の所に記載した。

## 第 II 部

# 電子ビーム駆動の超高周波源 (ミリ波源=サブTHz 源)

電子ビーム駆動の超高周波源は、効率は比較的高くできるが、高出力化や装置の規模の関係で、実用化している物は少ない。電子ビームとしては非相対論的な電子ビームを使う方法と相対論的なビームを使う方法で大きく分けて、電子管とそれ以外で分けて述べる事とする。

### 1 電子管

電子管は非相対論的な数 kV~数 100kV の大電流電子ビームを用いて、増幅または発振するものである。ミリ波帯の電子管は様々な物が考案され、製品化されている物もある。1つのソースから全て賄うような産業用の加速器では発振管の使用も可能なケースもあるが、発振管は位相が制御できない上、発振波長も発振条件によって飛んだりする事もあり、不安定性から加速器では非常に使いづらい特に大型の加速器では位相が制御できる事が必須であるため、増幅管が必要となる。

#### 1.1 Gylotron

ジャイロトロンは  $TE_{0nm}$  のモードを用いて回転方向の電界との相互作用による電子管であり微細な構造を作らなくてもモードとの相互作用ができ、相互作用距離を長く取れるため、1THz 程度までの発振が可能である。ただしジャイロトロンは発振管であり、ジャイクロクライストロンという増幅管も可能ではあるが、寄生発振などの問題から製品化されている物は少ない。

#### 1.2 TWT(Travelling Wave Tube)

進行波管はヘリカル遅波回路を利用して、数 10GHz 帯などで比較的広帯域の増幅が可能な電子管である。ただヘリカル構造のサポートなどの製作上の精度などの限界があり数 10GHz 程度までが一般的である。また出力も小さく 20GHz 程度で数 kW 程度である。

#### 1.3 Extended Interaction Klystron

マイクロ波のクライストロンでは、1 空洞の空洞長で十分なビームとの相互作用があり、ビームの速度変調がかけられるが、ミリ波領域になってくると、相互作用距離が取れないため十分な変調がかからない。そこでクライストロンの中間空洞を複数セルなどにして進行波型などにする事で相互作用距離を長くし、クライストロンと同じ増幅を可能にした物は Extended Interaction Klystron(EIK) と呼ばれる。EIK は製品もあり、100GHz で数 kW のピーク出力の物があるが、300GHz 程度になると数 10W 程度のピーク出力が限界となる。ビーム電流としては  $f^{-2}$  で小さくなるだけなはずであるが、クライストロンでは 10 GHz で数 10MW が可能な事を考慮すると出力は  $f^{-4}$  程度で下がってしまっている事になる。超高周波でここまで出力が下がってしまうのは、周波数が上がると空洞の Q 値が下がってしまい、ビームとの相互作用によってできる電界も弱くなってしまい、さらにそれによりビーム電圧も下げる必要がある、出力が下がってしまうのだと思われる

#### 1.4 後進波発振管：BWO(Backward Wave Oscillator)

後進波発振管：BWO(Backward Wave Oscillator) は電子ビームと遅波構造の相互作用が電子ビームの進行方向と電磁波の群速度の方向が対向するタイプの発振器である。図 6 は、遅波構造の分散図を表しており、負の群速度をもつ後進波と相互作用をさせる。従って電子ビームの速度を変えると相互作用する空間高調波の位相速度つまり発振周波数を変化させる事ができる。この空間高調波によって電子ビームに集群がおき、集群した電子が後半の構造で空間高調波の減速位相に入ることによってエネルギーを失い電磁波を増幅する事で発振が起きる

図 7 は遅波構造内に誘起される場によって電子ビームが集群する様子である。このような遅波構造としては

- らせん構造
- 交叉指型回路
- 楕円形回路
- はしご型回路

などがあるが、良く研究されているのは交叉指型

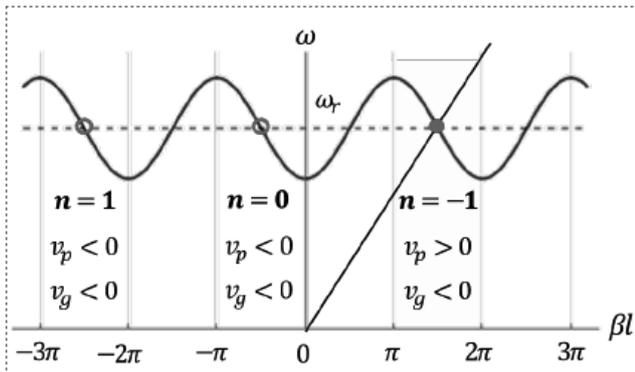


図6 遅波構造の分散図

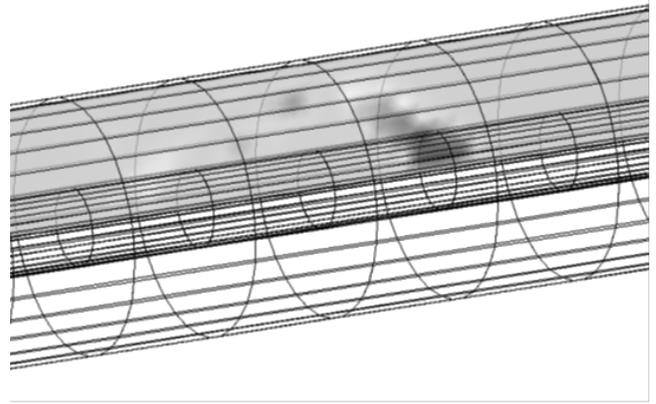


図9 DLW による航跡場

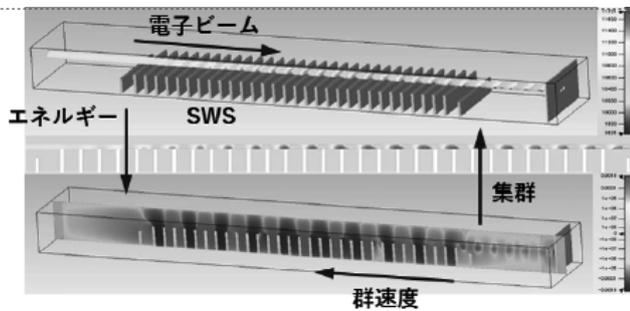


図7 遅波構造内に誘起される場によって電子ビームが集群する様子

回路と楕円形回路だと思われる。

## 2 相対論的電子ビームによるミリ波生成

### 2.1 航跡場

相対論的電子ビームは進行方向に  $\frac{1}{\gamma}$  で圧縮された電界分布を持つため、DLW 自身での超短パルスの電子ビームからの航跡場は、非常に強力であり、逆チェレンコフ放射と呼ばれる、電子バンチの持つ電界を誘電体により折り曲げたような後続の電界ができる (図 9)

$$eE_{z,dec} \approx \frac{-4N_b r_e m_e c^2}{a \left[ \sqrt{\frac{8\pi}{\epsilon-1} \epsilon \sigma_z + a} \right]} \quad (57)$$

例えばこれを

$$\begin{aligned} a &= 0.1 \text{ mm} \\ b &= 0.324 \text{ mm} \\ \epsilon &= 3.0 (\text{SiO}_2) \\ q &= 5 \text{ nC} \\ \sigma_z &= 30 \mu\text{m} (0.1 \text{ ps}) \end{aligned}$$

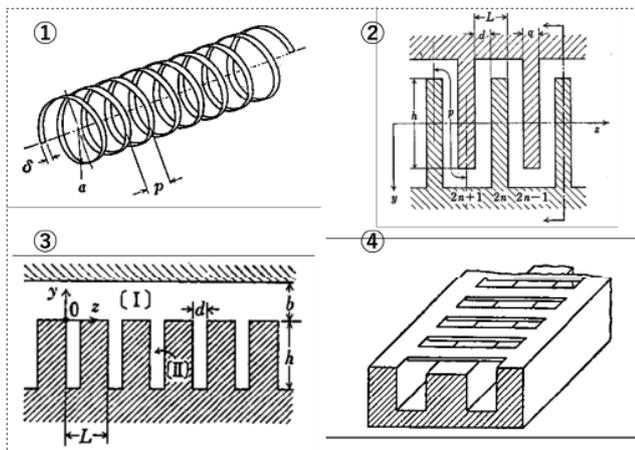


図8 遅波回路の構造

というようなパラメーターで計算すると 航跡場により発生した電界は 2 GV/m になる

今まで最も高い電界が得られた実証例としては Stanford Linear Accelerator Center での FFTB の実験による 13.8 GV/m という実証例がある ([5]).

KEK の電子陽電子入射器では、これらとは少し異

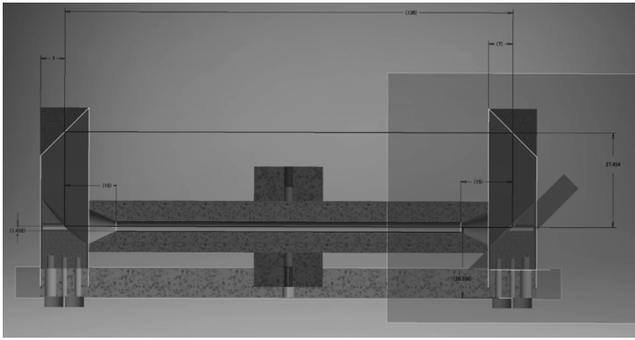


図 10 KEK における共振型 DLW 構造による THz Deflector の試験装置

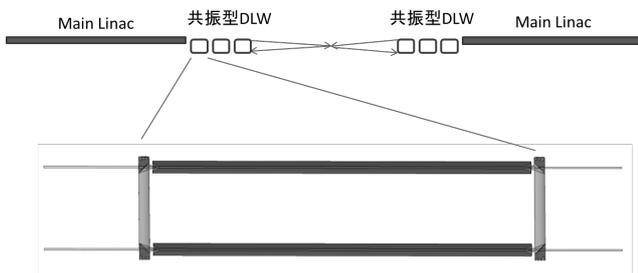


図 11 DLW アフターバーナー

なる方法で、DLW を THz-Deflector によるパンチのスライス形状の分析のために導入して実験を行っている。従来と異なるのは、自己航跡場ではなく、駆動ビームと分析ビームを異なる RF サイクルで加速された別々のビームを用いて、共振器型の構造の DLW を用いて、駆動ビームからの外部超高周波源を用いた、より加速器に近い実験が可能となっている。

この共振構造の DLW は逆側からのビームでも利用できるため、例えばコライダーのような加速器の相手側ビームを駆動ビーム源とした追加速用（アフターバーナー）としても利用可能であると考えられる (図 11)

## 2.2 FEL

### 2.2.1 シンクロトロン放射光

荷電粒子が真空中を等速直線運動している際には電磁波の放射はない。しかし、運動速度や運動方向が変化する際には電磁波が放出される。高エネルギーの電子が磁場の中を運動するとき、曲率中心に向かう力を受けて発生する電磁波をシンクロトロン放射光と呼ぶ。磁場の中を運動する荷電粒子からの電磁

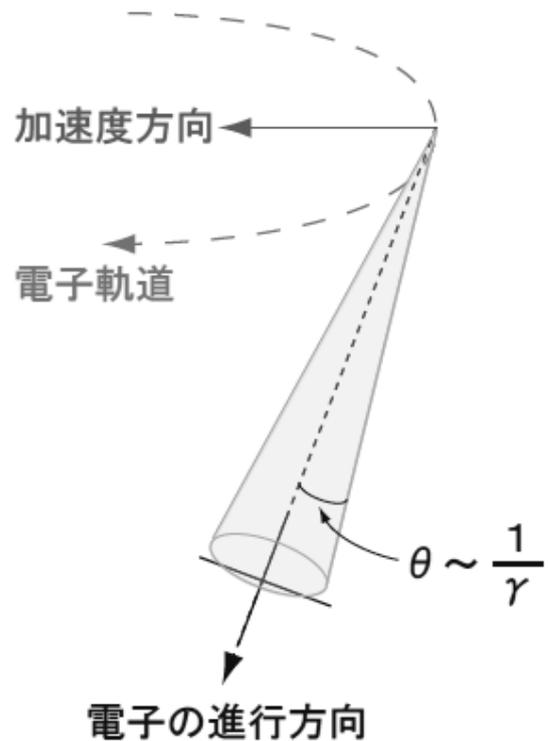


図 12 シンクロトロン放射光の強度分布。電子が赤の矢印の方向に加速度を受け、緑の点線のような軌道を取る時、放射光がオレンジの円錐のように放出される。電子の進行方向を黒い点線で示すとき、放射角度  $\theta$  は  $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$  となる。

波をシンクロトロン放射光とよぶようになったのは、これが初めて観測されたのが電子シンクロトロンであったことによる。

電子が相対論的速度で運動するときには、光の強度分布は電子の進行方向に集中する。相対論から電子系での  $\theta'$  の角度に出た光は、実験室系では、

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta'}{\beta + \cos \theta'} \quad (58)$$

で与えられる  $\theta$  の方向に観測される。ここで  $\beta$  は電子の速度  $v$  を光速  $c$  で割った値 ( $\beta = v/c$ ) であり、 $\gamma$  は電子のエネルギーを静止エネルギー  $m_0c^2 (= 0.51\text{MeV})$  で割った値であり、

$$\gamma = \frac{\text{電子のエネルギー [MeV]}}{0.51} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (59)$$

と表される。式 (58) によると  $\theta' = 90^\circ$  に出た光であっても  $\theta \approx 1/\gamma$  に放出されるので、大部分の光は

電子の進行方向に沿った狭い角度の円錐の中に放出される(図12)。また光速に近い速さで走る電子から放出される放射光は、相対論的ドップラー効果により、波長が非常に短くなる。

この鋭い指向性と短波長性が放射光の特徴である。

シンクロトロン放射光はX線、軟X線、真空紫外から紫外、可視領域までの広い波長域に及ぶ強力な連続スペクトル光であり、X線、軟X線、真空紫外領域の光科学にとって新しい光源である。放射光の取り出し方としては、偏向電磁石のところで発生する光を取り出す方法がある。しかし、この場合には利用できる放射光の波長域などが光源加速器全体の設計(軌道半径等)で決まるため、電子に小さな曲率半径を描かせるためのものとして考案されたものがウィグラーである。また、偏向電磁石やウィグラーから取り出される放射光は幅広い波長を持っているため、放射光の単色性を良くするために考案されたものがアンジュレータである。このアンジュレータと加速器を併用してレーザー発振機としたものが自由電子レーザーである。

### 2.2.2 誘導放射

アンジュレータ磁場がx軸に平行の場合、yz平面内の電子ビームの軌道は図13のように蛇行する。電子ビームの蛇行と同じyz平面に偏向面を持つ放射光(波長 $\lambda$ )の電場Eによる電子の加速減速を考える。まず図13において、電子の進行方向がy軸の正方向で、電場Eの向きがy軸の正方向である点A0について考える。この時電場Eにより、

電子は進行方向y軸正方向の逆であるy軸負方向に力を受ける。よって、点A0では電子ビームは減速される。次に電子がアンジュレータの半波長( $\lambda_u/2$ )進んだとき、電子が光の位相に対し光の半波長( $\lambda_s/2$ )だけ遅れた場合を考えると、A0の電子は図13のA1の位置に来る。この場合、電場Eにより電子は進行方向y軸負方向の逆であるy軸正方向に力を受ける。よって、A0→A1において連続して減速が起こる。同様にして、A2でも減速となり、最初A0から出発した電子は共鳴的に減速され続ける。このような条件を共鳴条件と呼び、電子が失ったエネルギーが放射光のエネルギーに変換され放射光が増幅される効果を誘導放射という。誘導放射は放射光の周期で配列した電子からの放射となるため、放

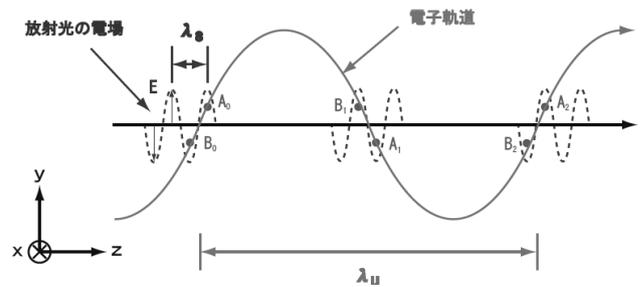


図13 電子と放射光の共鳴条件。緑は電子軌道、青は放射光の電場、 $\lambda_u$ はアンジュレータの周期長を表している。アンジュレータ磁場がx軸に平行のとき、電子ビームはyz平面内で蛇行する。電子の進行方向がy軸の正方向で、電場Eの向きがy軸の正方向であるような点A0の電子は放射光の電場により共鳴的に減速され続け、電子が失ったエネルギーが放射光のエネルギーに変換され増幅される。このような条件を共鳴条件という。

射光の位相に同調したコヒーレントな光となる。また点B0も同様に考えると、共鳴的に加速され続けることになり放射光が減衰され続ける。この場合、電子は放射光のエネルギーを吸収していると考えられる。以上のことから、誘導放射を起こさせ放射光を増幅するためには、電子ビームのエネルギー、電子と放射光の波長や位相など考慮する必要がある。

アンジュレータ中で波長 $\lambda_s$ の放射光と電子ビームが共鳴的に相互作用したとき、図13で説明したように電子のエネルギーが変調される。エネルギー変調された電子ビームではある距離伝播したのち密度変調が発生する。いま、共鳴条件を満たす電子ビームのエネルギーよりもわずかに高いエネルギーの電子ビームを入射したとする。加速位相の電子はエネルギー変調により共鳴条件からのずれが大きくなり、加速位相から減速位相への移動が起こる。一方、最初減速位相にあった電子はエネルギー変調の結果共鳴状態により近づくため、長時間にわたり減速位相に滞在する。以上の結果、電子ビームはレーザー光の周期で密度変調を受け、減速位相に集団化する。すなわち、電子ビームは全体として、エネルギーを失い、そのエネルギーは誘導放射によりレーザー光に変換される。逆に共鳴エネルギーよりもわずかに低いエネルギーの電子ビームは、レーザー光により加速される。その結果、レーザー光は減衰する。電子

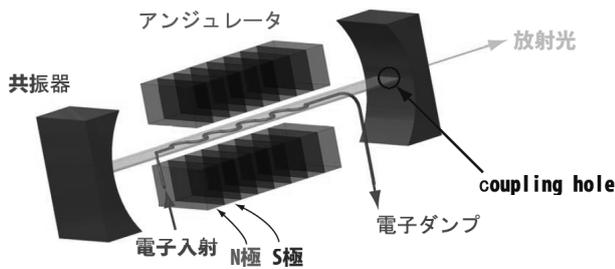


図 14 アンジュレータと光共振器。自由電子レーザーの構成要素である光発生・共振器部はアンジュレータと共振器から構成されている。入射された電子ビームはアンジュレータの周期的な磁場により蛇行運動をし、シンクロトロン放射光を放出する。放出されたしたシンクロトロン放射光はアンジュレータ前後に設置した光共振器により蓄積され増幅、レーザー発振を行う。

ビームが十分減速位相に集群化した状態では個々の集群があたかも一つの荷電粒子であるかのように振る舞い、シンクロトロン放射が起こる。シンクロトロン放射エネルギーは電荷  $q$  の粒子では  $q^2$  に比例する。したがって、ランダムに分布した  $N$  個の粒子による放射エネルギーは  $Nq^2$  に比例する。それに対し、 $N$  個の粒子が完全に集群化した場合には  $(Nq)^2$  に比例する。すなわち、共鳴するレーザー光の入射により誘導された放射光強度は通常のシンクロトロン放射光の  $N$  倍になる。

### 2.2.3 自由電子レーザー (Free Electron Laser, FEL)

自由電子レーザー (Free Electron Laser, FEL) は、電子加速器部と光発生・共振器部から構成されている。光発生・共振器部の図を図 14 に示す。FEL 発振までの過程は以下の通りである。まず加速器により相対論なエネルギーまで加速された電子ビームをアンジュレータに入射する。入射された電子ビームはアンジュレータの周期的な磁場により蛇行運動をし、シンクロトロン放射光を放出する。放出されたしたシンクロトロン放射光はアンジュレータ前後に設置した光共振器により蓄積される。その後、後発の電子ビームと繰り返し相互作用させることにより電子ビームを集群し、強い誘導放射を発生させ放射光を増幅する。この増幅率が共振器鏡での減衰率を上回るときに FEL 発振が起こる。

さらに THz～紫外線程度までの波長域では光学的

なミラーが利用できるため、先に説明した FEL はアンジュレータ前後に共振器を置きアンジュレータの長さを擬似的に無限長にすることで短いアンジュレータで FEL 発振を飽和させる事が可能となる。一方 X 線領域などになると効率の良いミラーが使えないため共振型 FEL は一部提案されているが、Self-amplified spontaneous emission (SASE) と呼ばれる自己増幅のみによる方法が実施されており、ショットノイズから飽和させるまで、アンジュレータ周期としては数 1000 周期 (数 10m) が必要となっている事が多い。

アンジュレータ放射光の波長  $\lambda_s$  は相対論的ドップラー効果により、アンジュレータの周期長  $\lambda_u$  よりも短くなる。式で表すと

$$\lambda_s = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (60)$$

となる。ここで  $K$  は”  $K$ -パラメータ” と呼ばれアンジュレータの性能を評価する重要なパラメータであり、磁場強度  $B_u$  に比例するパラメータで次式で与えられる。

$$K = \frac{eB_u\lambda_u}{2\pi m_0c} \quad (61)$$

ここで  $e$  は素電荷 ( $= 1.062 \times 10^{-19} [C]$ ) である。式 (61) より、アンジュレータ放射光の波長は  $\gamma$  や、 $K$ 、 $\lambda_u$  の値に依存する。そのため、磁場の強さや周期長、電子のエネルギーを変化させることで、波長を連続的に自由に選択することができる。

FEL は通常のレーザーのように原子、分子および固体の電子のエネルギー準位を利用せず、磁場中の自由電子をレーザー媒質としている。そのため、通常のレーザーのような媒質中での熱損失がなく高効率・高出力であり、また磁場強度および電子のエネルギーを変えることで発振波長を連続的に変えることができる。以上の特徴から既存のレーザーでは発振が困難な波長域、大パワー、単色性、などが実現でき、必要な様々な分野での応用利用が期待される。

### 2.2.4 THz～遠赤外の自由電子レーザー

例として東京理科大学に以前設置されていた自由電子レーザーの構成について紹介する [7]。東京理科大学 FEL-TUS には、以前 THz 帯の FIR-FEL と遠赤外の MIR-FEL の 2 台が並列に設置されていた

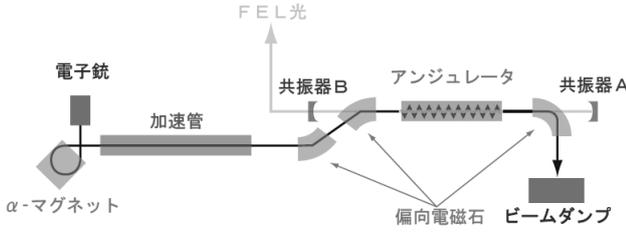


図 15 東京理科大学 FEL-TUS に以前設置されていた FEL (現在は KEK に移設) は電子銃、 $\alpha$  電磁石、線形加速器、アンジュレータ、光共振器、ビームダンプ等から構成されている。電子銃で電子を引き出し、 $\alpha$  電磁石で電子ビームのエネルギー分布幅、バンチを調節し線形加速器に送る。線形加速器で電子を加速し、アンジュレータに電子を入射し、放射光を放出させる。その後電子はビームダンプに捨てられ、放射光は共振器内に閉じ込められ、増幅、レーザー発振し、上流側ミラーの中心部の孔から外部に取り出され各実験室に供給される。

(MIR-FEL は現在 KEK に移設)。

このように THz / 遠赤外では光共振器が使えることや、FEL パラメーターを大きく取れるため、比較的簡単に高出力の THz や遠赤外を得る事ができる。出力としてはおよそ  $\mu J$  のレベルであるが、これがマルチバンチで出てくるため、蓄積できる構造体を設計すれば、十分に高い電界を得る事はできるはずである。ただしミリ波帯 (数 100GHz) まで波長が長くなり過ぎて、スリッページから増幅するための波長が取れない。例えば 300GHz では波長は 1mm で、3ps に相当するため、バンチ長が 10ps だとしても 3 波長しかない。つまりアンジュレータ 3 周期分しか増幅されない事になってしまう。従って、加速器側で低い周波数 (1GHz 程度) などの空洞を用いて 100ps 程度のバンチ長にして何とか数 100GHz を発振する事ができるため、装置が大型化してしまう。大阪大学などでは L-band の空洞からの電流ビームを用いて THz の FEL の発振が行われていたが、L-band では装置が大型化してしまい、加速ユニットの THz ソースとして使用するには厳しいと思われる。

### 第 III 部

## レーザー駆動の超高周波源 (ミリ波源 = サブ THz 源)

### 1 レーザー光源

#### 1.1 量子光学

量子光学は特にレーザーを作る上でそれほど役に立つわけでもないが、一応知識として持っているの良い部分もあるため簡単に式だけ記載しておく光子のハミルトニアンはヘルムホルツ方程式から始めて以下のように書ける

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = 0 \quad (62)$$

$$A(r, t) = A_0 e^{i(kr - \omega t)} \\ = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\mu=1}^2 e_{k\mu} \times \quad (63)$$

$$\{q_{k\mu}(t) e^{ikr} + q_{k\mu}^*(t) e^{-ikr}\} \quad (64)$$

$$(65)$$

ここで  $k_\mu$  の代わりに  $\lambda$  を用いる  $\mu$  は分極、 $e$  は分極のベクトルである。

$$H = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} \\ = \varepsilon_0 \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (q_\lambda^* q_\lambda + q_\lambda q_\lambda^*) \quad (66)$$

$$Q_\lambda(t) = q_\lambda(t) + q_\lambda^*(t) \quad (67)$$

$$\dot{Q}_\lambda(t) = -i\omega_\lambda (q_\lambda(t) - q_\lambda^*(t)) \quad (68)$$

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_\lambda \left(\dot{Q}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2\right) \quad (69)$$

$$P_\lambda = \varepsilon_0 \dot{Q}_\lambda = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_\lambda} \quad (70)$$

$$H = \sum_\lambda \left(-\frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_\lambda^2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2\right) \quad (71)$$

このハミルトニアンの生成消滅演算子は以下のよう書ける

$$\begin{aligned}
H|n\rangle &= \sum_{\lambda} \left( -\frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_{\lambda}^2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2 \right) |n\rangle \\
&= \hbar\omega \left( \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\
&= E|n\rangle
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\hat{a}_{\lambda} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}}{2\hbar}} \left( Q_{\lambda} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right), \tag{73}$$

$$\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}}{2\hbar}} \left( Q_{\lambda} - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right) \tag{74}$$

$$[\hat{a}_{\lambda}, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}] = 1 \tag{75}$$

$$\rightarrow \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} - \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} = 1 \rightarrow \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \tag{76}$$

$$= \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} + 1 = n + 1 \tag{77}$$

$$[\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] \tag{78}$$

$$= [|n\rangle, \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] = (n+1) [|n\rangle, |n\rangle] = n+1 \tag{79}$$

$$\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle = c |n+1\rangle \tag{80}$$

$$\rightarrow [\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] = c^2 [|n+1\rangle, |n+1\rangle] \tag{81}$$

$$= n+1 \tag{82}$$

$$c = \sqrt{n+1} \tag{82}$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle \tag{83}$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n-1\rangle \tag{84}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_{\lambda}^{\dagger})^n |0\rangle \tag{85}$$

次にコヒーレントな状態を記述すると

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{a} \hat{a}^{\dagger} |n\rangle &= \langle n | \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + 1 |n\rangle \\
&= (n+1) \langle n |n\rangle = n+1
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\hat{a}^{\dagger} |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \tag{87}$$

$$\langle n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle n+1 | \quad : \quad \text{Hermite} \tag{88}$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad : \quad \text{Annihilation op } \alpha \tag{89}$$

$$\langle n | \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \langle n |\alpha\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1 |\alpha\rangle \tag{90}$$

$$\rightarrow \langle n |\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1 |\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 |\alpha\rangle \tag{91}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n |\alpha\rangle = \langle 0 |\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{92}$$

$$\langle \alpha |\alpha\rangle = 1 = \langle 0 |\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle \alpha |n\rangle \tag{93}$$

$$= \langle 0 |\alpha\rangle^2 \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{n!} = \langle 0 |\alpha\rangle^2 \exp(|\alpha|^2) \tag{93}$$

(taylor series)

$$\begin{aligned}
\langle 0 |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n |\alpha\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle
\end{aligned} \tag{95}$$

Coherent state

$$|\langle n |\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha|^2) \tag{96}$$

Poisson Distribution

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\hbar}} \left( Q + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (97)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega \lambda}{2\hbar}} \left( Q - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (98)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (99)$$

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (100)$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*, \quad \langle \alpha | \alpha\rangle = 1 \quad (101)$$

$$\langle \alpha | Q | \alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} (\alpha + \alpha^*), \quad (102)$$

$$\langle \alpha | P | \alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2}} (\alpha^* - \alpha) \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | Q^2 | \alpha\rangle &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \left( (\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | P^2 | \alpha\rangle &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 | \alpha\rangle \\ &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger | \alpha\rangle \\ &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \left( 1 - (\alpha - \alpha^*)^2 \right) \end{aligned} \quad (105)$$

$$\Delta Q^2 = \langle \alpha | Q^2 | \alpha\rangle - \langle \alpha | Q | \alpha\rangle^2 = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}, \quad (106)$$

$$\Delta P^2 = \langle \alpha | P^2 | \alpha\rangle - \langle \alpha | P | \alpha\rangle^2 = \frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \quad (107)$$

$$\Delta Q \Delta P = \frac{\hbar}{2} \quad (108)$$

ハミルトニアン の 時間発展 の 方程式 は 以下 の よう に 書ける

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta |\beta\rangle \langle \beta | \alpha\rangle \quad (109)$$

$$|\{\alpha_\lambda\}\rangle = \prod_\lambda |\alpha_\lambda\rangle \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}t) &= \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e_k \left( q_k e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + q_k^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} q_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \hat{a}_k, \quad q_k^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} e_k \left( \hat{a}_k e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

$$\Psi(t) = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}t) \mathbf{A}(\mathbf{r}t) d^3r \quad (113)$$

$$\Psi(t) = e^{-\frac{Ht}{\hbar}} \Psi e^{\frac{Ht}{\hbar}}, \quad |\psi(t)\rangle = e^{\frac{Ht}{\hbar}} |t\rangle \quad (114)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \Psi(t) |t_0\rangle, \quad |t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle \quad (115)$$

$$U(t, t_0) = \exp \left( \sum_\lambda \{\hat{a}_k\} \right) \quad (116)$$

ここで

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\hbar}} \left( Q + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (117)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega \lambda}{2\hbar}} \left( Q - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (118)$$

これらから、時間発展の方程式は

$$H = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (119)$$

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E |n\rangle \quad (120)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i |e_i\rangle e^{-i\omega_i t} \langle e_i | \psi_0\rangle \quad (121)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \sum_i |e_i\rangle \hbar\omega_i e^{-i\omega_i t} \langle e_i | \psi_0\rangle = H_0 |\psi(t)\rangle \quad (122)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{Ht}{\hbar}} |\psi_0\rangle \quad (123)$$

輻射と電子の相互作用は、

$$H_{Interaction} = \frac{1}{2m} (p + eA)^2 - e\varphi \quad (124)$$

$$H = H_{Atomic} + H_{Interaction} \quad (125)$$

$$H_{Atomic} = \sum_j p_j^2 + V(r_1, r_2, \dots) + \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (126)$$

$$p = -i\hbar\nabla \quad (127)$$

$$H_{Interaction} = \sum_j \frac{e}{2m} (p_j A(r_j) + A(r_j) p_j) + \frac{e^2}{2m} \sum_j A(r_j)^2 = \sum_j \frac{e}{m} p_j A(r_j) + \frac{e^2}{2m} \sum_j A(r_j)^2 \quad (128)$$

$$\text{Coulomb gauge: } p_j A(r_j) = -i\hbar \{ \text{div} A(r_j) + A(r_j) \nabla_j \} = A(r_j) p_j \quad (129)$$

$$(130)$$

$$H_{Interaction} = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \times \sum_j \sum_\lambda \frac{1}{\sqrt{\omega_\lambda}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} (e_\lambda p_j) \hat{a}_\lambda + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} (e_\lambda p_j) \hat{a}_\lambda^\dagger \right\} \quad (131)$$

$$(132)$$

$$(133)$$

これを相互作用表示にすると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\psi(t)\rangle \quad (134)$$

$$|\psi'(t)\rangle = e^{\frac{H_0 t}{\hbar}} |\psi(t)\rangle \quad (135)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'(t)\rangle = H'_I |\psi'(t)\rangle \quad (136)$$

$$H'_I = e^{-\frac{H_0 t}{\hbar}} H_I e^{\frac{H_0 t}{\hbar}} \quad (137)$$

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle \quad (138)$$

$$i\hbar \frac{dc_f(t)}{dt} = \sum_n \langle f | H'_I | n \rangle c_n(t) \quad (139)$$

$$c_f(t) = \langle f | H'_I | g \rangle \frac{1 - e^{\frac{i(E_f - E_g)t}{\hbar}}}{E_f - E_g} \quad (140)$$

$$W_{fi} = \frac{|c_f(t)|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\lambda \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{\hbar n_\lambda}{2\varepsilon_0 V \omega_\lambda} \times$$

$$\left| \langle b | \sum_j e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} (e_\lambda p_j) | a \rangle \right|^2 \quad (141)$$

$$\delta(E_f - E_i) \quad (142)$$

$$E_a \rightarrow E_b : \quad (143)$$

$$E_f - E_i = E_b - \hbar\omega_\lambda - E_a \quad (144)$$

$$\rho(\omega_\lambda) d\omega_\lambda = \hbar\omega_\lambda \frac{n_\lambda}{V} d\omega_\lambda \quad (145)$$

$$\langle b | e_\lambda \sum_j p_j | a \rangle = im\omega_{ba} \langle b | e_\lambda \sum_j r_j | a \rangle = -\frac{im}{e} \omega_{ba} e_\lambda \langle b | P | a \rangle \quad (146)$$

これらからアインシュタインのレート方程式は以下のようになる

$$\begin{aligned} &: W_{fi} = B_{ba}\rho(\omega_{ba}) \\ &= \frac{\pi}{3\varepsilon_0 \hbar^2} |P_{ba}|^2 \rho(\omega_{ba}) \langle b | e_\lambda P | a \rangle = \frac{|P_{ba}|^2}{3} \quad (147) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{fi} &= B_{ba}\rho(\omega_{ba}) + A_{ab} \\ &= \frac{\pi}{3\varepsilon_0 \hbar^2} |P_{ab}|^2 \rho(\omega_{ba}) + \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3} |P_{ab}|^2 \quad (148) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_a}{dt} = -\frac{dN_b}{dt} = \quad (149)$$

$$]A_{ab}N_b - B_{ba}N_a\rho(\omega) + B_{ab}N_b\rho(\omega) \quad (150)$$

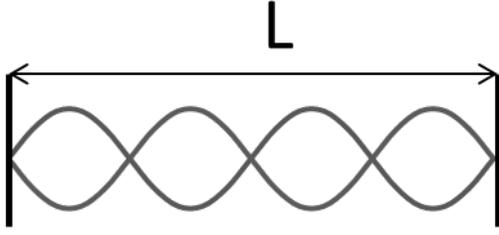


図 16 レーザー共振器

$$E(t) = A \sum_{n=0}^N e^{i\omega_n t + i\phi_n}$$

$$\overline{I(t)} = A^2 \sum_{n=0}^N \overline{\cos^2 \omega_n t} = \frac{A^2(N+1)}{2}$$

## 1.2 レーザー発振とモードロック発振

### 1.3 レーザーの発振モード

レーザー共振器は図 16 のように一番簡単には 2 つの壁で形成され

共振器に存在するレーザーの波長は

$$\frac{\lambda_n}{2} n = L \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi c}{2L} n$$

で表され、共振器内の電界は以下ようになる

$$E(t) = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\omega_n t + i\phi_n}$$

ここに存在するレーザーの発振モードとしては以下の 3 種類の物が考えられる

- 連続波 (Continuous Wave: CW) 単一モードの非同期の振幅が同じレーザーの重ね合わせである

$$A_n = \begin{cases} A & (n = \frac{2L\omega}{2\pi c}) \\ 0 & (\text{others}) \end{cases}$$

$$E(t) = A e^{i\omega t + i\phi}$$

$$I(t) = |E(t)|^2 = A^2$$

- Q スイッチ ～10 ns

Q スイッチは連続波と同じだが、ポッケルスセルなどのデバイスを用いて時間的に瞬間的に空洞の Q 値を高くする事で、上準位に蓄積されたエネルギーを急速に誘導放出させ 10ns 程度のパルスが出力できる方法である

$$\begin{cases} A_n = A \\ \phi_n = \text{random} \end{cases}$$

- モード同期 ～10 fs

一方モード同期というのは非線形デバイスなどを用いた何らかの方法により、揃った位相のレーザーを発振させる方法であり

$$\begin{cases} A_n = A \\ \phi_n = \phi \end{cases}$$

$$E(t) = A e^{i\phi} \sum_{n=0}^N e^{i\omega_n t} \quad (151)$$

$$= A e^{i\phi} \sum_{n=0}^N e^{i \frac{2\pi c t}{2L} n} \quad (152)$$

$$= A e^{i\phi} \frac{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L} (N+1)}}{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L}}} \quad (153)$$

$$(154)$$

$$I(t) = A^2 \left| \frac{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L} (N+1)}}{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L}}} \right|^2 \quad (155)$$

$$= A^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{2\pi c t (N+1)}{2L} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi c t}{2L} \right)} \quad (156)$$

$$(157)$$

#### 1.3.1 モード同期

モード同期は  $t=0$  付近で展開すると以下のように書ける

$$E(t) = Ae^{i\phi} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} e^{i\omega_n t} \quad (158)$$

$$= Ae^{i\phi} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} e^{in\Delta\omega_{LD}t} \quad (159)$$

$$= Ae^{i\phi} \frac{e^{iN_{\min}\Delta\omega_{LD}t} - e^{i(N_{\max}+1)\Delta\omega_{LD}t}}{1 - e^{i\Delta\omega_{LD}t}} \quad (160)$$

$$= \frac{Ae^{i\phi}}{\frac{(\Delta\omega_{LD}t)^2}{2} - i\Delta\omega_{LD}t} \times [ \quad (161)$$

$$\frac{(N_{\min}\Delta\omega_{LD}t)^2}{2}$$

$$+ iN_{\min}\Delta\omega_{LD}t$$

$$- \frac{((N_{\max} + 1)\Delta\omega_{LD}t)^2}{2}$$

$$- i(N_{\max} + 1)\Delta\omega_{LD}t ]$$

$$= \frac{Ae^{i\phi}}{1 - i\frac{\Delta\omega_{LD}t}{2}} \times [ \quad (162)$$

$$(N_{\max} + 1 - N_{\min})$$

$$- i \frac{((N_{\max} + 1)^2 - N_{\min}^2) \Delta\omega_{LD}t}{2} ]$$

$$\Delta t(-3dB) = \frac{2(N_{\max} + 1 - N_{\min})}{((N_{\max} + 1)^2 - N_{\min}^2) \Delta\omega_{LD}} \quad (163)$$

$$= \frac{2}{(N_{\max} + 1 + N_{\min}) \Delta\omega_{LD}} \quad (164)$$

$$E(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (165) \quad (167)$$

これは結果として

$$I(t) = A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi ct(N+1)}{2L}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi ct}{2L}\right)} \quad (166)$$

この式は図 17 のように  $\Delta t = \frac{2L}{c}$  毎に  $I(t) = A^2(N+1)^2$

の尖頭出力のパルスが得られる事になるここで特筆すべきは同じ平均出力のレーザーでもモードの数  $N$  が増えると  $N$  倍の尖頭電界が得られる事である。

なお、パルス幅にはフーリエ限界の関係があり、電界の時間分布は以下のようなフーリエ変換の関係があり

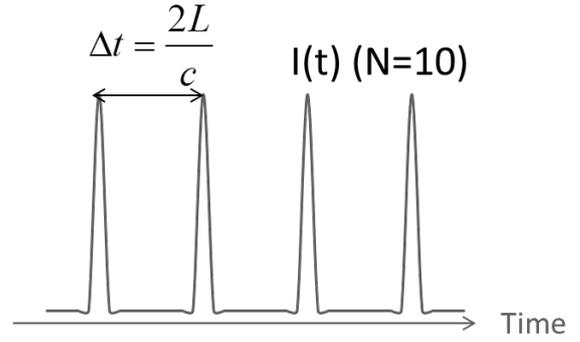


図 17 モードロック発振

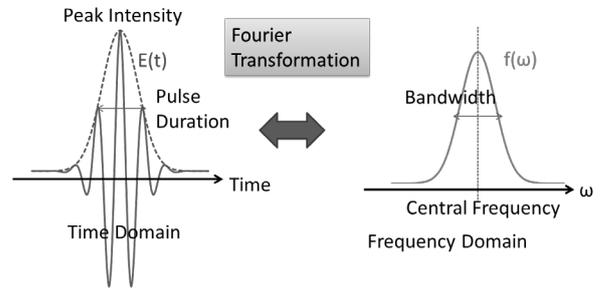


図 18 フーリエ限界

$$f(\omega) = \exp[-a(\omega - \omega_0)^2 + i\phi(\omega)] \quad (168)$$

$$= \exp[-a(\omega - \omega_0)^2] \quad (169)$$

$$+ i\beta_0 + i\beta_1(\omega - \omega_0) \quad (170)$$

$$+ i\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots] \quad (171)$$

$$(172)$$

と過程すると帯域は

$$I(\omega) = f(\omega)^2 \rightarrow \Delta\omega = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{a}} \quad (173)$$

となる

#### 1.4 レーザー媒質と配置

科学的な目的でレーザーを利用する際、一般的に特定の波長のレーザーが必要である事が多く、以前

のレーザー開発は、その特定の波長に準位のあるレーザー媒質を探す事が重要であった。しかし近年非線形光学素子による波長変換効率が飛躍的に上がり、次は非線形光学素子の位相整合角が取れる材料を探す事が重要となった。さらにその後周期構造を持つ擬似位相整合 (quasi-phase matching: QPM) という方法が実用化され、現在ではこの擬似位相整合によりどのような周波数でも位相整合が可能になった事により材料の非線形光学定数と耐力だけが問題になる時代となってきている。

従って、駆動用レーザーとしてはどんな波長でも良くなり、一般的に半導体レーザー励起で大出力・高効率を得やすい Nd:YAG や Yb:YAG レーザー媒質を用いて、そこから QPM によって任意の波長を得るのが最も効率良く最短の期間で開発ができる方法となった。例外としては帯域の広い Ti:Sapphire レーザーだけは少々特殊であり、Ti:Sapphire の帯域内にある波長 650~950nm 程度に関しては、超高出力が得られるため、Ti:Sapphire レーザーが用いられるが、それ以外の周波数では、非線形デバイスで倍波を取ったり、足したり引いたりを任意に行い、材料の特性が得られる範囲内であれば、どのような波長でも生成する事ができるようになった。

レーザー媒質としては、以下のようなものがあるが、固体レーザーのみについて述べる事とする

- 固体レーザー蛍光寿命や波長の可変範囲が無く、従来は誘導放出による固体レーザーだけでは様々な応用をカバーできなかった。しかし近年は半導体レーザーが高出力化した事により励起が高効率になり、また非線形デバイスの高効率化と合わせて固体レーザーのみで様々な用途に活用できるようになっており、本稿では固体レーザーのみについて述べる事とする
- ガスレーザー短波長、長波長などの固体レーザーで対応できない領域で、ガスの種類により短波長や長波長が出る物があり、産業用で利用されているものとして短波長でエキシマレーザー、長波長で CO<sub>2</sub> レーザーなどがあるそれぞれこの特定の波長では固体レーザーより効率良く高出力の光源として利用できる
- 色素レーザー様々な色素による波長選択性がある

	Yb:YAG	Ti:Sapphire	Nd:YAG
中心波長	1030nm	780nm	1064nm
発振帯域幅	5nm	230nm	0.45nm
最小パルス幅	310fs	4fs	3.7ps
励起波長	941nm	500nm	808nm
量子欠損	9%	36%	24%
上位準位寿命	951μs	3.2μs	230μs
添加量	~100%	~0.1%	~1%

図 19 最も代表的な固体レーザー媒質

るが、近年は安定性の面などから固体レーザーの非線形媒質による OPO などに置換されてきている。

固体レーザー媒質の最も代表的な物としては、図 19 がある。

もちろん他にも様々な特徴を持つ興味深いレーザー媒質は他にも色々存在するが、結局のところ、あまり普及していない。その理由としては、YAG または Sapphire が単結晶成長で最も安定に高品質な物が得られ、さらに Yb:YAG や Nd:YAG は十分に長い蛍光寿命がある。

さらに近年の固体レーザーは半導体レーザーダイオード励起であり、高出力が得やすいのが InGaAs による 900nm 付近であるため、この波長帯で励起できる固体レーザーが Yb:YAG や Nd:YAG だからである。

例えば Yb 系の他の材質として、図 20 のように様々な物があり、帯域の面で有利な結晶も多数あるが、往々にして熱伝導率が悪かったり、結晶の品質が悪かったりと、Yb:YAG 程は普及していない

一方 Sapphire は結晶の品質や熱伝導率などの面から超高出力を得るには最良の母材であるはずだが、強固な結晶構造のため Nd などのドーパが非常に難しく、研究レベルで成功した例はあるが量産できる状況にはなっていない。また Ti ドープでは帯域は非常に広いものの、蛍光寿命が短く、直接半導体励起では難しいそこで、YAG レーザーの倍波である 500nm 付近のレーザーが、Ti:Sapphire レーザーの吸収波長となり、YAG レーザー励起が一般的となった。これにより 600-1000nm 程度の波長域については Ti:Sapphire レーザーでカバーできる。

さらに短波長側は非線形媒質による倍波や 3 倍波、

Yb Base material	Stimulated emission cross section [10-20cm <sup>2</sup> ]	Fluoresce nce lifetime [ms]	Thermal conductivity [W/mK]	Fluorescence spectral width [nm]	Fourier minium [fs]	Experimental records	
						Pulse width [fs]	Average power [W]
YAG	2	0.95	11	9	120	340	0.11
						136	0.003
						730	16
						810	60
KYW	3	0.7	3.3	24	50	71	0.12
KGW	3	0.7	3.3	25	47	112	0.2
						176	1.1
glass	0.63	2	-	35	33	36	0.065
GdCOB	0.35	2.7	2.1	44	27	89	0.04
BOYS	0.2	2.5	1.8	60	19	69	0.08
						86	0.3
YVO4	-	1.2	-	-	-	61	0.054
CaCdAlO4	0.55	-	6.9	-	-	47	0.038

図 20 Yb 系の様々なレーザー媒質のパラメーター

4 倍波生成によって 200nm 付近まではカバーでき、また長波長側も非線形媒質による差周波や OPO などによりカバーできるため、電力効率が数 % 程度で良ければ、これらの媒質と非線形媒質の組み合わせで比較的どのような波長でも生成できる事になる。

ただし効率としては

- 半導体レーザーダイオード (40%) パルス幅 250-1000  $\mu$ s / 10 kW など
- YAG レーザー (30%) パルス幅 1-10ns / 100-1000 MW
- SHG (60 %)
- Ti:Sapphire (50 %) パルス幅 10- fs / 10-100 TW
- OPO / DFG / SHG など (50 %)

などとなり、総合効率では 2 % 程度とかなり低いが、波長やパルス幅の可変性など汎用性は非常に高い。

Nd:YAG は 4 準位レーザーであり、発振の下準位が 100ps のオーダーで基底準位に落ちるため下準位に残らないため吸収が起きない。このような 4 準位レーザーの固体レーザーの小信号増幅率は以下のように書ける

$$E_{pump} = \frac{P_{pump}}{A} T_{pulse} \left( 1 - e^{-\frac{T_{pulse}}{\tau}} \right) \quad (174)$$

$$\eta_{pump} \eta_{quantum} \quad (174)$$

$$E_s = \frac{h\nu_e}{\sigma_e} : \text{Saturation fluence.} \quad (175)$$

$$\frac{dE_{pump}}{dz} = \alpha E_{pump} e^{-\alpha z} \quad (176)$$

$$N_2 = \frac{dE_{pump}}{dz} / h\nu_{pump}, \quad N_s = \frac{1}{\sigma_e} \quad (177)$$

$$g = \sigma_e N_2 + \sigma_a N_1$$

$$= \frac{\sigma_e \alpha e^{-\alpha z} P_{pump} T_{pulse} \left( 1 - e^{-\frac{T_{pulse}}{\tau}} \right)}{h\nu_{pump} A} \quad (178)$$

$$\eta_{pump} \eta_{quantum} \quad (178)$$

$$g_L = \int_0^L \sigma_e N_2 dz = \frac{E_{pump} / h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{E_s / h\nu_e}$$

$$= \frac{N_p}{N_s} \quad (179)$$

$$\text{small signal gain} : G = e^{g_L}, \quad G_0 = e^{\frac{N_p}{N_s}} \quad (180)$$

さらに飽和フルエンスに近くなると、増幅は Frantz Nodvik の方程式で表される

$$e^{E_1/E_s} - 1 = \left( e^{E_0/E_s} - 1 \right) G_0 \quad (181)$$

これから 4 準位レーザーの固体レーザーの増幅効率は

$$\eta_{amp} = \frac{E_1 - E_0}{E_{pump}}$$

$$= \frac{E_s (\log(x_0 G_0 + 1) - \log(x_0 + 1))}{E_{pump}} \quad (182)$$

$$\rightarrow \quad (183)$$

$$\eta_{max} (x_0 \gg 1)$$

$$= \frac{E_s \log(G_0)}{E_{pump}} = \frac{1/h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{1/h\nu_e}$$

$$= \eta_{stokes} (1 - e^{-\alpha L}) \quad (184)$$

$$q = \frac{E_{pump}}{E_s}, \quad (185)$$

$$g_L = \frac{E_{pump}/h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{E_s/h\nu_e} = q\eta_{max} \quad (186)$$

$$G_0 = e^{q\eta_{max}} \quad (187)$$

$$\eta = \frac{E_1 - E_0}{E_{pump}}$$

$$= \frac{\log(x_1 + 1) - \log(x_1 e^{-q\eta_{max}} + 1)}{q} \quad (188)$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{e^{E_n/E_s} - 1}{e^{E_{n-1}/E_s} - 1} = G_0$$

$$\rightarrow \frac{x_n}{x_0} = G_0^n = e^{nq\eta_{max}} \quad (189)$$

$$\eta_{total} = \frac{E_n - E_0}{nE_{pump}} \quad (190)$$

$$= \frac{\log(x_n + 1) - \log(x_0 + 1)}{nq} \quad (191)$$

$$= \eta_{max} \frac{\log(x_n + 1) - \log(x_0 + 1)}{\log(x_n) - \log(x_0)}$$

$$= \eta_{max} \eta_{amp} \quad (192)$$

Yb:YAG のような 3 準位レーザーでは吸収があるため、励起密度を高くしないと増幅率が 1 を越えない。しかし近年の半導体レーザーの高出力化により比較的簡単に高密度の励起が可能となった

また近年ではファイバーレーザーも平均出力が半導体レーザー励起で非常に高い効率を得られるようになり注目されている。ただしファイバーレーザーでは大口径の物でも mJ レベルが限界である

## 1.5 分散とチャープパルス増幅

チャープパルス増幅 (Chirped Pulse Amplification : CPA) は飛躍的にレーザーの尖頭出力を TW 以上に伸ばす事に成功した。これはモードロックレーザーからの超広帯域・超短パルスのレーザーを

そのまま増幅のは、結晶が破壊閾値を越えてしまう上、媒質の分散や非線形性で限界がある。

そこでグレーティングなどの分散性デバイスを利用して、超短パルスを波長依存の時間遅延させ、パルス幅を広げた後、圧縮する事で、非常に高い尖頭出力を得る事ができるようになった。

### 1.5.1 分散

モードロックの所でも述べたが、電界は以下のようなフーリエ変換の関係があり、

$$E(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (193)$$

周波数分布をガウシアンであると過程すると、

$$f(\omega) = \exp[-a(\omega - \omega_0)^2 + i\phi(\omega)]$$

$$= \exp[-a(\omega - \omega_0)^2$$

$$+ i\beta_0 + i\beta_1(\omega - \omega_0)$$

$$+ i\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots] \quad (194)$$

これを

$$\beta_1 \neq 0, \beta_0 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0, \quad (195)$$

の条件で考えると

$$E(t)$$

$$= A e^{i\omega_0 t} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a\omega^2 + i\beta_1\omega + i\omega t] d\omega \quad (196)$$

$$= A e^{i\omega_0 t} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a(\omega - \frac{i(t + \beta_1)}{2a})^2$$

$$- \frac{(t + \beta_1)^2}{4a}] d\omega \quad (197)$$

$$= A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times$$

$$\exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4a} + i\omega_0 t] \quad (198)$$

これはパルス幅だと

$$I(t) = E(t)^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{8a \ln 2} \quad (199)$$

となる。これが最短に圧縮されたフーリエ限界と

呼ばれるパルス幅である。

一方2次の分散のある以下の条件で考える

$$\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_0 = \beta_3 = \beta_4 = \dots = 0, \quad (200)$$

すると時間方向の電界分布は以下ようになる

$$E(t) = Ae^{i\omega_0 t} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a\omega^2 + i\beta_1\omega + i\frac{\beta_2}{2}\omega^2 + i\omega t]d\omega \quad (201)$$

$$= Ae^{i\omega_0 t} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(a - i\frac{\beta_2}{2})\omega^2 + i\{\omega - \frac{i(t + \beta_1)}{2(a - i\frac{\beta_2}{2})}\}^2 - \frac{(t + \beta_1)^2}{4(a - i\frac{\beta_2}{2})}]d\omega \quad (202)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4(a - i\frac{\beta_2}{2})} + i\omega_0 t] \quad (203)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4(a + i\frac{\beta_2}{2})} \cdot \frac{(a - i\frac{\beta_2}{2})}{(a - i\frac{\beta_2}{2})} + i\omega_0 t] \quad (204)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)} + i\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + i\omega_0 t] \quad (205)$$

$$= A' \exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)}] \times \exp[i\{\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 t\}] \quad (206)$$

$$(207)$$

この第一項はパルス幅、2項目は周波数分布である。

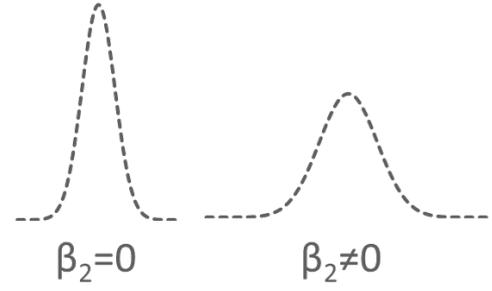


図21  $\beta_2$ が0でない時のパルス幅

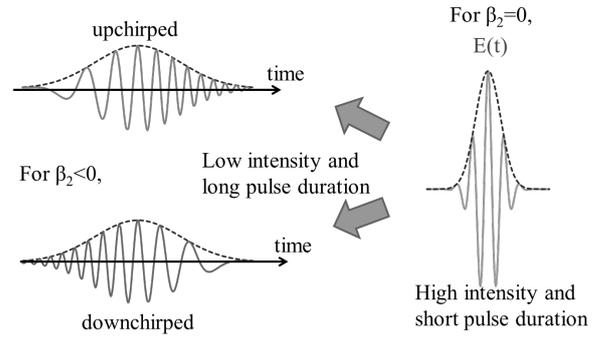


図22  $\beta_2$ の極性によるチャープパルス

パルス幅の項は

$$\exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)}] \quad (208)$$

であり、これを図示すると周波数の項は

$$\exp[i\{\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 t\}] \quad (209)$$

であり、位相の時間的な変化量は以下となる

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\beta_2(t + \beta_1)}{(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 = \omega_0 \quad (210)$$

従って分散性の媒質で  $\beta_2$  が正の時と負の時それぞれ図22のようなパルス波形になる事が分かる

この正負の2次分散を使って超高尖頭出力を得る方法が、チャープパルス増幅であり、以下のような構成となっている

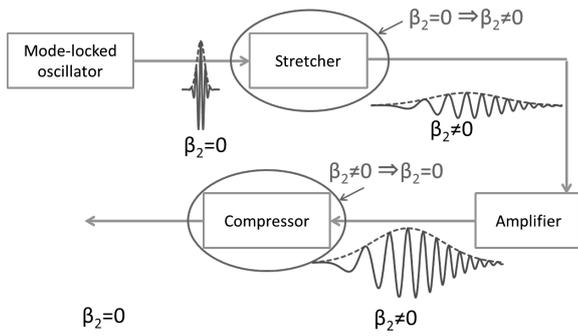


図 23 チャープパルス増幅

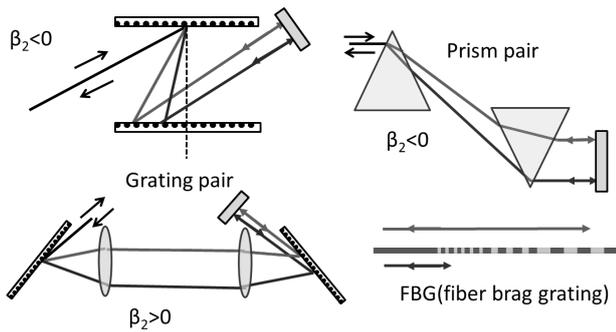


図 24 Enter Caption

このような分散を得る方法として用いられているのがグレーティングペアやプリズムペア、ブラッグ反射グレーティングなどであり、これらの光路長の波長依存を  $P(\lambda)$  とおくと、2次の分散は以下のように表せる

$$\beta_2 = \frac{d^2\phi}{d\omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c} \cdot \frac{d^2P(\lambda)}{d\lambda^2} \quad (211)$$

## 2 非線形光学素子

### 2.1 非線形光学素子

ミリ波～THz 帯の生成に関しても、現時点では QPM による方法が最も有望であると考えられる。

これまでこのような非線形光学素子の高効率化の研究が進められてきた。非線形光学素子により可能なのは

- 第 2 高調波発生 (Second Harmonic Generation : SHG) 周波数  $\omega$  の入力光から周波数  $2\omega$  の第 2 高調波光を発生

- 和周波発生 (Sum Frequency Generation : SFG) 周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の 2 つの入力光から、和の周波数  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  を持つ和周波光を発生
- 差周波発生 (Difference Frequency Generation : DFG) 周波数  $\omega_1$  と  $\omega_3$  の 2 つの入力光から、差の周波数  $\omega_2 = |\omega_3 - \omega_1|$  を持つ差周波光を発生
- 光パラメトリック増幅/発振 (Optical Parametric Amplification/Oscillation : OPA / OPO) 周波数  $\omega_3$  の光で励起して周波数  $\omega_1$  の光を増幅/発振 ( $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$  の光も発生)

### 2.2 擬位相整合 (quasi-phase matching: QPM)

分極反転グレーティングは、波長変換に関する入出力光波間の位相整合を達成する方法の一つである。擬位相整合 (Quasi-Phase Matching : QPM) のため、材料の非線形係数の符号を周期的に反転させた構造である [6]。非線形材料中を光波が伝搬すると、伝搬経路の各点で入力光とは異なる周波数を持つ非線形分極波が生じ、これを波源とした新たな光波が出力光として得られる。この出力光を効率よく生成するには、伝搬経路各点で生じる光波を同位相で累積する必要がある、この条件は位相整合条件と呼ばれる。例えば角周波数  $\omega$  の入力光から角周波数  $2\omega$  の出力光を発生する SHG では、位相整合条件は入力および出力光の伝搬定数  $\beta^\omega, \beta^{2\omega}$  を用いて以下のように書ける。

$$\beta^{2\omega} - 2\beta^\omega = 0 \quad (212)$$

この条件を、各光波が導波路中で感じる屈折率である実効屈折率  $N^\omega, N^{2\omega}$  を用いて書き直すと次のようになる。

$$N^{2\omega} - N^\omega = 0 \quad (213)$$

一般に、媒質の屈折率は波長により異なるので式 (213) は通常成立しない。この位相整合を実現する方法として、媒質の複屈折性を利用する方法 [?, ?] やモード分散を利用する方法 [?] などが検討されてきた。QPM はこの位相整合を材料分極の周期的反転 (グレーティング) 構造により実現する方法である。QPM 用グレーティングの周期  $\Lambda$  は、式 (214) を満たすように定める。式 (214) をベクトルダイアグラムで表すと図??のようになる。

$$\beta^{2\omega} - 2\beta^\omega - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \quad (214)$$

この QPM には、

- 適用できる材料や偏光に制限が無い
- 材料の透明域の任意波長で、その最大の非線形光学テンソル成分を用いた位相整合を実現できる
- 入力光と出力光をともに導波モードとでき、それらの間のモードプロファイルの重なりを大きくできる
- 出力光が導波モードで得られるため、その集光が容易にできる

という多くの優れた特徴がある。

チャンネル光導波路は、光ファイバと同様に高い励起光パワー密度を長い相互作用長にわたり保つのに適した構造であり、デバイスの小型・高効率動作を可能とする。

非線形光学デバイスにおける高効率動作実現には、光導波路によって高い励起光パワー密度を長い相互作用長にわたり保持すること、分極反転グレーティングによって擬似位相整合を実現することの他に、大きな非線形光学効果を示す材料を用いることが必要である。これまでにデバイス化が検討されてきている主な無機材料としては、LiNbO<sub>3</sub> LiTaO<sub>3</sub> KTiOPO<sub>4</sub> があげられる。この中で LiNbO<sub>3</sub> はデバイス作製技術の検討が進んでおり、また最も大きな非線形効果を示すことから最も有望な基板材料と言える。

### 2.3 QPM の設計

## 3 第 2 高調波発生

中心角周波数  $\omega$  のパルス励起光 (波長  $\lambda_1$ ) を  $2\omega$  のパルス高調波 (SH) 光 ( $\lambda_2 = \lambda_1/2$ ) に変換する擬似位相整合 (QPM) 第 2 高調波発生 (SHG) を考える。励起光および SH 光の伝搬方向を  $z$ 、時間を  $t$  とすると、励起光と SH 光の複素振幅  $A_1(t, z)$ 、 $A_2(t, z)$  が満たすモード結合方程式は、連続動作の場合の式

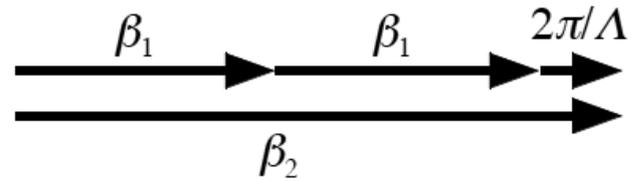


図 25 SHG における擬似位相整合

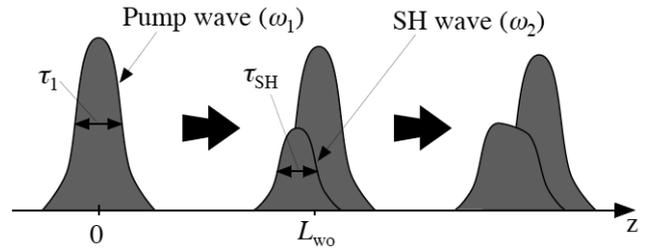


図 26 SHG におけるパルス伝搬およびウォークオフ

に時間依存項を加えた以下の形で表すことができる。

$$\frac{\partial A_1(t, z)}{\partial z} + \beta_1' \frac{\partial A_1(t, z)}{\partial t} - j \frac{\beta_1''}{2} \frac{\partial^2 A_1(t, z)}{\partial t^2} \quad (215)$$

$$= -j \kappa_{SH}^* A_1(t, z) A_2(t, z) e^{-j2\Delta_{SH}z} \quad (216)$$

$$\frac{\partial A_2(t, z)}{\partial z} + \beta_2' \frac{\partial A_2(t, z)}{\partial t} - j \frac{\beta_2''}{2} \frac{\partial^2 A_2(t, z)}{\partial t^2} \quad (217)$$

$$= -j \kappa_{SH} \{A_1(t, z)\}^2 e^{j2\Delta_{SH}z} \quad (218)$$

$$2\Delta_{SH} = \beta_2 - 2\beta_1 - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (219)$$

$$\beta_i' = \left. \frac{\partial \beta_i(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_i} \quad (i = 1, 2) \quad (220)$$

$$\beta_i'' = \left. \frac{\partial^2 \beta_i(\omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_i} \quad (i = 1, 2) \quad (221)$$

$A_1(t, z)$ 、 $A_2(t, z)$  は絶対値の 2 乗がパワーを表すように規格化されている。 $\kappa_{SH}$  は SHG 結合係数、 $\beta_i (i = 1, 2)$  は各光波の伝搬定数である。 $\Delta_{SH}$  は QPM からのずれであり、 $\Lambda$  は QPM 用分極反転グレーティングの周期を表す。図 25 は式 (219) をベクトルダイアグラムで表したものである。以下ではパルス中心周波数において QPM-SHG 条件 ( $\Delta_{SH} = 0$ ) が成立している場合を考える。

励起光および SH 光パルスはそれぞれ異なる群屈折率  $n_{gi}$  を持ち、導波路中を異なる群速度  $v_{gi} = c/n_{gi} = 1/\beta_i'$  ( $c$ : 光速,  $i = 1, 2$ ) で伝搬する。LN では  $\omega_1 < \omega_2$  の場合は  $n_{g1} < n_{g2}$  であり、 $v_{g1} > v_{g2}$  となる。このため図 26 に示すように励起光パルスは

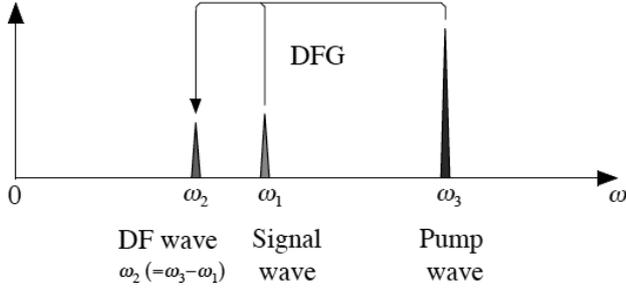


図 27 DFG における周波数スペクトル

SH 光パルスよりも速く伝搬し、両パルス間には次第にずれ（ウォークオフ）が生じるとともに、一定の長さ以上の距離を伝搬すると、SH 光パルス幅は拡大を始める。ここでパルス波長変換特性を評価するためのパラメータとして以下で示すウォークオフ距離  $L_{wo}$  を導入する。

$$L_{wo} = \frac{\tau_1}{\beta'_2 - \beta'_1} = \frac{c\tau_1}{n_{g2} - n_{g1}} \quad (222)$$

この  $L_{wo}$  は、両パルス間の伝搬時間差がちょうど  $\tau_1$  となる伝搬距離であり、 $\lambda_1 = 1.55\mu\text{m}$ 、 $\tau_1 = 1\text{ps}$  では  $L_{wo} = 3.3\text{mm}$  である。

両パルスのパルス中心位置は時間軸上をそれぞれ異なる速度で移動する。そこで時間軸に関して

$$\tau = t - \frac{\beta'_1 + \beta'_2}{2} z \quad (223)$$

$$\hat{A}_i(\tau, z) = A_i(t, z) \quad (i = 1, 2) \quad (224)$$

と変換すれば、両パルスの複素振幅  $\hat{A}_i(\tau, z)$  を時間軸  $\tau$  の原点近傍にとどめることができる。この変換により式 (216)、(218) は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial z} = -\frac{\beta'_1 - \beta'_2}{2} \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \tau} + j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 \hat{A}_1}{\partial \tau^2} - j \kappa_{SH}^* \hat{A}_1^* \hat{A}_2 \quad (225)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial z} = \frac{\beta'_1 - \beta'_2}{2} \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \tau} + j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 \hat{A}_2}{\partial \tau^2} - j \kappa_{SH} \{\hat{A}_1\}^2 \quad (226)$$

#### 4 差周波発生

図 27 に示すように、角周波数  $\omega_1$  の信号光（波長  $\lambda_1$ ）と  $\omega_3 (> \omega_1)$  の励起光（ $\lambda_3$ ）を混合して、2 光波の差の周波数  $\omega_2 (= \omega_3 - \omega_1)$  を持つ差周波（DF）光を発生する QPM 差周波発生（DFG）を考える。こ

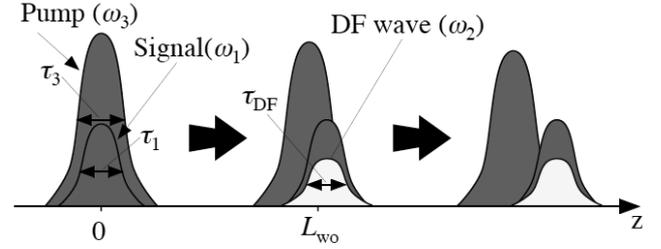


図 28 FG におけるパルス伝搬およびウォークオフ ( $\omega_3 \approx 2\omega_1$ ,  $\tau_1 \approx \tau_3$ )

の DFG では、 $\omega_3 \approx 2\omega_1$  とすれば  $\omega_2 \approx \omega_1$  の DF 光が得られ、同一波長域内での波長変換を行うことができる。このため DFG デバイスは、近年検討されている波長分割多重 (WDM) 方式における波長変換素子などに利用できる。信号光、DF 光、励起光の複素振幅は、以下のモード結合方程式を満たす。

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta'_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} - j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \quad (227)$$

$$= -j \frac{\omega_1}{\omega_3} \kappa_{SF}^* A_2^* A_3 e^{-j2\Delta_{SF}z} \quad (228)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta'_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} - j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} \quad (229)$$

$$= -j \frac{\omega_2}{\omega_3} \kappa_{SF}^* A_1^* A_3 e^{-j2\Delta_{SF}z} \quad (230)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \beta'_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} - j \frac{\beta''_3}{2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} \quad (231)$$

$$= -j \kappa_{SF} A_1 A_2 e^{j2\Delta_{SF}z} \quad (232)$$

$$2\Delta_{SF} = \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (233)$$

この DFG における結合係数  $\kappa_{DF}$  と SFG における結合係数  $\kappa_{SF}$  とは、 $\kappa_{DF} = (\omega_2/\omega_3)\kappa_{SF}$  の関係を持ち、特に  $\omega_3 \approx 2\omega_1$  の条件では  $\kappa_{DF} \approx \kappa_{SF}/2$  となる。このとき、信号光と DF 光との群速度差は小さくなるが、この 2 光波と励起光の間にはウォークオフが生じる。このため、信号光パルス幅  $\tau_1$  が励起光パルス幅  $\tau_3$  と近いときは、図 28 に示すように伝搬距離を長くすると励起光と信号光との重なりが失われ、DF 光の増大は飽和する。以下の解析は全て  $\omega_3 \approx 2\omega_1$  の条件下で行っている。

信号光、励起光のパルスピークパワーおよびパルス幅をそれぞれ  $P_{10}$ 、 $P_{30}$ 、 $\tau_1$ 、 $\tau_3$  で表し、ともに  $\text{sech}^2$

型パルスと仮定した。ウォークオフ距離  $L_{\text{wo}}$  は

$$L_{\text{wo}} = \frac{\tau_{\min}}{\beta'_3 - \beta'_i} \quad \tau_{\min} = \begin{cases} \tau_1 & (\tau_1 \leq \tau_3) \\ \tau_3 & (\tau_1 > \tau_3) \end{cases} \quad (234)$$

$$i = \begin{cases} 1 & (\omega_1 < \omega_2) \\ 2 & (\omega_1 > \omega_2) \end{cases}$$

で定義した。

CW 励起光とパルス信号光を用いるパルス DFG では、 $L$  を伸ばすことで高効率動作が実現できる。しかしパルス励起光を用いてパルス信号光を制御する DFG 型光スイッチを実現するためには、SHG や SFG の場合と同様に光波間ウォークオフの影響が顕著とならない  $L = L_{\text{wo}}$  が最適デバイス長となる。

## 5 カスケード第 2 高調波発生/差周波発生

角周波数  $\omega_2$  の光波に対して QPM-SHG 条件を満たす構造中に、 $\omega_2$  の励起光 (波長  $\lambda_2$ ) と  $\omega_1 (\approx \omega_2, \neq \omega_2)$  の信号光 ( $\lambda_1$ ) を入力すると、図??に示すように  $\omega_2$  を  $2\omega_2 (= \omega_3)$  の SH 光に変換する SHG と、 $2\omega_2 - \omega_1 (= \omega_4)$  の DF 光を発生する DFG が同時に実現できる。このカスケード SHG/DFG は、 $\omega_1 \approx \omega_2$  とすれば  $\omega_4 \approx \omega_2$  となり全入出力光が同一波長帯内にある波長変換が可能であり、また励起光による DF 光の光スイッチングが実現できるという特徴を持ち、最近多くの報告例がある [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]。信号光、励起光、SH 光、DF 光の複素振幅  $A_1(t, z) \sim A_4(t, z)$  が満たすモード結合方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta'_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} - j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \quad (235)$$

$$= -j \frac{\omega_1}{\omega_4} \kappa_{\text{DF}} A_3 A_4^* e^{-j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (236)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta'_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} - j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} \quad (237)$$

$$= -j \kappa_{\text{SH}}^* A_2^* A_3 \quad (238)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \beta'_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} - j \frac{\beta''_3}{2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} \quad (239)$$

$$= -j \kappa_{\text{SH}} \{A_2\}^2 - j \frac{\omega_3}{\omega_4} \kappa_{\text{DF}}^* A_1 A_4 e^{j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (240)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial z} + \beta'_4 \frac{\partial A_4}{\partial t} - j \frac{\beta''_4}{2} \frac{\partial^2 A_4}{\partial t^2} \quad (241)$$

$$= -j \kappa_{\text{DF}} A_2 A_3^* e^{-j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (242)$$

$$2\Delta_{\text{DF}} = 2\beta_2 - \beta_1 - \beta_4 \quad (243)$$

$\kappa_{\text{SH}}$  は SHG 結合係数、 $\kappa_{\text{DF}}$  は DFG 結合係数であり  $\omega_1 \approx \omega_2$  では  $\kappa_{\text{SH}} \approx \kappa_{\text{DF}}$  となる。 $\beta_i$  は各光波の伝搬定数である。 $\Delta_{\text{DF}}$  は、QPM-SHG 条件 ( $\beta_3 - 2\beta_2 - 2\pi/\Lambda = 0$ ) が満足されたときの QPM-DFG からのずれを表す。式 (243) をベクトルダイアグラムを用いて表すと図??のようになる。 $\omega_1 \approx \omega_2$  とすれば  $\omega_4 \approx \omega_1$  となり、 $|\Delta_{\text{DF}}L| \ll 1$  とできる。このとき、信号光、励起光および DF 光の間の群速度差は小さく、これら 3 光波と SH 光との間のウォークオフのみが顕著となる。この結果、図??に示すように伝搬距離を長くすると SH 光はパルス幅が拡大するが、DF 光は拡大せずパワーが増大する。以下の解析では全て  $\omega_1 \approx \omega_2$  とした。

信号光、励起光のパルスピークパワーおよびパルス幅をそれぞれ  $P_{10}$ 、 $P_{20}$ 、 $\tau_1$ 、 $\tau_2$  で表し、ともに sech<sup>2</sup> 型パルスを仮定した。 $L_{\text{wo}}$  は

$$L_{\text{wo}} = \frac{\tau_{\min}}{\beta'_3 - \beta'_i} \tau_{\min} = \begin{cases} \tau_1 & (\tau_1 \leq \tau_2) \\ \tau_2 & (\tau_1 > \tau_2) \end{cases} \quad (244)$$

SFG/DFG では DFG と異なり、 $L/L_{\text{wo}} > 1$  でも信号光、励起光および DF 光の間のウォークオフが小さいため、 $L$  を伸ばすことで  $P_{\text{DF}}$  を増大できる。このため、同一パワーの励起光パルスを用い、ある導波型非線形光学デバイスを DFG デバイスとして用いる場合とカスケード SHG/DFG デバイスとして用いる場合を比較すると、 $L/L_{\text{wo}} > 1$  の場合はカスケード SHG/DFG の方が DFG より高い入出力光変換効率を実現することも可能である。

カスケード SHG/DFG では、 $L > L_{wo}$  でも  $L$  を伸ばすことで出力 DF 光のパルス幅を拡大せずにそのパワーを増大できる。カスケード SHG/DFG は入出力光が同一波長帯内にある波長変換動作が可能であり、長尺デバイスを用いることで高効率パルス波長変換が可能であることから超高速光信号処理に有用な方式であると言える。

### 5.1 QPM による DFG の時間発展計算

QPM を用いた DFG の時間発展の方程式は以下の通りであり、これを計算すると DFG の計算が可能である

$$E_{THz}(\Omega, z) = A_{THz}(\Omega, z) e^{-j k(\Omega) z} \quad (245)$$

$$E_{OP}(\omega, z) = A_{OP}(\omega, z) e^{-j k(\omega) z} \quad (246)$$

$$E(\omega) = \frac{E_0 \tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\tau^2(\omega-\omega_0)^2}{4}} \quad (247)$$

$$\begin{aligned} P_{NL}(\Omega) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \int_0^\infty E_{OP}(\omega + \Omega) E_{OP}^*(\omega) d\omega \\ &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2 \tau}{2} \end{aligned} \quad (248)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_{THz}(\Omega, z)}{dz} &= -\frac{\alpha}{2} A_{THz}(\Omega, z) \\ &\quad - \frac{i\mu_0 \Omega c}{2n_{THz}} e^{i(k(\Omega) + \Delta k)z} P_{NL}(\Omega) \end{aligned} \quad (249)$$

$$\Delta k = k(\Omega) + k(\omega) - k(\omega + \Omega) - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (250)$$

$$= \frac{\Omega}{c} (n_{THz} - n) - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (251)$$

$$\Delta k = k(\omega - \Omega) - k(\Omega) + \frac{2\pi}{\Lambda} - k(\omega) \quad (252)$$

$$\Delta k : k - \text{vectormismatch} \quad (253)$$

$$k(\omega + \Omega) - k(\omega) = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Omega \quad (254)$$

$$(255)$$

### 5.2 MgO:PPLN による THz 発生

非線形光学素子による THz 発生の問題は、

- 非線形光学素子の THz 帯での吸収
- 位相整合角の励起光と信号光 (THz) での乖離
- マンレーロー限界による効率の低さ

が挙げられる。非線形光学定数の大きいニオブ酸

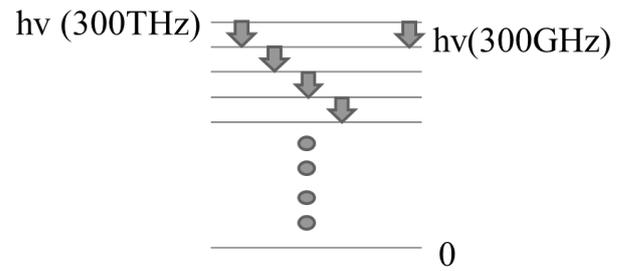


図 29 差周波での光子エネルギーの比較

リチウム (LN) は常温では THz 帯の吸収が大きいですが、冷却する事で透過率が上がるため、冷凍機などの装置が必要になる。

また THz 帯では信号光と励起光の乖離が大きく、従来の非線形素子を用いた方式では横長の THz ができてしまいシングルモードのビームにならなかった。しかし分極反転構造 (Periodic Poled LN:PPLN) とする事で、同軸上にシングルモードのビームとして得られるようになった。なお PPLN はフォトリフラクティブ耐性が低いため、MgO をドープする事でフォトリフラクティブ耐性を向上させている。

効率に関しては光子エネルギーの差により限界をマンレーロー限界と呼ばれているが、図 ?? のように例えば  $1 \mu\text{m}$  帯のレーザー (300THz) から 300GHz の THz を得るとすると効率は 0.1 % となってしまう、

さらに効率を上げようとする図の左側のようなカスケードが必要となる。カスケードの 1 方式としては、図 30 のようなチャープ&ディレイ方式というのがある。([3])

通常の DFG については KEK でも Yb:YAG レーザーからの 2 波長増幅を用いて実験を行っており、図 ?? のような 2 波長の狭線幅レーザーを用いて、差周波を 300GHz にしたシードレーザーを用いている。

これを図 31 EO モジュレーターで変調し、Yb:Fiber / Yb:YAG の多段の増幅器で増幅した後、冷凍機で冷却した MgO:PPLN で THz への変換を行い THz の出力を得ている。

この波長変換を行っている MgO:PPLN は分子研・理研製の大型の MgO:PPLN ([2]) を用いて行ってお

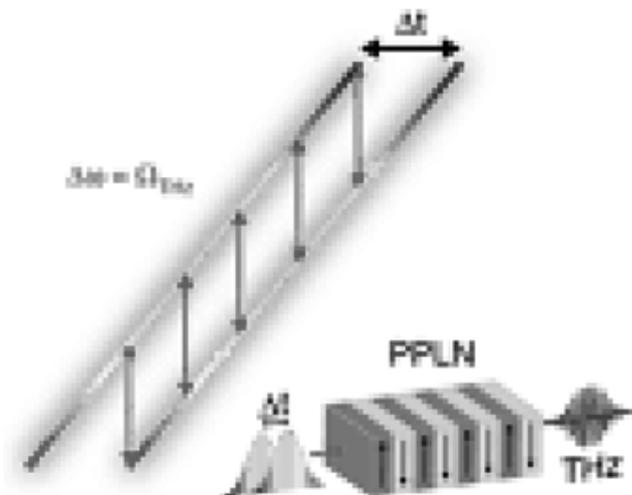


図30 チャープ&ディレイ方式

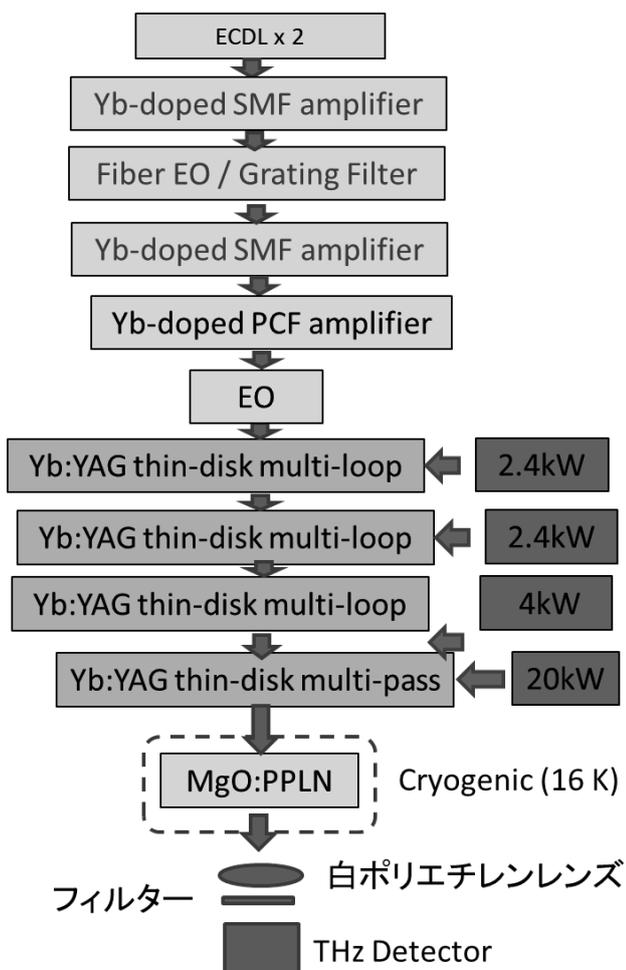


図31 THz 差周波発生のためのレーザー増幅器



図32 THz 差周波発生のための MgO:PPLN の冷却チャンバー

り、THz での吸収を減らすため、図32の冷却チャンバーで20K程度まで冷却を行っている。

### 参考文献

- [1] Alan Matthew Cook. *Generation of narrow-band terahertz coherent Cherenkov radiation in a dielectric wakefield structure*. University of California, Los Angeles, 2009.
- [2] H. Ishizuki and T. Taira. Half-joule output optical-parametric oscillation by using 10-mm-thick periodically poled mg-doped congruent linbo3. *Opt. Express*, Vol. 20, p. 20002, 2012.
- [3] A. L. Calendron H. Cankaya G. Cirmi T. Eichner A. Fallahi M. Fakhari A. Hartin M. Hemmer W. R. Huang H. Ishizuki S. W. Jolly V. Leroux A. R. Maier J. Meier W. Qiao K. Ravi D. N. Schimpf T. Taira X. Wu L. Zapata C. Zapata D. Zhang C. Zhou F. X. Kärtner N. H. Matlis, F. Ahr. Acceleration of electrons in thz driven structures for axisis. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 909, pp. 27–32, 2007.
- [4] Mitsuhiro Yoshida Shingo Mori. Thz deflector using dielectric-lined waveguide for ultra-short bunch measurement in gev scale. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.02854>, 2020.

- [5] H.; Rosenzweig J.B.; Travish G.; Hogan M.; Ischebeck R.; Kirby N.; Siemann R.; Walz D.; Muggli P.; Scott A.; Yoder Thompson, M.C.; Badakov. Ultra-high gradient dielectric wakefield accelerator experiments. *Advanced Accelerator Concepts Workshop*, 2007.
- [6] 石月秀貴. 博士論文. 2001.
- [7] 平松崇英. 修士論文. 2008.

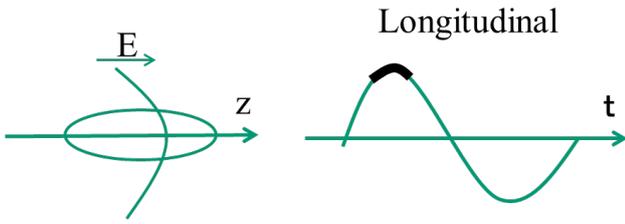


図1 エネルギー分散

高いルミノシティを得るためには数 nC の電荷 × 数万バンチ/秒の電流を超低エミッタンスを保存したまま加速する必要がある。このためには電子ビームのエミッタンスを保存する十分な位相空間と、高周波の高い蓄積効率が必須である。

- X線自由電子レーザー (XFEL) 電荷量は数 100 pC と小さいが、10 kA 程度と非常に高い尖頭電流と超低エミッタンスの電子ビームでないと X線領域での増幅は難しい。高い尖頭電流を得るには進行方向-運動量空間での線形なバンチ圧縮が必要であり、元のビームのエネルギー分散を極めて小さくする必要があり、加速で利用できる電磁波の周波数に上限がある。また近年は EuroXFEL 等の超伝導加速器駆動の XFEL が実現してきているため、将来的な展望も考慮するとマルチバンチの加速が可能な加速方式が望まれる。

輸送中のエミッタンスの保存などを考えると、電荷量は nC 程度が限界であり、それを考慮するとマルチバンチでしか高い効率を得る事は不可能である事が分かる

高エネルギー物理用の加速器や XFEL ではエネルギー分散やエミッタンスを保存する必要がある事は変わらない。これら进行评估するには図1のような電磁波で加速されるビームの運動量の横方向の分散  $\delta_x$ 、縦方向の運動量分散  $\delta_z$  を考えると

Transverse :

$$1\text{GeV}, \varepsilon_n = 1 \mu\text{m rad}, \beta = 1\text{m} \quad (1)$$

$$\rightarrow \sigma_x = \sqrt{\varepsilon_n \beta / \gamma} = 20 \mu\text{m} \quad (2)$$

Longitudinal :

$$\sigma_t = 60\text{fs} \quad (3)$$

$$\rightarrow \sigma_z = 18 \mu\text{m} \quad (4)$$

$$\delta_x \text{ or } z = \frac{\Delta p}{p} = 1 - \cos\left(2\pi \frac{\sigma_x \text{ or } z}{\lambda}\right) \quad (5)$$

$$= 0.01\% (\lambda = 10\text{mm}) \quad (6)$$

$$0.4\% (\lambda = 1.5\text{mm}, f = 200\text{GHz}) \quad (7)$$

$$10\% (\lambda = 0.3\text{mm}, f = 1\text{THz}) \quad (8)$$

これらから周波数上限が分かる。コライダーでも XFEL でも必要なビームのエネルギー分散のオーダーは 0.1 % のレベルだが、この 10 倍を許容したとしても周波数上限は 200GHz 程度である事が分かる。

例えば現状のプラズマ加速などで超高電界が得られているパラメーターでは一般的に 30fs などのビームやレーザーが用いられており、これに共鳴するプラズマ振動の周波数は 10THz 程度となり、コライダーなどの高電荷のビームの輸送は、1バンチですら不可能である事が分かる。もちろんプラズマ加速でも電界は極端に下がるが、共鳴周波数を数 100GHz まで下げれば高電荷の輸送は可能である。しかしマルチバンチとなると、プラズマはエネルギー消費が激しく時間的に減衰してしまうため、やはり効率は極端に低くなってしまうため、コライダーの実現は難しい。

一方超高周波の電磁波を用いた加速では、電磁波の蓄積は可能であり、マルチバンチの加速にも対応できる所が大きな違いである。ただし超高周波になると後述のように金属などの導体の壁損失が非常に大きくなり、従来の高周波加速のような金属壁の構造を用いた方法では効率が下がってしまう。そこで誘電体や自由空間での伝搬を組み合わせた加速方式が有効となる。また超高周波では高出力の電磁波の発生源が難しく、ここが一つのテーマとなるため、後半の章で超高周波源について述べる。

## 1.2 加速器と理想の加速構造、究極の加速構造

そもそも理想的な加速器とはどういう物なのか、また現実はどうなのか、そしてさらに究極の加速器はどういう物であるかという事から再考したい。

蓄積されている電磁波のエネルギーは電界強度と磁場強度から

$$W = \int \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (9)$$

電磁波では電界と磁界は双方エネルギー交換をしているので、電界のエネルギーと磁界のエネルギーは同じであり、ピーク時のエネルギーで考えるとこれは  $E^2$  のみの項のみ考えれば良い

また電子加速器では電子の速度はほぼ光速であるため、電磁波を再利用する事はできず、電子が通るまでの時間分のエネルギーは先に貯めておく必要がある。ただし、電磁波も群速度  $v_g$  で移動はするため、 $1 - \frac{v_g}{c}$  分のエネルギーが貯めておくべき電磁波の時間であり、この時間を  $\Delta t$  とした。通常の空洞型のマイクロ波帯の加速管では  $v_g$  は非常に小さい(小さくして電界を上げている)ため、ほぼ無視できるが、超高周波の加速器ではエネルギー密度が高いため、 $v_g$  は 0 ではない。

ここで加速効率を概算で計算するため、電磁波のエネルギーを  $U$ 、加速によるエネルギーゲインを  $U_{beam}$  とおき、また壁での損失を  $P_{loss}$ 、マルチバンチでのビーム電流による加速エネルギーゲインの単位時間辺りの電力を  $P_{beam}$  とおくと以下のようになる。

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \quad (10)$$

$$U = \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \int \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (11)$$

$$\sim \frac{\varepsilon_0 E^2 \lambda^2 \pi^2 L}{16} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right) \quad (12)$$

$$U_{beam} = qE \quad (13)$$

$$\eta_{bunch} = \frac{U_{beam}}{U} \quad (14)$$

$$I = q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}}, \quad Q = \frac{\omega U}{P_{loss}} \quad (15)$$

$$P_{beam} = IEL = q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}} EL \quad (16)$$

$$\eta = \frac{P_{beam}}{P_{loss}} \quad (17)$$

$$= \frac{q \frac{N_{bunch}}{T_{bunch}} EL}{\frac{\omega \varepsilon_0 E^2 \lambda^2 \pi^2 L}{16Q} \left(1 - \frac{v_g}{c}\right)} \quad (18)$$

空洞の蓄積エネルギー  $U$  と、ビームの 1 バンチが加速で得られるエネルギー  $U_{beam}$  を比較すると例えば S バンド加速器と超高周波加速器の典型的なパラメーターを考えると

- $3GHz, 20MV/m, 1nC \rightarrow U = 20J/m, U_{beam} = 0.02J/m$
- $300GHz, 200MV/m, 1nC \rightarrow U = 0.2J/m, U_{beam} = 0.2J/m$

となり、単一のバンチではエネルギー効率が 0.1 % しかない事が分かる。従って、従来の高周波加速ではマルチバンチでないと効率は上がらない事が分かる。

また単位時間辺りの電力損失は、壁損失は Q 値で決まり、ビーム電力はマルチバンチの時間の長さと同数で決まる。これからマイクロ波では

これらからこれらのビームの時間的構造は、常伝導及び超伝導では、図 2 のようになっており、近年の加速器ではパルストレインのマルチバンチ加速により、高周波電力からビームエネルギーへの変換効率が従来より格段に高効率になっている。

本来どのような周波数帯であろうと、超高出力の尖頭出力さえ得られるのなら、壁損失を最低限に抑えつつ、位相エラーも最小限に抑えられる。従って超高出力の尖頭出力で駆動するのが理想的であり、

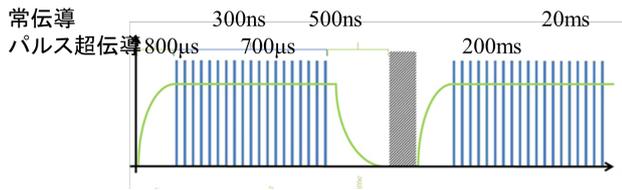


図2 ビームの時間的構造

蓄積すればするだけエネルギー効率も悪くなり、また蓄積すればするだけ位相エラーも蓄積する。

常伝導のマイクロ波加速器で一般的にディスクローディッド型の加速器が一般的なのは、ただ単にマイクロ波のエネルギー密度が低く、なおかつクライストロンというパワーソースが貧弱なため、群速度を落として、双方が満たされるような中庸点を探した結果であり、現実的なパワーソースなどのパラメーターから仕方なくこうなっていると良いだろう。結果として進行波管では位相エラーや製作の難しさから、100波程度の構造までしか1本で作れず、分割した分のエネルギー損失も発生する。これは現状のマイクロ波の尖頭出力では電磁波を貯めないと十分な加速電界が出ないからである。

一方超高周波でも原理は全く同ではあるが、エネルギー密度が極端に高くなるため現実的に達成可能なパラメーターは大きく異なる。エネルギーを貯める空間が  $1/f$  で小さくなるため、同じ電界強度を得るための電力は、 $1/f^2$  で下がるためである。ただし、超高周波で悪い事もあり、単位時間辺りに壁に電磁波が当たる回数が  $f$  倍になり、さらに悪い事に表皮効果は以下のような式で表されるため、壁損失は  $\sqrt{f}$  倍増える。従ってそもそもエネルギーを貯めるのには向かないため、高い尖頭出力を得るのかにかかっている事になる。

### 1.3 誘電体加速の方式

真空中を伝搬する電磁波は横波であり、荷電粒子を加速するには、横または斜め方向からの波を合成して縦方向の電場を生成するしかない。また加速する荷電粒子と電磁波の位相速度を合わせる方法が必要であり、この位相整合のために誘電体を利用する方法を総称して誘電体加速と呼んでいる。さらに相対論的な粒子に対しては光(光子)が粒子と相互作用できるのは1回のみで再利用はできないため、長距

離加速するには、粒子との相互作用回数分の電磁波の波数が必要であり、超短パルスの超高電界を利用する事は原理的にできない。さらに同じ粒子には電磁波が再利用できない事から加速の電力効率を上げるには後続の粒子に対して再利用する事が必須であり、このために電磁波蓄積の Quality Factor(Q 値 =  $\omega U/W$ ,  $\omega$  は角周波数、 $U$  は蓄積エネルギー、 $W$  は空洞の損失)、または Finesse という電磁波のエネルギーの蓄積または循環が必要である。

- Dielectric Lined Circular Waveguide (DLW) :  
キャピラリー中の THz 波で加速  
ビーム駆動 : 超短パルス電子ビームを通す際に生じる超高電界の THz 航跡場で後続のビームを加速  
レーザー駆動 : THz-PPLN で生成した高強度 THz
- Dielectric Laser Acceleration (DLA) :  
グレーティング構造に電磁波を照射して表面を走行する電子を加速する方式  
レーザーの周波数でも構造体が製作可能な方法  
しかしシャントインピーダンスがかなり低い
- Dielectric Wall Accelerator (DWA)  
光伝導スイッチ (PCSS) を用いて誘電体伝送路を高速にスイッチして加速電界を得る  
後述のモードロックと似たパルスが得られる
- Dielectric Assisted Accelerator (DAA)  
誘電体装荷型加速管 高い Q 値が得られる

### 1.4 壁材質

導電体表面では導電率が大きく変位電流は無視できるため、以下ようになる。

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = j \omega \mu \sigma \mathbf{H} \quad (19)$$

これを導体の深さ方向を  $d$  として解くと

$$H(d) = H(0) e^{j\omega t} e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} d} \quad (20)$$

となり、電流は指数関数的に深さ方向に減衰する事が分かる。ここで電流もしくは磁界が  $1/e$  になる深さを表皮深さ ( $\delta$ ) と言う。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (21)$$

ここで表皮抵抗  $R_S$  を以下のようにおけば、

$$R_S = \frac{1}{\delta\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{\omega\mu\delta}{2} \quad (22)$$

表皮深さは周波数の平方根に反比例するため、例えば 3GHz が 300GHz になると、表皮深さが 1/10 になってしまい、結果的に表皮抵抗は 10 倍になってしまい、損失は 10 倍となる。従って、Q 値が 1/10 と非常に低くなってしまいうため、蓄積するような通常の空洞は超高周波では非常に電力効率が悪くなってしまふ。

超高周波では上述のように、表皮深さが短くなり、さらに壁に衝突する回数も増えてしまうため、通常の金属壁の空洞での Q 値は非常に低い。これは例えばレーザーなどの光の周波数 (数 100THz) などでは、金属ミラーの反射率が低くなるので使われないのが良い例である。そこでレーザーなどのミラーは通常は誘電体多層膜ミラーが利用されている。ミリ波帯では、この誘電体多層膜ミラーを使うのが微妙な領域であり、波長がそれなりに長いため、スパッタなどの方法で製造するには厚すぎて不可能である。そこで考えられる方法としては、金属と誘電体の組み合わせが考えられる。超高周波では、金属の反射率も光に比べれば高く、誘電体の誘電率も光に比べれば高い。従って、金属と高誘電率の誘電体の組み合わせを利用すれば、比較的高い反射率の壁を作る事ができる。この考え方は、OHO24 の別講で述べられている我々が考案した誘電体アシスト型加速空洞でも利用されている。

### 1.5 周波数重畳とモード同期

超高周波でさらに究極の加速器を考える時に新たな候補となる可能性があるのが周波数重畳である。マイクロ波でも周波数重畳は可能であり、研究はされている。例えば基本波と 2 倍波での重畳空洞は空洞の形状の変更で可能であるが、ビームとの位相速度を保ちつつ数個の周波数を重畳するだけでも、かなり難しい。

一方レーザーではモード同期レーザーは周波数重

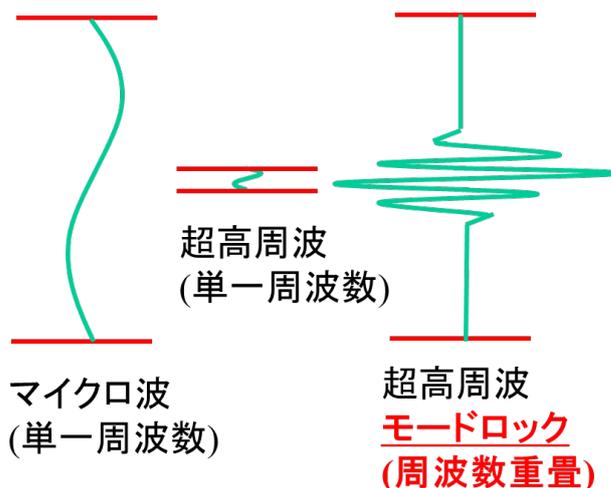


図 3 単一周波数の加速器とモードロック型の加速器

畳そのものの名称であるが、現在は当たり前の技術となっており、通常のモード同期レーザーで、Yb ファイバーレーザーや Ti:Sapphire のモード同期レーザーでは帯域としては 30THz (100nm) 程度で 100MHz 毎のモード同期が実現しており、これは 30 万個近い周波数の重畳が実現している事になる。

例えば 300GHz 程度の超高周波では、これらのマイクロ波とレーザーの中庸程度のモード同期は可能であり、例えば 10% (30GHz) の帯域のモード同期が可能だとして、加速器の構造体が 300 MHz (半波長で 50cm) 程度だと 100 個の周波数重畳が可能である事になり、単一周波数の超高周波と比べて 10 倍の電界が同じ電力で得られる事になる。例えば図 3 で、単一周波数で 1 GV/m が得られるのであれば、右図のようなモード同期では 10 GV/m が得られる事となり、非常に有望な超高電界加速器の候補となり得る。

## 2 Dielectric Lined Waveguide:DLW

誘電体装荷加速管とはビームの速度と加速管の位相を整合するために、誘電体壁または誘電体ディスクを用いた構造であり、電子ビーム駆動では 10GV/m 以上の電界が得られている [5]。

最も簡単な誘電体加速の構造としては筒状のガラス管を用いて電子ビームとの位相速度を合わせる方法がある。これは Dielectric Lined Waveguide(DLW) と呼ばれており、この DLW の加速モー

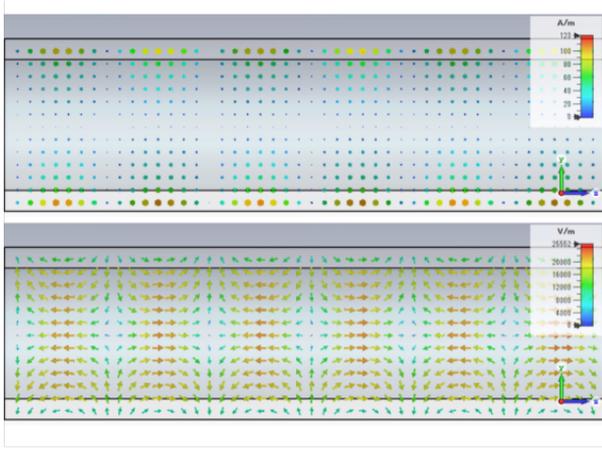


図4 DLWの加速モードの電界と磁界分布

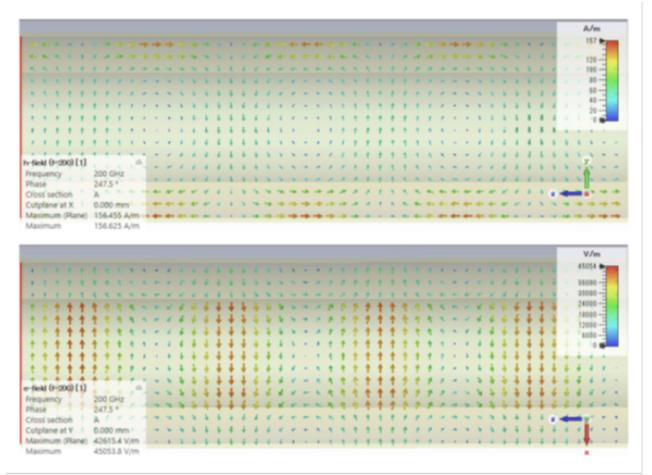
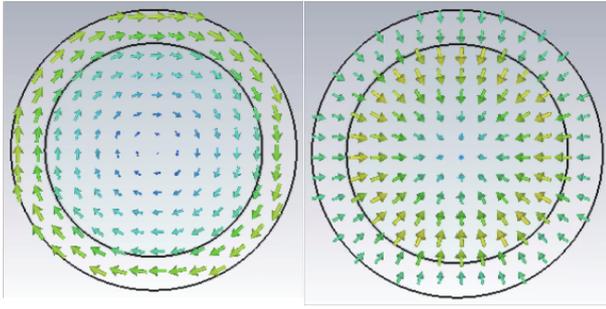
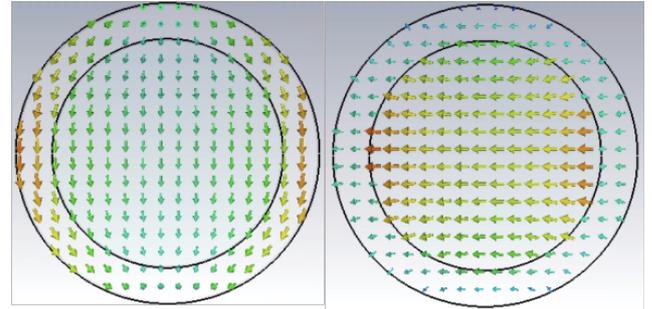


図5 DLWの偏向モードの電界と磁界分布



ドは図4で、また偏向モードは図5となっている、偏向モードはRFディフレクターと同じ原理でTHzディフレクターとして利用でき、XFELなどの超短バンチビームのスライス測定などに利用できる。

## 2.1 固有モード解析

誘電体円筒導波路の固有モード解析は文献[1]とその参考文献で研究されている。これらを[4]としてまとめている。

ここでは、誘電率  $\epsilon_0$  の真空孔を持つ誘電体で金属管の一部を満たしたものを考える。金属管の半径を  $b$ 、真空孔の1つを  $a$  とする。以下、真空領域 ( $0 \leq r \leq a$ ) を添え字1、誘電体領域 ( $a < r \leq b$ ) を添え字2とする。例えば、真空領域の半径波数を  $k_{r1}$ 、誘電体領域の半径波数を  $k_{r2}$  とする。

角周波数  $k_\omega$ 、伝搬定数  $k_z$  のDLW内部を伝搬する電磁場は、ヘルムホルツ方程式から  $n$  方位波と  $m$  半径波の固有モードとして求めることができる。 $n = 0$  のとき  $E_z$  と  $H_z$  の成分は切り離されるので、 $H_z = 0$  の解には純粋な  $TM_{0m}$  モードを、 $E_z = 0$

の解には純粋な  $TE_{0m}$  モードを定義できる。一方、 $k_z > 0$  である限り、 $n > 0$  の解は  $E_z$  と  $H_z$  成分が0でなく、 $TEM_{nm}$  モードと呼ばれる。

位相速度  $v_p$  がビーム速度  $v_b < c$  と一致する場合を考えると、縦波数  $k_z$  は自由空間の波数  $k_0$  より大きくなるはずである。つまり、 $k_0 < k_z$  となる。

$$k_{r1}^2 = k_0^2 - k_z^2 \equiv -\alpha_1^2 < 0, \quad (23)$$

$$k_{r2}^2 = \epsilon_r k_0^2 - k_z^2 \equiv k_2^2 > 0. \quad (24)$$

ビーム軸に沿った一様性とマクスウェル方程式から、軸方向の磁場成分とその他の成分との関係は次のようになる。

$$\vec{E}_{ti} = \frac{i}{k_{ri}^2} \left[ -k_z \vec{\nabla}_t E_{zi} + \frac{\omega}{c} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t (Z_0 H_{zi}) \right], \quad (25)$$

$$Z_0 \vec{H}_{ti} = -\frac{i}{k_{ri}^2} \left[ k_z \vec{\nabla}_t (Z_0 H_{zi}) + \frac{\omega}{c} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_{zi} \right], \quad (26)$$

ここで、 $Z_0$  は真空中の波動インピーダンスである。すると、Eq.(25) と Eq.(26) を次のように縮約す

ることができる。

$$(\nabla_T^2 + k_{ri}^2)E_{zi}(r, \theta) = 0, \quad (27)$$

$$(\nabla_T^2 + k_{ri}^2)H_{zi}(r, \theta) = 0. \quad (28)$$

$k_{r1}^2 < 0$  なので、真空領域での半径依存性はであるべきであり、 $I_n(\alpha_1 r)$  と  $K_n(\alpha_1 r)$  の第 1 種と第 2 種の修正ベッセル関数の線形結合である。原点に特異点があるため、 $\lim_{r \rightarrow \infty} K_n(\alpha_1 r) = \infty$  となる、 $I_n(\alpha_1 r)$  だけで十分である。誘電体領域では  $k_{r1}^2 > 0$  なので、半径依存性は第 1 種と第 2 種のベッセル関数の線形結合  $J_n(k_2 r)$  と  $Y_n(k_1 r)$  の線形結合である。

$$E_{z1} = A_1 I_n(\alpha_1 r) \cos(n\phi) e^{i\psi(z,t)}, \quad (29)$$

$$H_{z1} = B_1 I_n(\alpha_1 r) \sin(n\phi) e^{i\psi(z,t)}, \quad (30)$$

$$E_{z2} = (A_2 J_n(k_2 r) + A_3 Y_n(k_2 r)) \cos(n\phi) e^{i\psi(z,t)} \quad (31)$$

$$H_{z2} = (B_2 J_n(k_2 r) + B_3 Y_n(k_2 r)) \sin(n\phi) e^{i\psi(z,t)} \quad (32)$$

ここで、 $\psi(z, t) = \Gamma t - k_z z$ 。

軸方向の電場の振幅と軸方向の磁場の振幅の比をと軸方向磁場の振幅の比を

$$\eta = \frac{A_1}{B_1}, \quad (33)$$

と定義する。これは DLW の伝搬モードのインピーダンスは Eq.(52) または Eq.(53) を用いて計算される。

議論を簡単にするために、 $u = \alpha_1 a$ ,  $v = k_2 a$ ,  $w = k_2 b$  と定義する。 $w = k_2 b$  と定義する。金属壁表面の境界条件  $E_{z2}|_{r=b} = 0$  と  $H_{r2}|_{r=b} = 0$  は次のようになる。

$$A_3 = -\frac{J_n(w)}{Y_n(w)} A_2 \equiv A_{32} A_2 \equiv A_{31} A_1, \quad (34)$$

$$B_3 = -\frac{J'_n(w)}{Y'_n(w)} B_2 \equiv B_{32} B_2 \equiv B_{31} B_1, \quad (35)$$

をそれぞれ定義する。また、比  $A_2 = A_{21} A_1$ ,  $B_2 = B_{21} B_1$  を定義する。

方位角  $n$  を持つ真空領域の電磁場は次のように与えられる：

$$E_{z1}^n = E_0 I_n(\lambda_1) \cos(n\phi) \cos \psi(z, t), \quad (36)$$

$$E_{r1}^n = -\gamma_p E_0 R_n(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi(z, t), \quad (37)$$

$$E_{\phi 1}^n = \beta_p \gamma_p E_0 R_n(\lambda_1, r_\eta, 1/\beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi(z, t) \quad (38)$$

$$H_{z1}^n = \frac{E_0}{Z_0} r_\eta I_n(\lambda_1) \sin(n\phi) \cos \psi(z, t), \quad (39)$$

$$H_{r1}^n = -\gamma_p \frac{E_0}{Z_0} R_n(\lambda_1, r_\eta, \beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi(z, t), \quad (40)$$

$$H_{\phi 1}^n = -\beta_p \gamma_p \frac{E_0}{Z_0} R_n(\lambda_1, 1, r_\eta/\beta_p) \cos(n\phi) \sin \psi(z, t) \quad (41)$$

ここで、 $\lambda_1 = \alpha_1 r$ ,  $r_\eta = Z_0/\eta$  である。 $k_z/\alpha_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_p^2} \equiv \gamma_p$  の関係を使う。 $Z_0$  は自由空間のインピーダンスで、誘電率  $\epsilon_0$ 、誘電率  $\mu_0$ 、自由空間の光速  $c$  と関係し、 $\epsilon_0 = 1/cZ_0$  である。とする。簡単のために、半径依存、縦・時間依存の関数を次のように定義する。

$$R_n(\lambda, A, B) = A I'_n(\lambda) + B \frac{n I_n(\lambda)}{\lambda}, \quad (42)$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{A}{2} \lambda, & (n=0) \\ \frac{A+B}{2}. & (n=1) \end{cases} \quad (43)$$

ここで、 $R_n(r, A, B)$  をビーム軸  $\lambda_1 = \alpha_1 r (\ll 1)$  の周りに展開する。

領域  $2(a < r < b)$  の磁場は次式で得られる。

$$E_{z2}^n = E_0 C_n(\lambda_2) \cos(n\phi) \cos \psi, \quad (44)$$

$$E_{r2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} E_0 R_{2n}(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi, \quad (45)$$

$$E_{\phi 2}^n = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} E_0 \bar{R}_{2n}(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) \sin(n\phi) \sin \psi, \quad (46)$$

$$H_{z2}^n = \frac{E_0}{Z_0} r_\eta D_n(\lambda_2) \sin(n\phi) \cos \psi, \quad (47)$$

$$H_{r2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} \frac{E_0}{Z_0} \bar{R}_{2n}(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p) \sin(n\phi) \sin \psi, \quad (48)$$

$$H_{\phi 2}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \beta_p^2 - 1}} \frac{E_0}{Z_0} R_{2n}(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta) \cos(n\phi) \sin \psi, \quad (49)$$

ここで  $C_n(\lambda) = A_{21}J_n(\lambda) + A_{31}Y_n(\lambda)$ ,  $D_n(\lambda) = B_{21}J_n(\lambda) + B_{31}Y_n(\lambda)$ ,  $R_{2n}(\lambda, A, B) = AC'_n(\lambda) + B(nD_n(\lambda)/\lambda)$ ,  $\bar{R}_{2n}(\lambda, A, B) = AD'_n(\lambda) + B(nC_n(\lambda)/\lambda)$ . とした

誘電体と真空の境界の連続条件としては、電場の接線成分  $\vec{E}_i$  と磁場の接線成分  $\vec{H}_i$  が境界で同じになるようにする。縦成分は

$$E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a} \text{ and } H_{z1}|_{r=a} = H_{z2}|_{r=a} \text{ give}$$

$$A_2 = \frac{I_n(u)Y_n(w)}{J_n(v)Y_n(w) - J_n(w)Y_n(v)} A_1 \equiv A_{21}A_1, \quad (50)$$

$$B_2 = \frac{I_n(u)Y'_n(w)}{J_n(v)Y'_n(w) - J'_n(w)Y_n(v)} B_1 \equiv B_{21}B_1. \quad (51)$$

方位角成分については  $E_{\phi 1}|_{r=a} = E_{\phi 2}|_{r=a}$  and  $H_{\phi 1}|_{r=a} = H_{\phi 2}|_{r=a}$  で与えられる

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{nk_z}{\omega\mu_0} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (A_{21}J_n(v) + A_{31}Y_n(v)) \right] \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{1}{v} (B_{21}J'_n(v) + B_{31}Y'_n(v)) \right]^{-1} \quad (52)$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega\epsilon_0}{nk_z} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (B_{21}J_n(v) + B_{31}Y_n(v)) \right]^{-1} \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{\epsilon_r}{v} (A_{21}J'_n(v) + A_{31}Y'_n(v)) \right]. \quad (53)$$

(52) と (53) を減らすと、DLW の固有モードの分散関係は次のようになる。

$$f_{\text{disp}}(k_0, k_z, a, r_{ab}, \epsilon_r)$$

$$= \frac{k_0^2}{n^2 k_z^2} \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (B_{21}J_n(v) + B_{31}Y_n(v)) \right]^{-1} \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{\epsilon_r}{v} (A_{21}J'_n(v) + A_{31}Y'_n(v)) \right] - \left[ \frac{I_n(u)}{u^2} + \frac{1}{v^2} (A_{21}J_n(v) + A_{31}Y_n(v)) \right] \left[ \frac{I'_n(u)}{u} + \frac{1}{v} (B_{21}J'_n(v) + B_{31}Y'_n(v)) \right]^{-1}, \quad (54)$$

ここで、自由空間の波数  $k_0 = \omega/c$  と定義する。無次元パラメータ  $r_{ab} = a/b$  を定義し、金属壁の半径を  $b = a/r_{ab}$  とする。また、 $\text{TM}_{nm}$  モードについては、 $f_{\text{disp}}(k_0, k_z, a, r_{ab}, \epsilon_r) = 0$  の  $m$  番目の解の共鳴条件を求める。ここで周波数  $f = ck_0/2\pi$ 、伝搬定数  $k_z = k_0/\sqrt{1 - 1/\gamma^2}$ 、真空孔

半径  $a$ 、真空と誘電体の半径の比  $r_{ab} = a/b$ 、比誘電率  $r_{ab} = a/b$ 。比、比誘電率  $\epsilon_r$ 。

単位長さあたりのエネルギー  $U = (1/2) \int dS (\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2)$ 。となり、電力束  $P_z = \int dS (E_r H_{\phi}^* - E_{\phi} H_r^*)$  は以下のように求められる：

$$U = \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{1}{\alpha_1^2} \Lambda_{u1}^n + \frac{\epsilon_r E_0^2}{2cZ_0} \frac{1}{k_2^2} \Lambda_{u2}^n,$$

$$= \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{\gamma_p^2 \beta_p^2}{k_0^2} \Lambda_{u1}^n + \frac{E_0^2}{2cZ_0} \frac{\beta_p^2}{(\epsilon_r \beta_p^2 - 1) k_0^2} \Lambda_{u2}^n, \quad (55)$$

$$P_z = \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{k_z^2}{\alpha_1^4} \Lambda_{p1}^n + \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{k_z^2}{k_2^4} \Lambda_{p2}^n,$$

$$= \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{\gamma_p^4 \beta_p^2}{k_0^2} \Lambda_{p1}^n + \frac{E_0^2}{Z_0} \frac{\beta_p^2}{(\epsilon_r \beta_p^2 - 1)^2 k_0^2} \Lambda_{p2}^n \quad (56)$$

ここで、無次元積分を次のように定義する。

$$\Lambda_{u1}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_1 \lambda_1 \left[ (c_n^2 + r_\eta^2 s_n^2) I_n^2(\lambda_1) + \gamma_p^2 (c_n^2 (R_n^2(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) + R_n^2(\lambda_1, \beta_p, r_\eta)) + s_n^2 (R_n^2(\lambda_1, \beta_p r_\eta, 1) + R_n^2(\lambda_1, r_\eta, \beta_p))) \right],$$

$$\Lambda_{u2}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_v^w d\lambda_2 \lambda_2 \left[ (\epsilon_r c_n^2 C_n^2(\lambda_2) + r_\eta^2 s_n^2 D_n^2(\lambda_2)) + \frac{1}{\epsilon_r \beta_p^2 - 1} (c_n^2 (\epsilon_r R_{2n}^2(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) + R_{2n}^2(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta)) + s_n^2 (\epsilon_r \bar{R}_{2n}^2(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) + \bar{R}_{2n}^2(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p))) \right],$$

$$\Lambda_{p1}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_1 \lambda_1 \left[ c_n^2 R_n(\lambda_1, 1, \beta_p r_\eta) R_n(\lambda_1, \beta_p, r_\eta) + s_n^2 R_n(\lambda_1, \beta_p r_\eta, 1) R_n(\lambda_1, r_\eta, \beta_p) \right],$$

$$\Lambda_{p2}^n = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^u d\lambda_2 \lambda_2 \left[ c_n^2 R_{2n}(\lambda_2, 1, \beta_p r_\eta) R_{2n}(\lambda_2, \epsilon_r \beta_p, r_\eta) + s_n^2 \bar{R}_{2n}(\lambda_2, \beta_p r_\eta, 1) \bar{R}_{2n}(\lambda_2, r_\eta, \epsilon_r \beta_p) \right].$$

ここで、 $s_n = \sin(n\phi)$  と  $c_n = \cos(n\phi)$  を使う。

## 2.2 DLW の実証実験

現時点で外部の超高周波源による DLW の加速はまだ電界が低く、これまでの実証実験としては相対論的電子ビームを用いた航跡場によるものが行われている。これらについては電子ビーム駆動の超高周波源の所に記載した。

## 第 II 部

# 電子ビーム駆動の超高周波源 (ミリ波源=サブTHz 源)

電子ビーム駆動の超高周波源は、効率は比較的高くできるが、高出力化や装置の規模の関係で、実用化している物は少ない。電子ビームとしては非相対論的な電子ビームを使う方法と相対論的なビームを使う方法で大きく分けて、電子管とそれ以外で分けて述べる事とする。

### 1 電子管

電子管は非相対論的な数 kV~数 100kV の大電流電子ビームを用いて、増幅または発振するものである。ミリ波帯の電子管は様々な物が考案され、製品化されている物もある。1つのソースから全て賄うような産業用の加速器では発振管の使用も可能なケースもあるが、発振管は位相が制御できない上、発振波長も発振条件によって飛んだりする事もあり、不安定性から加速器では非常に使いづらい特に大型の加速器では位相が制御できる事が必須であるため、増幅管が必要となる。

#### 1.1 Gylotron

ジャイロトロンは  $TE_{0nm}$  のモードを用いて回転方向の電界との相互作用による電子管であり微細な構造を作らなくてもモードとの相互作用ができ、相互作用距離を長く取れるため、1THz 程度までの発振が可能である。ただしジャイロトロンは発振管であり、ジャイクロクライストロンという増幅管も可能ではあるが、寄生発振などの問題から製品化されている物は少ない。

#### 1.2 TWT(Travelling Wave Tube)

進行波管はヘリカル遅波回路を利用して、数 10GHz 帯などで比較的広帯域の増幅が可能な電子管である。ただヘリカル構造のサポートなどの製作上の精度などの限界があり数 10GHz 程度までが一般的である。また出力も小さく 20GHz 程度で数 kW 程度である。

#### 1.3 Extended Interaction Klystron

マイクロ波のクライストロンでは、1 空洞の空洞長で十分なビームとの相互作用があり、ビームの速度変調がかけられるが、ミリ波領域になってくると、相互作用距離が取れないため十分な変調がかからない。そこでクライストロンの中間空洞を複数セルなどにして進行波型などにする事で相互作用距離を長くし、クライストロンと同じ増幅を可能にした物は Extended Interaction Klystron(EIK) と呼ばれる。EIK は製品もあり、100GHz で数 kW のピーク出力の物があるが、300GHz 程度になると数 10W 程度のピーク出力が限界となる。ビーム電流としては  $f^{-2}$  で小さくなるだけなはずであるが、クライストロンでは 10 GHz で数 10MW が可能な事を考慮すると出力は  $f^{-4}$  程度で下がってしまっている事になる。超高周波でここまで出力が下がってしまうのは、周波数が上がると空洞の Q 値が下がってしまい、ビームとの相互作用によってできる電界も弱くなってしまい、さらにそれによりビーム電圧も下げる必要がある、出力が下がってしまうのだと思われる

#### 1.4 後進波発振管：BWO(Backward Wave Oscillator)

後進波発振管：BWO(Backward Wave Oscillator) は電子ビームと遅波構造の相互作用が電子ビームの進行方向と電磁波の群速度の方向が対向するタイプの発振器である。図 6 は、遅波構造の分散図を表しており、負の群速度をもつ後進波と相互作用をさせる。従って電子ビームの速度を変えると相互作用する空間高調波の位相速度つまり発振周波数を変化させる事ができる。この空間高調波によって電子ビームに集群がおき、集群した電子が後半の構造で空間高調波の減速位相に入ることによってエネルギーを失い電磁波を増幅する事で発振が起きる

図 7 は遅波構造内に誘起される場によって電子ビームが集群する様子である。このような遅波構造としては

- らせん構造
- 交叉指型回路
- 楕円形回路
- はしご型回路

などがあるが、良く研究されているのは交叉指型

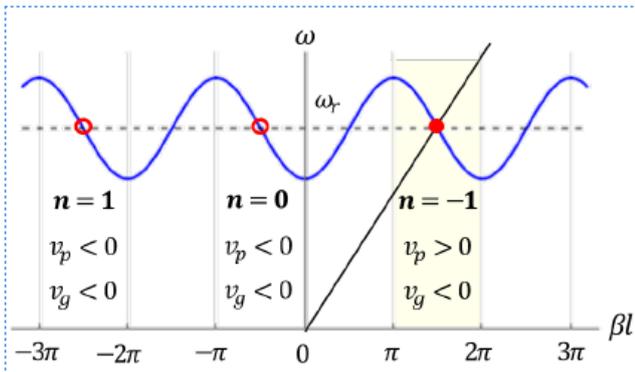


図6 遅波構造の分散図

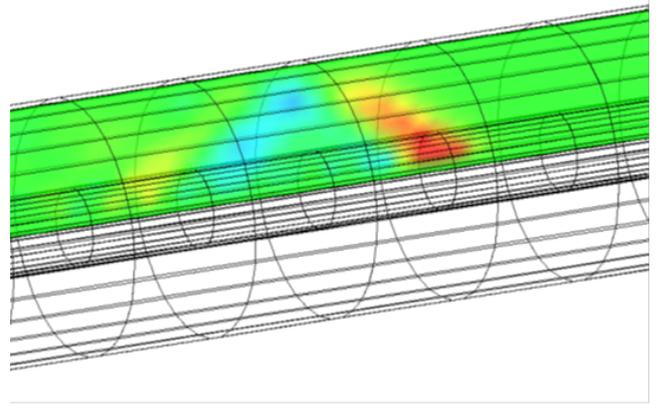


図9 DLW による航跡場

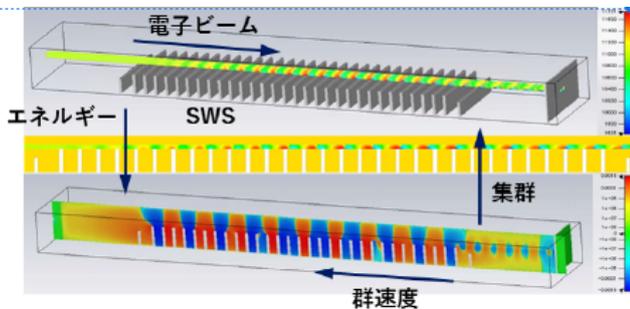


図7 遅波構造内に誘起される場によって電子ビームが集群する様子

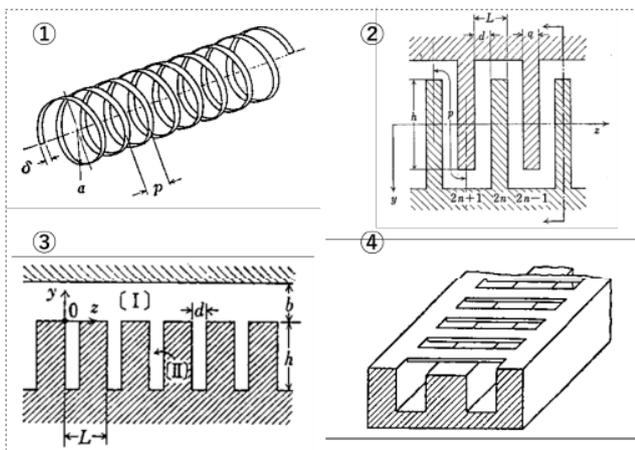


図8 遅波回路の構造

回路と楕円形回路だと思われる。

## 2 相対論的電子ビームによるミリ波生成

### 2.1 航跡場

相対論的電子ビームは進行方向に  $\frac{1}{\gamma}$  で圧縮された電界分布を持つため、DLW 自身での超短パルスの電子ビームからの航跡場は、非常に強力であり、逆チェレンコフ放射と呼ばれる、電子バンチの持つ電界を誘電体により折り曲げたような後続の電界ができる (図 9)

$$eE_{z,dec} \approx \frac{-4N_b r_e m_e c^2}{a \left[ \sqrt{\frac{8\pi}{\epsilon-1} \epsilon \sigma_z} + a \right]} \quad (57)$$

例えばこれを

$$\begin{aligned} a &= 0.1 \text{ mm} \\ b &= 0.324 \text{ mm} \\ \epsilon &= 3.0 (\text{SiO}_2) \\ q &= 5 \text{ nC} \\ \sigma_z &= 30 \mu\text{m} (0.1 \text{ ps}) \end{aligned}$$

というようなパラメーターで計算すると 航跡場により発生した電界は 2 GV/m になる

今まで最も高い電界が得られた実証例としては Stanford Linear Accelerator Center での FFTB の実験による 13.8 GV/m という実証例がある ([5]).

KEK の電子陽電子入射器では、これらとは少し異

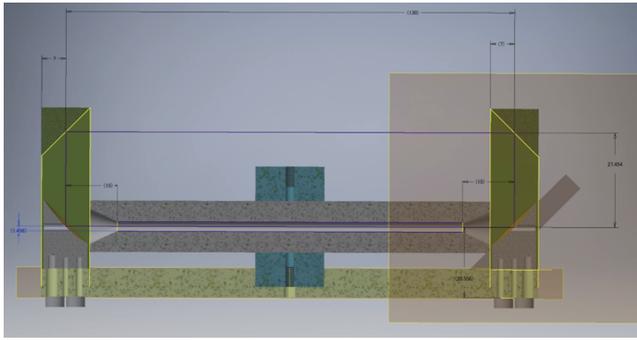


図 10 KEK における共振型 DLW 構造による THz Deflector の試験装置

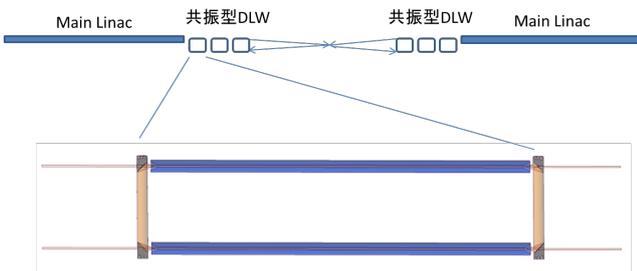


図 11 DLW アフターバーナー

なる方法で、DLW を THz-Deflector によるパンチのスライス形状の分析のために導入して実験を行っている。従来と異なるのは、自己航跡場ではなく、駆動ビームと分析ビームを異なる RF サイクルで加速された別々のビームを用いて、共振器型の構造の DLW を用いて、駆動ビームからの外部超高周波源を用いた、より加速器に近い実験が可能となっている。

この共振構造の DLW は逆側からのビームでも利用できるため、例えばコライダーのような加速器の相手側ビームを駆動ビーム源とした追加速用（アフターバーナー）としても利用可能であると考えられる (図 11)

## 2.2 FEL

### 2.2.1 シンクロトロン放射光

荷電粒子が真空中を等速直線運動している際には電磁波の放射はない。しかし、運動速度や運動方向が変化する際には電磁波が放出される。高エネルギーの電子が磁場の中を運動するとき、曲率中心に向かう力を受けて発生する電磁波をシンクロトロン放射光と呼ぶ。磁場の中を運動する荷電粒子からの電磁

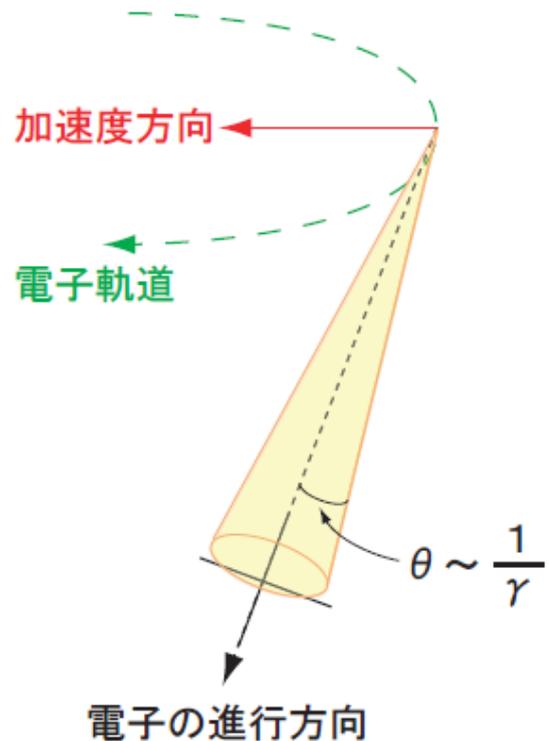


図 12 シンクロトロン放射光の強度分布。電子が赤の矢印の方向に加速度を受け、緑の点線のような軌道を取る時、放射光がオレンジの円錐のように放出される。電子の進行方向を黒い点線で示すとき、放射角度  $\theta$  は  $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$  となる。

波をシンクロトロン放射光とよぶようになったのは、これが初めて観測されたのが電子シンクロトロンであったことによる。

電子が相対論的速度で運動するときには、光の強度分布は電子の進行方向に集中する。相対論から電子系での  $\theta'$  の角度に出た光は、実験室系では、

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta'}{\beta + \cos \theta'} \quad (58)$$

で与えられる  $\theta$  の方向に観測される。ここで  $\beta$  は電子の速度  $v$  を光速  $c$  で割った値 ( $\beta = v/c$ ) であり、 $\gamma$  は電子のエネルギーを静止エネルギー  $m_0c^2 (= 0.51\text{MeV})$  で割った値であり、

$$\gamma = \frac{\text{電子のエネルギー [MeV]}}{0.51} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (59)$$

と表される。式 (58) によると  $\theta' = 90^\circ$  に出た光であっても  $\theta \approx 1/\gamma$  に放出されるので、大部分の光は

電子の進行方向に沿った狭い角度の円錐の中に放出される(図12)。また光速に近い速さで走る電子から放出される放射光は、相対論的ドップラー効果により、波長が非常に短くなる。

この鋭い指向性と短波長性が放射光の特徴である。

シンクロトロン放射光は X 線、軟 X 線、真空紫外から紫外、可視領域までの広い波長域に及ぶ強力な連続スペクトル光であり、X 線、軟 X 線、真空紫外領域の光科学にとって新しい光源である。放射光の取り出し方としては、偏向電磁石のところで発生する光を取り出す方法がある。しかし、この場合には利用できる放射光の波長域などが光源加速器全体の設計(軌道半径等)で決まるため、電子に小さな曲率半径を描かせるためのものとして考案されたものがウィグラーである。また、偏向電磁石やウィグラーから取り出される放射光は幅広い波長を持っているため、放射光の単色性を良くするために考案されたものがアンジュレータである。このアンジュレータと加速器を併用してレーザー発振機としたものが自由電子レーザーである。

### 2.2.2 誘導放射

アンジュレータ磁場が x 軸に平行の場合、yz 平面内の電子ビームの軌道は図 13 のように蛇行する。電子ビームの蛇行と同じ yz 平面に偏向面を持つ放射光(波長  $\lambda$ ) の電場  $E$  による電子の加速減速を考える。まず図 13 において、電子の進行方向が y 軸の正方向で、電場  $E$  の向きが y 軸の正方向である点 A0 について考える。この時電場  $E$  により、

電子は進行方向 y 軸正方向の逆である y 軸負方向に力を受ける。よって、点 A0 では電子ビームは減速される。次に電子がアンジュレータの半波長 ( $\lambda_u/2$ ) 進んだとき、電子が光の位相に対し光の半波長 ( $\lambda_s/2$ ) だけ遅れた場合を考えると、A0 の電子は図 13 の A1 の位置に来る。この場合、電場  $E$  により電子は進行方向 y 軸負方向の逆である y 軸正方向に力を受ける。よって、A0 → A1 において連続して減速が起こる。同様にして、A2 でも減速となり、最初 A0 から出発した電子は共鳴的に減速され続ける。このような条件を共鳴条件と呼び、電子が失ったエネルギーが放射光のエネルギーに変換され放射光が増幅される効果を誘導放射という。誘導放射は放射光の周期で配列した電子からの放射となるため、放

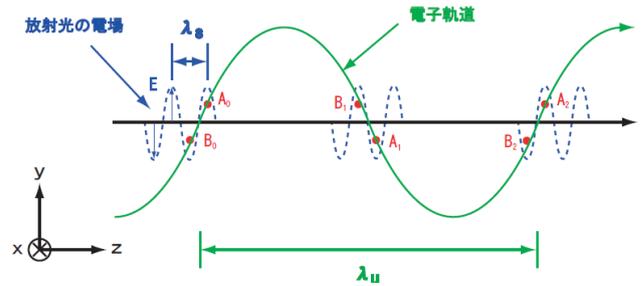


図 13 電子と放射光の共鳴条件。緑は電子軌道、青は放射光の電場、 $\lambda_u$  はアンジュレータの周期長を表している。アンジュレータ磁場が x 軸に平行のとき、電子ビームは yz 平面内で蛇行する。電子の進行方向が y 軸の正方向で、電場  $E$  の向きが y 軸の正方向であるような点 A0 の電子は放射光の電場により共鳴的に減速され続け、電子が失ったエネルギーが放射光のエネルギーに変換され増幅される。このような条件を共鳴条件という。

射光の位相に同調したコヒーレントな光となる。また点 B0 も同様に考えると、共鳴的に加速され続けることになり放射光が減衰され続ける。この場合、電子は放射光のエネルギーを吸収していると考えられる。以上のことから、誘導放射を起こさせ放射光を増幅するためには、電子ビームのエネルギー、電子と放射光の波長や位相など考慮する必要がある。

アンジュレータ中で波長  $\lambda_s$  の放射光と電子ビームが共鳴的に相互作用したとき、図 13 で説明したように電子のエネルギーが変調される。エネルギー変調された電子ビームではある距離伝播したのち密度変調が発生する。いま、共鳴条件を満たす電子ビームのエネルギーよりもわずかに高いエネルギーの電子ビームを入射したとする。加速位相の電子はエネルギー変調により共鳴条件からのずれが大きくなり、加速位相から減速位相への移動が起こる。一方、最初減速位相にあった電子はエネルギー変調の結果共鳴状態により近づくため、長時間にわたり減速位相に滞在する。以上の結果、電子ビームはレーザー光の周期で密度変調を受け、減速位相に集群化する。すなわち、電子ビームは全体として、エネルギーを失い、そのエネルギーは誘導放射によりレーザー光に変換される。逆に共鳴エネルギーよりもわずかに低いエネルギーの電子ビームは、レーザー光により加速される。その結果、レーザー光は減衰する。電子

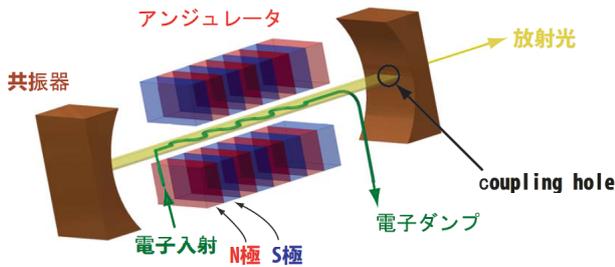


図 14 アンジュレータと光共振器。自由電子レーザーの構成要素である光発生・共振器部はアンジュレータと共振器から構成されている。入射された電子ビームはアンジュレータの周期的な磁場により蛇行運動をし、シンクロトロン放射光を放出する。放出されたシンクロトロン放射光はアンジュレータ前後に設置した光共振器により蓄積され増幅、レーザー発振を行う。

ビームが十分減速位相に集群化した状態では個々の集群があたかも一つの荷電粒子であるかのように振る舞い、シンクロトロン放射が起こる。シンクロトロン放射エネルギーは電荷  $q$  の粒子では  $q^2$  に比例する。したがって、ランダムに分布した  $N$  個の粒子による放射エネルギーは  $Nq^2$  に比例する。それに対し、 $N$  個の粒子が完全に集群化した場合には  $(Nq)^2$  に比例する。すなわち、共鳴するレーザー光の入射により誘導された放射光強度は通常のシンクロトロン放射光の  $N$  倍になる。

### 2.2.3 自由電子レーザー (Free Electron Laser, FEL)

自由電子レーザー (Free Electron Laser, FEL) は、電子加速器部と光発生・共振器部から構成されている。光発生・共振器部の図を図 14 に示す。FEL 発振までの過程は以下の通りである。まず加速器により相対論的なエネルギーまで加速された電子ビームをアンジュレータに入射する。入射された電子ビームはアンジュレータの周期的な磁場により蛇行運動をし、シンクロトロン放射光を放出する。放出されたシンクロトロン放射光はアンジュレータ前後に設置した光共振器により蓄積される。その後、後発の電子ビームと繰り返し相互作用させることにより電子ビームを集群し、強い誘導放射を発生させ放射光を増幅する。この増幅率が共振器鏡での減衰率を上回るときに FEL 発振が起こる。

さらに THz～紫外線程度までの波長域では光学的

なミラーが利用できるため、先に説明した FEL はアンジュレータ前後に共振器を置きアンジュレータの長さを擬似的に無限長にすることで短いアンジュレータで FEL 発振を飽和させる事が可能となる。一方 X 線領域などになると効率の良いミラーが使えないため共振型 FEL は一部提案されているが、Self-amplified spontaneous emission (SASE) と呼ばれる自己増幅のみによる方法が実施されており、ショットノイズから飽和させるまで、アンジュレータ周期としては数 1000 周期 (数 10m) が必要となっている事が多い。

アンジュレータ放射光の波長  $\lambda_s$  は相対論的ドップラー効果により、アンジュレータの周期長  $\lambda_u$  よりも短くなる。式で表すと

$$\lambda_s = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (60)$$

となる。ここで  $K$  は”  $K$ -パラメータ” と呼ばれアンジュレータの性能を評価する重要なパラメータであり、磁場強度  $B_u$  に比例するパラメータで次式で与えられる。

$$K = \frac{eB_u\lambda_u}{2\pi m_0 c} \quad (61)$$

ここで  $e$  は素電荷 ( $= 1.062 \times 10^{-19} [C]$ ) である。式 (61) より、アンジュレータ放射光の波長は  $\gamma$  や、 $K$ 、 $\lambda_u$  の値に依存する。そのため、磁場の強さや周期長、電子のエネルギーを変化させることで、波長を連続的に自由に選択することができる。

FEL は通常のレーザーのように原子、分子および固体の電子のエネルギー準位を利用せず、磁場中の自由電子をレーザー媒質としている。そのため、通常のレーザーのような媒質中での熱損失がなく高効率・高出力であり、また磁場強度および電子のエネルギーを変えることで発振波長を連続的に変えることができる。以上の特徴から既存のレーザーでは発振が困難な波長域、大パワー、単色性、などが実現でき、必要な様々な分野での応用利用が期待される。

### 2.2.4 THz～遠赤外の自由電子レーザー

例として東京理科大学に以前設置されていた自由電子レーザーの構成について紹介する [7]。東京理科大学 FEL-TUS には、以前 THz 帯の FIR-FEL と遠赤外の MIR-FEL の 2 台が並列に設置されていた

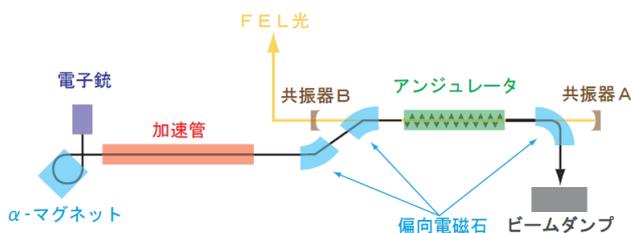


図 15 東京理科大学 FEL-TUS に以前設置されていた FEL (現在は KEK に移設) は電子銃、α 電磁石、線形加速器、アンジュレータ、光共振器、ビームダンプ等から構成されている。電子銃で電子を引き出し、α 電磁石で電子ビームのエネルギー分布幅、バンチを調節し線形加速器に送る。線形加速器で電子を加速し、アンジュレータに電子を入射し、放射光を放出させる。その後電子はビームダンプに捨てられ、放射光は共振器内に閉じ込められ、増幅、レーザー発振し、上流側ミラーの中心部の孔から外部に取り出され各実験室に供給される。

(MIR-FEL は現在 KEK に移設)。

このように THz / 遠赤外では光共振器が使える事や、FEL パラメーターを大きく取れるため、比較的簡単に高出力の THz や遠赤外を得る事ができる。出力としてはおよそ  $\mu J$  のレベルであるが、これがマルチバンチで出てくるため、蓄積できる構造体を設計すれば、十分に高い電界を得る事はできるはずである。ただしミリ波帯 (数 100GHz) まで波長が長くなり過ぎて、スリッページから増幅するための波長が取れない。例えば 300GHz では波長は 1mm で、3ps に相当するため、バンチ長が 10ps だとしても 3 波長しかない。つまりアンジュレータ 3 周期分しか増幅されない事になってしまう。従って、加速器側で低い周波数 (1GHz 程度) などの空洞を用いて 100ps 程度のバンチ長にして何とか数 100GHz を発振する事ができるため、装置が大型化してしまう。大阪大学などでは L-band の空洞からの電流ビームを用いて THz の FEL の発振が行われていたが、L-band では装置が大型化してしまい、加速ユニットの THz ソースとして使用するには厳しいと思われる。

## 第 III 部 レーザー駆動の超高周波源 (ミリ波源 = サブ THz 源)

### 1 レーザー光源

#### 1.1 量子光学

量子光学は特にレーザーを作る上でそれほど役に立つわけでもないが、一応知識として持っているの良い部分もあるため簡単に式だけ記載しておく光子のハミルトニアンはヘルムホルツ方程式から始めて以下のように書ける

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A = 0 \quad (62)$$

$$A(r, t) = A_0 e^{i(kr - \omega t)} \\ = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\mu=1}^2 e_{k\mu} \times \quad (63)$$

$$\{q_{k\mu}(t) e^{ikr} + q_{k\mu}^*(t) e^{-ikr}\} \quad (64)$$

$$(65)$$

ここで  $k_\mu$  の代わりに  $\lambda$  を用いる  $\mu$  は分極、 $e$  は分極のベクトルである。

$$H = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} \\ = \varepsilon_0 \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (q_\lambda^* q_\lambda + q_\lambda q_\lambda^*) \quad (66)$$

$$Q_\lambda(t) = q_\lambda(t) + q_\lambda^*(t) \quad (67)$$

$$\dot{Q}_\lambda(t) = -i\omega_\lambda (q_\lambda(t) - q_\lambda^*(t)) \quad (68)$$

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_\lambda \left(\dot{Q}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2\right) \quad (69)$$

$$P_\lambda = \varepsilon_0 \dot{Q}_\lambda = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_\lambda} \quad (70)$$

$$H = \sum_\lambda \left(-\frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_\lambda^2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2\right) \quad (71)$$

このハミルトニアンの生成消滅演算子は以下のように書ける

$$\begin{aligned}
H|n\rangle &= \sum_{\lambda} \left( -\frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_{\lambda}^2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2 \right) |n\rangle \\
&= \hbar\omega \left( \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\
&= E|n\rangle
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\hat{a}_{\lambda} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}}{2\hbar}} \left( Q_{\lambda} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right), \tag{73}$$

$$\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}}{2\hbar}} \left( Q_{\lambda} - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega_{\lambda}} P_{\lambda} \right) \tag{74}$$

$$[\hat{a}_{\lambda}, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}] = 1 \tag{75}$$

$$\rightarrow \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} - \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} = 1 \rightarrow \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \tag{76}$$

$$= \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} + 1 = n + 1 \tag{77}$$

$$[\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] \tag{78}$$

$$= [|n\rangle, \hat{a}_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] = (n+1) [|n\rangle, |n\rangle] = n+1 \tag{79}$$

$$\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle = c |n+1\rangle \tag{80}$$

$$\rightarrow [\hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle, \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle] = c^2 [|n+1\rangle, |n+1\rangle] \tag{81}$$

$$= n+1 \tag{81}$$

$$c = \sqrt{n+1} \tag{82}$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n\rangle \tag{83}$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n-1\rangle \tag{84}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} |n-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_{\lambda}^{\dagger})^n |0\rangle \tag{85}$$

次にコヒーレントな状態を記述すると

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{a} \hat{a}^{\dagger} |n\rangle &= \langle n | \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + 1 |n\rangle \\
&= (n+1) \langle n |n\rangle = n+1
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\hat{a}^{\dagger} |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \tag{87}$$

$$\langle n | \hat{a} = \sqrt{n+1} \langle n+1 | \quad : \quad \text{Hermite} \tag{88}$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad : \quad \text{Annihilation op } \alpha \tag{89}$$

$$\langle n | \hat{a} |\alpha\rangle = \alpha \langle n |\alpha\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1 |\alpha\rangle \tag{90}$$

$$\rightarrow \langle n |\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \langle n-1 |\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 |\alpha\rangle \tag{91}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n |\alpha\rangle = \langle 0 |\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{92}$$

$$\langle \alpha |\alpha\rangle = 1 = \langle 0 |\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle \alpha |n\rangle \tag{93}$$

$$= \langle 0 |\alpha\rangle^2 \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{n!} = \langle 0 |\alpha\rangle^2 \exp(|\alpha|^2) \tag{93}$$

(taylor series)

$$\begin{aligned}
\langle 0 |\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n |\alpha\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle
\end{aligned} \tag{95}$$

Coherent state

$$|\langle n |\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha|^2) \tag{96}$$

Poisson Distribution

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\hbar}} \left( Q + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (97)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega \lambda}{2\hbar}} \left( Q - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (98)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (99)$$

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (100)$$

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*, \quad \langle \alpha | \alpha\rangle = 1 \quad (101)$$

$$\langle \alpha | Q | \alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} (\alpha + \alpha^*), \quad (102)$$

$$\langle \alpha | P | \alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2}} (\alpha^* - \alpha) \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | Q^2 | \alpha\rangle &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \langle \alpha | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega} \left( (\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right) \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha | P^2 | \alpha\rangle &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 | \alpha\rangle \\ &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger | \alpha\rangle \\ &= -\frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1 | \alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \left( 1 - (\alpha - \alpha^*)^2 \right) \end{aligned} \quad (105)$$

$$\Delta Q^2 = \langle \alpha | Q^2 | \alpha\rangle - \langle \alpha | Q | \alpha\rangle^2 = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}, \quad (106)$$

$$\Delta P^2 = \langle \alpha | P^2 | \alpha\rangle - \langle \alpha | P | \alpha\rangle^2 = \frac{\hbar \varepsilon_0 \omega}{2} \quad (107)$$

$$\Delta Q \Delta P = \frac{\hbar}{2} \quad (108)$$

ハミルトニアン の 時間発展 の 方程式 は 以下 の よう に 書ける

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\beta |\beta\rangle \langle \beta | \alpha\rangle \quad (109)$$

$$|\{\alpha_\lambda\}\rangle = \prod_\lambda |\alpha_\lambda\rangle \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}t) &= \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e_k \left( q_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + q_k^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} q_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \hat{a}_k, \quad q_k^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} e_k \left( \hat{a}_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

$$\Psi(t) = - \int \mathbf{J}(\mathbf{r}t) \mathbf{A}(\mathbf{r}t) d^3r \quad (113)$$

$$\Psi(t) = e^{-\frac{Ht}{\hbar}} \Psi e^{\frac{Ht}{\hbar}}, \quad |\psi(t)\rangle = e^{\frac{Ht}{\hbar}} |t\rangle \quad (114)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = \Psi(t) |t_0\rangle, \quad |t\rangle = U(t, t_0) |t_0\rangle \quad (115)$$

$$U(t, t_0) = \exp \left( \sum_\lambda \{\hat{a}_k\} \right) \quad (116)$$

ここで

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\hbar}} \left( Q + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (117)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega \lambda}{2\hbar}} \left( Q - \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} P \right) \quad (118)$$

これらから、時間発展の方程式は

$$H = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (119)$$

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E |n\rangle \quad (120)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i |e_i\rangle e^{-i\omega_i t} \langle e_i | \psi_0\rangle \quad (121)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \sum_i |e_i\rangle \hbar\omega_i e^{-i\omega_i t} \langle e_i | \psi_0\rangle = H_0 |\psi(t)\rangle \quad (122)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{Ht}{\hbar}} |\psi_0\rangle \quad (123)$$

輻射と電子の相互作用は、

$$H_{Interaction} = \frac{1}{2m} (p + eA)^2 - e\varphi \quad (124)$$

$$H = H_{Atomic} + H_{Interaction} \quad (125)$$

$$H_{Atomic} = \sum_j p_j^2 + V(r_1, r_2, \dots) + \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (126)$$

$$p = -i\hbar\nabla \quad (127)$$

$$H_{Interaction} = \sum_j \frac{e}{2m} (p_j A(r_j) + A(r_j) p_j) + \frac{e^2}{2m} \sum_j A(r_j)^2 = \sum_j \frac{e}{m} p_j A(r_j) + \frac{e^2}{2m} \sum_j A(r_j)^2 \quad (128)$$

$$\text{Coulomb gauge: } p_j A(r_j) = -i\hbar \{ \text{div} A(r_j) + A(r_j) \nabla_j \} = A(r_j) p_j \quad (129)$$

$$(130)$$

$$H_{Interaction} = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \times \sum_j \sum_\lambda \frac{1}{\sqrt{\omega_\lambda}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} (e_\lambda p_j) \hat{a}_\lambda + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} (e_\lambda p_j) \hat{a}_\lambda^\dagger \right\} \quad (131)$$

$$(132)$$

$$(133)$$

これを相互作用表示にすると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\psi(t)\rangle \quad (134)$$

$$|\psi'(t)\rangle = e^{\frac{H_0 t}{\hbar}} |\psi(t)\rangle \quad (135)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'(t)\rangle = H'_I |\psi'(t)\rangle \quad (136)$$

$$H'_I = e^{-\frac{H_0 t}{\hbar}} H_I e^{\frac{H_0 t}{\hbar}} \quad (137)$$

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle \quad (138)$$

$$i\hbar \frac{dc_f(t)}{dt} = \sum_n \langle f | H'_I | n \rangle c_n(t) \quad (139)$$

$$c_f(t) = \langle f | H'_I | g \rangle \frac{1 - e^{\frac{i(E_f - E_g)t}{\hbar}}}{E_f - E_g} \quad (140)$$

$$W_{fi} = \frac{|c_f(t)|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\lambda \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{\hbar n_\lambda}{2\varepsilon_0 V \omega_\lambda} \times$$

$$\left| \langle b | \sum_j e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} (e_\lambda p_j) | a \rangle \right|^2 \quad (141)$$

$$\delta(E_f - E_i) \quad (142)$$

$$E_a \rightarrow E_b : \quad (143)$$

$$E_f - E_i = E_b - \hbar\omega_\lambda - E_a \quad (144)$$

$$\rho(\omega_\lambda) d\omega_\lambda = \hbar\omega_\lambda \frac{n_\lambda}{V} d\omega_\lambda \quad (145)$$

$$\langle b | e_\lambda \sum_j p_j | a \rangle = im\omega_{ba} \langle b | e_\lambda \sum_j r_j | a \rangle = -\frac{im}{e} \omega_{ba} e_\lambda \langle b | P | a \rangle \quad (146)$$

これらからアインシュタインのレート方程式は以下のようになる

$$\begin{aligned} &: W_{fi} = B_{ba}\rho(\omega_{ba}) \\ &= \frac{\pi}{3\varepsilon_0 \hbar^2} |P_{ba}|^2 \rho(\omega_{ba}) \langle b | e_\lambda P | a \rangle = \frac{|P_{ba}|^2}{3} \quad (147) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{fi} &= B_{ba}\rho(\omega_{ba}) + A_{ab} \\ &= \frac{\pi}{3\varepsilon_0 \hbar^2} |P_{ab}|^2 \rho(\omega_{ba}) + \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3} |P_{ab}|^2 \quad (148) \end{aligned}$$

$$\frac{dN_a}{dt} = -\frac{dN_b}{dt} = \quad (149)$$

$$]A_{ab}N_b - B_{ba}N_a\rho(\omega) + B_{ab}N_b\rho(\omega) \quad (150)$$

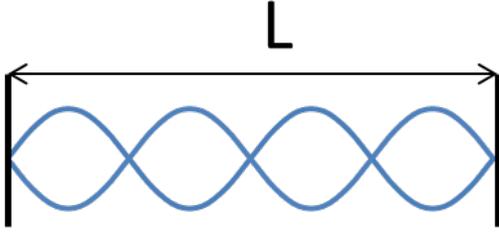


図 16 レーザー共振器

$$E(t) = A \sum_{n=0}^N e^{i\omega_n t + i\phi_n}$$

$$\overline{I(t)} = A^2 \sum_{n=0}^N \overline{\cos^2 \omega_n t} = \frac{A^2(N+1)}{2}$$

## 1.2 レーザー発振とモードロック発振

### 1.3 レーザーの発振モード

レーザー共振器は図 16 のように一番簡単には 2 つの壁で形成され

共振器に存在するレーザーの波長は

$$\frac{\lambda_n}{2} n = L \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi c}{2L} n$$

で表され、共振器内の電界は以下ようになる

$$E(t) = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\omega_n t + i\phi_n}$$

ここに存在するレーザーの発振モードとしては以下の 3 種類の物が考えられる

- 連続波 (Continuous Wave: CW) 単一モードの非同期の振幅が同じレーザーの重ね合わせである

$$A_n = \begin{cases} A & (n = \frac{2L\omega}{2\pi c}) \\ 0 & (others) \end{cases}$$

$$E(t) = A e^{i\omega t + i\phi}$$

$$I(t) = |E(t)|^2 = A^2$$

- Q スイッチ ~10 ns

Q スイッチは連続波と同じだが、ポッケルスセルなどのデバイスを用いて時間的に瞬間的に空洞の Q 値を高くする事で、上準位に蓄積されたエネルギーを急速に誘導放出させ 10ns 程度のパルスが出力できる方法である

$$\begin{cases} A_n = A \\ \phi_n = random \end{cases}$$

- モード同期 ~10 fs

一方モード同期というのは非線形デバイスなどを用いた何らかの方法により、揃った位相のレーザーを発振させる方法であり

$$\begin{cases} A_n = A \\ \phi_n = \phi \end{cases}$$

$$E(t) = A e^{i\phi} \sum_{n=0}^N e^{i\omega_n t} \quad (151)$$

$$= A e^{i\phi} \sum_{n=0}^N e^{i \frac{2\pi c t}{2L} n} \quad (152)$$

$$= A e^{i\phi} \frac{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L} (N+1)}}{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L}}} \quad (153)$$

$$(154)$$

$$I(t) = A^2 \left| \frac{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L} (N+1)}}{1 - e^{i \frac{2\pi c t}{2L}}} \right|^2 \quad (155)$$

$$= A^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{2\pi c t (N+1)}{2L} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi c t}{2L} \right)} \quad (156)$$

$$(157)$$

#### 1.3.1 モード同期

モード同期は  $t=0$  付近で展開すると以下のように書ける

$$E(t) = Ae^{i\phi} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} e^{i\omega_n t} \quad (158)$$

$$= Ae^{i\phi} \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} e^{in\Delta\omega_{LD}t} \quad (159)$$

$$= Ae^{i\phi} \frac{e^{iN_{\min}\Delta\omega_{LD}t} - e^{i(N_{\max}+1)\Delta\omega_{LD}t}}{1 - e^{i\Delta\omega_{LD}t}} \quad (160)$$

$$= \frac{Ae^{i\phi}}{\frac{(\Delta\omega_{LD}t)^2}{2} - i\Delta\omega_{LD}t} \times [ \quad (161)$$

$$\frac{(N_{\min}\Delta\omega_{LD}t)^2}{2}$$

$$+iN_{\min}\Delta\omega_{LD}t$$

$$- \frac{((N_{\max} + 1)\Delta\omega_{LD}t)^2}{2}$$

$$-i(N_{\max} + 1)\Delta\omega_{LD}t ]$$

$$= \frac{Ae^{i\phi}}{1 - i\frac{\Delta\omega_{LD}t}{2}} \times [ \quad (162)$$

$$(N_{\max} + 1 - N_{\min})$$

$$-i \frac{((N_{\max} + 1)^2 - N_{\min}^2)\Delta\omega_{LD}t}{2} ]$$

$$\Delta t(-3dB) = \frac{2(N_{\max} + 1 - N_{\min})}{((N_{\max} + 1)^2 - N_{\min}^2)\Delta\omega_{LD}} \quad (163)$$

$$= \frac{2}{(N_{\max} + 1 + N_{\min})\Delta\omega_{LD}} \quad (164)$$

$$E(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (165) \quad (167)$$

これは結果として

$$I(t) = A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi ct(N+1)}{2L}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi ct}{2L}\right)} \quad (166)$$

この式は図 17 のように  $\Delta t = \frac{2L}{c}$  毎に  $I(t) = A^2(N+1)^2$

の尖頭出力のパルスが得られる事になるここで特筆すべきは同じ平均出力のレーザーでもモードの数  $N$  が増えると  $N$  倍の尖頭電界が得られる事である。

なお、パルス幅にはフーリエ限界の関係があり、電界の時間分布は以下のようなフーリエ変換の関係があり

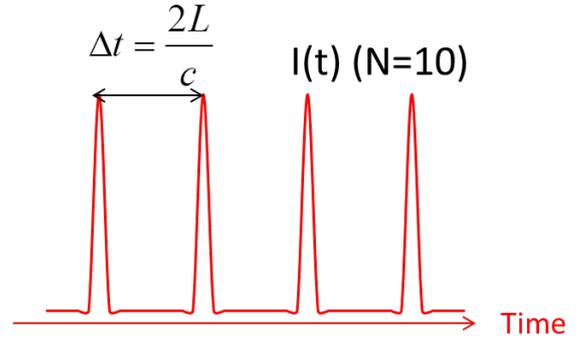


図 17 モードロック発振

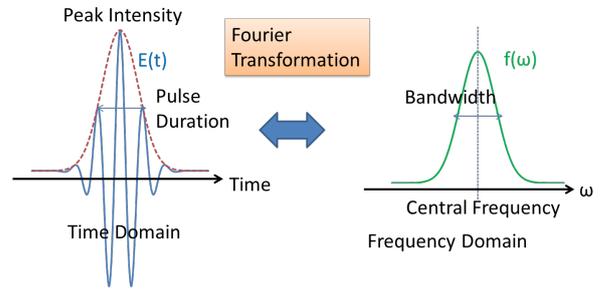


図 18 フーリエ限界

$$f(\omega) = \exp[-a(\omega - \omega_0)^2 + i\phi(\omega)] \quad (168)$$

$$= \exp[-a(\omega - \omega_0)^2] \quad (169)$$

$$+i\beta_0 + i\beta_1(\omega - \omega_0) \quad (170)$$

$$+i\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots] \quad (171)$$

$$(172)$$

と過程すると帯域は

$$I(\omega) = f(\omega)^2 \rightarrow \Delta\omega = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{a}} \quad (173)$$

となる

#### 1.4 レーザー媒質と配置

科学的な目的でレーザーを利用する際、一般的に特定の波長のレーザーが必要である事が多く、以前

のレーザー開発は、その特定の波長に準位のあるレーザー媒質を探す事が重要であった。しかし近年非線形光学素子による波長変換効率が飛躍的に上がり、次は非線形光学素子の位相整合角が取れる材料を探す事が重要となった。さらにその後周期構造を持つ擬似位相整合 (quasi-phase matching: QPM) という方法が実用化され、現在ではこの擬似位相整合によりどのような周波数でも位相整合が可能になった事により材料の非線形光学定数と耐力だけが問題になる時代となってきている。

従って、駆動用レーザーとしてはどんな波長でも良くなり、一般的に半導体レーザー励起で大出力・高効率を得やすい Nd:YAG や Yb:YAG レーザー媒質を用いて、そこから QPM によって任意の波長を得るのが最も効率良く最短の期間で開発ができる方法となった。例外としては帯域の広い Ti:Sapphire レーザーだけは少々特殊であり、Ti:Sapphire の帯域内にある波長 650~950nm 程度に関しては、超高出力が得られるため、Ti:Sapphire レーザーが用いられるが、それ以外の周波数では、非線形デバイスで倍波を取ったり、足したり引いたりを任意に行い、材料の特性が得られる範囲内であれば、どのような波長でも生成する事ができるようになった。

レーザー媒質としては、以下のようなものがあるが、固体レーザーのみについて述べる事とする

- 固体レーザー蛍光寿命や波長の可変範囲が無く、従来は誘導放出による固体レーザーだけでは様々な応用をカバーできなかった。しかし近年は半導体レーザーが高出力化した事により励起が高効率になり、また非線形デバイスの高効率化と合わせて固体レーザーのみで様々な用途に活用できるようになっており、本稿では固体レーザーのみについて述べる事とする
- ガスレーザー短波長、長波長などの固体レーザーで対応できない領域で、ガスの種類により短波長や長波長が出る物があり、産業用で利用されているものとして短波長でエキシマレーザー、長波長で CO<sub>2</sub> レーザーなどがあるそれぞれこの特定の波長では固体レーザーより効率良く高出力の光源として利用できる
- 色素レーザー様々な色素による波長選択性がある

	Yb:YAG	Ti:Sapphire	Nd:YAG
中心波長	1030nm	780nm	1064nm
発振帯域幅	5nm	230nm	0.45nm
最小パルス幅	310fs	4fs	3.7ps
励起波長	941nm	500nm	808nm
量子欠損	9%	36%	24%
上位準位寿命	951μs	3.2μs	230μs
添加量	~100%	~0.1%	~1%

図 19 最も代表的な固体レーザー媒質

るが、近年は安定性の面などから固体レーザーの非線形媒質による OPO などに置換されてきている。

固体レーザー媒質の最も代表的な物としては、図 19 がある。

もちろん他にも様々な特徴を持つ興味深いレーザー媒質は他にも色々存在するが、結局のところ、あまり普及していない。その理由としては、YAG または Sapphire が単結晶成長で最も安定に高品質な物が得られ、さらに Yb:YAG や Nd:YAG は十分に長い蛍光寿命がある。

さらに近年の固体レーザーは半導体レーザーダイオード励起であり、高出力が得やすいのが InGaAs による 900nm 付近であるため、この波長帯で励起できる固体レーザーが Yb:YAG や Nd:YAG だからである。

例えば Yb 系の他の材質として、図 20 のように様々な物があり、帯域の面で有利な結晶も多数あるが、往々にして熱伝導率が悪かったり、結晶の品質が悪かったりと、Yb:YAG 程は普及していない

一方 Sapphire は結晶の品質や熱伝導率などの面から超高出力を得るには最良の母材であるはずだが、強固な結晶構造のため Nd などのドーパが非常に難しく、研究レベルで成功した例はあるが量産できる状況にはなっていない。また Ti ドープでは帯域は非常に広いものの、蛍光寿命が短く、直接半導体励起では難しいそこで、YAG レーザーの倍波である 500nm 付近のレーザーが、Ti:Sapphire レーザーの吸収波長となり、YAG レーザー励起が一般的となった。これにより 600-1000nm 程度の波長域については Ti:Sapphire レーザーでカバーできる。

さらに短波長側は非線形媒質による倍波や 3 倍波、

Yb Base material	Stimulated emission cross section [10-20cm <sup>2</sup> ]	Fluorescence lifetime [ms]	Thermal conductivity [W/mK]	Fluorescence spectral width [nm]	Fourier minimum [fs]	Experimental records	
						Pulse width [fs]	Average power [W]
YAG	2	0.95	11	9	120	340	0.11
						136	0.003
						730	16
						810	60
KYW	3	0.7	3.3	24	50	71	0.12
KGW	3	0.7	3.3	25	47	112	0.2
						176	1.1
glass	0.63	2	-	35	33	36	0.065
GdCOB	0.35	2.7	2.1	44	27	89	0.04
BOYS	0.2	2.5	1.8	60	19	69	0.08
						86	0.3
YVO4	-	1.2	-	-	-	61	0.054
CaCdAlO4	0.55	-	6.9	-	-	47	0.038

図 20 Yb 系の様々なレーザー媒質のパラメーター

4 倍波生成によって 200nm 付近まではカバーでき、また長波長側も非線形媒質による差周波や OPO などによりカバーできるため、電力効率が数 % 程度で良ければ、これらの媒質と非線形媒質の組み合わせで比較的どのような波長でも生成できる事になる。

ただし効率としては

- 半導体レーザーダイオード (40%) パルス幅 250-1000  $\mu$ s / 10 kW など
- YAG レーザー (30%) パルス幅 1-10ns / 100-1000 MW
- SHG (60 %)
- Ti:Sapphire (50 %) パルス幅 10- fs / 10-100 TW
- OPO / DFG / SHG など (50 %)

などとなり、総合効率では 2 % 程度とかなり低いが、波長やパルス幅の可変性など汎用性は非常に高い。

Nd:YAG は 4 準位レーザーであり、発振の下準位が 100ps のオーダーで基底準位に落ちるため下準位に残らないため吸収が起きない。このような 4 準位レーザーの固体レーザーの小信号増幅率は以下のように書ける

$$E_{pump} = \frac{P_{pump}}{A} T_{pulse} \left( 1 - e^{-\frac{T_{pulse}}{\tau}} \right) \quad (174)$$

$$\eta_{pump} \eta_{quantum} \quad (174)$$

$$E_s = \frac{h\nu_e}{\sigma_e} : \text{Saturation fluence.} \quad (175)$$

$$\frac{dE_{pump}}{dz} = \alpha E_{pump} e^{-\alpha z} \quad (176)$$

$$N_2 = \frac{dE_{pump}}{dz} / h\nu_{pump}, \quad N_s = \frac{1}{\sigma_e} \quad (177)$$

$$g = \sigma_e N_2 + \sigma_a N_1$$

$$= \frac{\sigma_e \alpha e^{-\alpha z} P_{pump} T_{pulse} \left( 1 - e^{-\frac{T_{pulse}}{\tau}} \right)}{h\nu_{pump} A} \quad (178)$$

$$\eta_{pump} \eta_{quantum} \quad (178)$$

$$g_L = \int_0^L \sigma_e N_2 dz = \frac{E_{pump} / h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{E_s / h\nu_e}$$

$$= \frac{N_p}{N_s} \quad (179)$$

$$\text{small signal gain} : G = e^{g_L}, \quad G_0 = e^{\frac{N_p}{N_s}} \quad (180)$$

さらに飽和フルエンスに近くなると、増幅は Frantz Nodvik の方程式で表される

$$e^{E_1/E_s} - 1 = \left( e^{E_0/E_s} - 1 \right) G_0 \quad (181)$$

これから 4 準位レーザーの固体レーザーの増幅効率は

$$\eta_{amp} = \frac{E_1 - E_0}{E_{pump}}$$

$$= \frac{E_s (\log(x_0 G_0 + 1) - \log(x_0 + 1))}{E_{pump}} \quad (182)$$

$$\rightarrow \quad (183)$$

$$\eta_{max} (x_0 \gg 1)$$

$$= \frac{E_s \log(G_0)}{E_{pump}} = \frac{1/h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{1/h\nu_e}$$

$$= \eta_{stokes} (1 - e^{-\alpha L}) \quad (184)$$

$$q = \frac{E_{pump}}{E_s}, \quad (185)$$

$$g_L = \frac{E_{pump}/h\nu_{pump} (1 - e^{-\alpha L})}{E_s/h\nu_e} = q\eta_{max} \quad (186)$$

$$G_0 = e^{q\eta_{max}} \quad (187)$$

$$\eta = \frac{E_1 - E_0}{E_{pump}}$$

$$= \frac{\log(x_1 + 1) - \log(x_1 e^{-q\eta_{max}} + 1)}{q} \quad (188)$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{e^{E_n/E_s} - 1}{e^{E_{n-1}/E_s} - 1} = G_0$$

$$\rightarrow \frac{x_n}{x_0} = G_0^n = e^{nq\eta_{max}} \quad (189)$$

$$\eta_{total} = \frac{E_n - E_0}{nE_{pump}} \quad (190)$$

$$= \frac{\log(x_n + 1) - \log(x_0 + 1)}{nq} \quad (191)$$

$$= \eta_{max} \frac{\log(x_n + 1) - \log(x_0 + 1)}{\log(x_n) - \log(x_0)}$$

$$= \eta_{max} \eta_{amp} \quad (192)$$

Yb:YAG のような 3 準位レーザーでは吸収があるため、励起密度を高くしないと増幅率が 1 を越えない。しかし近年の半導体レーザーの高出力化により比較的簡単に高密度の励起が可能となった

また近年ではファイバーレーザーも平均出力が半導体レーザー励起で非常に高い効率を得られるようになり注目されている。ただしファイバーレーザーでは大口径の物でも mJ レベルが限界である

## 1.5 分散とチャープパルス増幅

チャープパルス増幅 (Chirped Pulse Amplification : CPA) は飛躍的にレーザーの尖頭出力を TW 以上に伸ばす事に成功した。これはモードロックレーザーからの超広帯域・超短パルスのレーザーを

そのまま増幅のは、結晶が破壊閾値を越えてしまう上、媒質の分散や非線形性で限界がある。

そこでグレーティングなどの分散性デバイスを利用して、超短パルスを波長依存の時間遅延させ、パルス幅を広げた後、圧縮する事で、非常に高い尖頭出力を得る事ができるようになった。

### 1.5.1 分散

モードロックの所でも述べたが、電界は以下のようなフーリエ変換の関係があり、

$$E(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (193)$$

周波数分布をガウシアンであると過程すると、

$$f(\omega) = \exp[-a(\omega - \omega_0)^2 + i\phi(\omega)]$$

$$= \exp[-a(\omega - \omega_0)^2$$

$$+ i\beta_0 + i\beta_1(\omega - \omega_0)$$

$$+ i\frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots] \quad (194)$$

これを

$$\beta_1 \neq 0, \beta_0 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0, \quad (195)$$

の条件で考えると

$$E(t)$$

$$= A e^{i\omega_0 t} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a\omega^2 + i\beta_1\omega + i\omega t] d\omega \quad (196)$$

$$= A e^{i\omega_0 t} \times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a(\omega - \frac{i(t + \beta_1)}{2a})^2$$

$$- \frac{(t + \beta_1)^2}{4a}] d\omega \quad (197)$$

$$= A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \times$$

$$\exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4a} + i\omega_0 t] \quad (198)$$

これはパルス幅だと

$$I(t) = E(t)^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{8a \ln 2} \quad (199)$$

となる。これが最短に圧縮されたフーリエ限界と

呼ばれるパルス幅である。

一方2次の分散のある以下の条件で考える

$$\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_0 = \beta_3 = \beta_4 = \dots = 0, \quad (200)$$

すると時間方向の電界分布は以下ようになる

$$E(t) = Ae^{i\omega_0 t} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-a\omega^2 + i\beta_1\omega + i\frac{\beta_2}{2}\omega^2 + i\omega t]d\omega \quad (201)$$

$$= Ae^{i\omega_0 t} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(a - i\frac{\beta_2}{2})\omega^2 + i\{\omega - \frac{i(t + \beta_1)}{2(a - i\frac{\beta_2}{2})}\}^2 - \frac{(t + \beta_1)^2}{4(a - i\frac{\beta_2}{2})}]d\omega \quad (202)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4(a - i\frac{\beta_2}{2})} + i\omega_0 t] \quad (203)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{(t + \beta_1)^2}{4(a + i\frac{\beta_2}{2})} \cdot \frac{(a - i\frac{\beta_2}{2})}{(a - i\frac{\beta_2}{2})} + i\omega_0 t] \quad (204)$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{(-a + i\frac{\beta_2}{2})}} \times \exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)} + i\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + i\omega_0 t] \quad (205)$$

$$= A' \exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)}] \times \exp[i\{\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 t\}] \quad (206)$$

$$(207)$$

この第一項はパルス幅、2項目は周波数分布である。

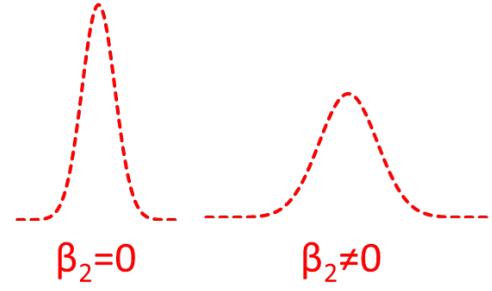


図21  $\beta_2$ が0でない時のパルス幅

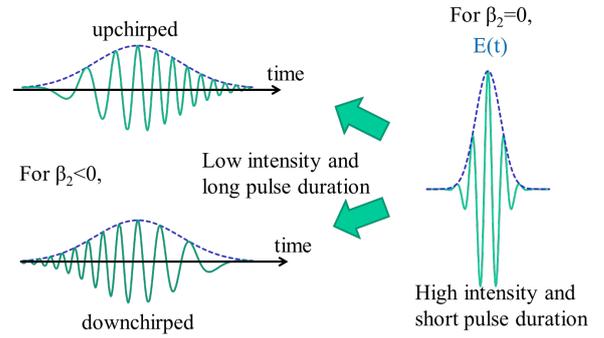


図22  $\beta_2$ の極性によるチャープパルス

パルス幅の項は

$$\exp[-\frac{a(t + \beta_1)^2}{(4a^2 + \beta_2^2)}] \quad (208)$$

であり、これを図示すると周波数の項は

$$\exp[i\{\frac{\beta_2(t + \beta_1)^2}{2(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 t\}] \quad (209)$$

であり、位相の時間的な変化量は以下となる

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\beta_2(t + \beta_1)}{(4a^2 + \beta_2^2)} + \omega_0 = \omega_0 \quad (210)$$

従って分散性の媒質で  $\beta_2$  が正の時と負の時それぞれ図22のようなパルス波形になる事が分かる

この正負の2次分散を使って超高尖頭出力を得る方法が、チャープパルス増幅であり、以下のような構成となっている

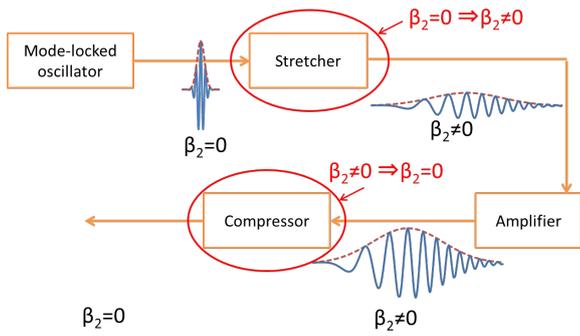


図 23 チャープパルス増幅

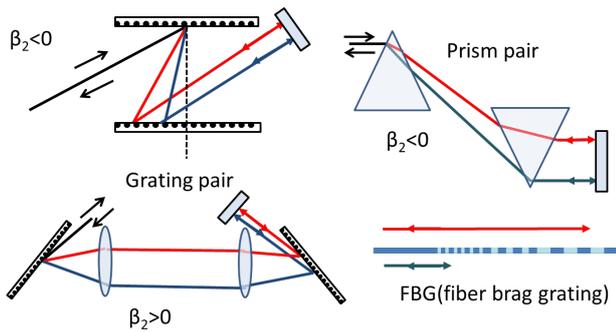


図 24 Enter Caption

このような分散を得る方法として用いられているのがグレーティングペアやプリズムペア、ブラッグ反射グレーティングなどであり、これらの光路長の波長依存を  $P(\lambda)$  とおくと、2次の分散は以下のように表せる

$$\beta_2 = \frac{d^2\phi}{d\omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c} \cdot \frac{d^2P(\lambda)}{d\lambda^2} \quad (211)$$

## 2 非線形光学素子

### 2.1 非線形光学素子

ミリ波～THz 帯の生成に関しても、現時点では QPM による方法が最も有望であると考えられる。

これまでこのような非線形光学素子の高効率化の研究が進められてきた。非線形光学素子により可能なのは

- 第 2 高調波発生 (Second Harmonic Generation : SHG) 周波数  $\omega$  の入力光から周波数  $2\omega$  の第 2 高調波光を発生

- 和周波発生 (Sum Frequency Generation : SFG) 周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の 2 つの入力光から、和の周波数  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  を持つ和周波光を発生
- 差周波発生 (Difference Frequency Generation : DFG) 周波数  $\omega_1$  と  $\omega_3$  の 2 つの入力光から、差の周波数  $\omega_2 = |\omega_3 - \omega_1|$  を持つ差周波光を発生
- 光パラメトリック増幅/発振 (Optical Parametric Amplification/Oscillation : OPA / OPO) 周波数  $\omega_3$  の光で励起して周波数  $\omega_1$  の光を増幅/発振 ( $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$  の光も発生)

### 2.2 擬位相整合 (quasi-phase matching: QPM)

分極反転グレーティングは、波長変換に関する入出力光波間の位相整合を達成する方法の一つである。擬位相整合 (Quasi-Phase Matching : QPM) のため、材料の非線形係数の符号を周期的に反転させた構造である [6]。非線形材料中を光波が伝搬すると、伝搬経路の各点で入力光とは異なる周波数を持つ非線形分極波が生じ、これを波源とした新たな光波が出力光として得られる。この出力光を効率よく生成するには、伝搬経路各点で生じる光波を同位相で累積する必要がある、この条件は位相整合条件と呼ばれる。例えば角周波数  $\omega$  の入力光から角周波数  $2\omega$  の出力光を発生する SHG では、位相整合条件は入力および出力光の伝搬定数  $\beta^\omega, \beta^{2\omega}$  を用いて以下のように書ける。

$$\beta^{2\omega} - 2\beta^\omega = 0 \quad (212)$$

この条件を、各光波が導波路中で感じる屈折率である実効屈折率  $N^\omega, N^{2\omega}$  を用いて書き直すと次のようになる。

$$N^{2\omega} - N^\omega = 0 \quad (213)$$

一般に、媒質の屈折率は波長により異なるので式 (213) は通常成立しない。この位相整合を実現する方法として、媒質の複屈折性を利用する方法 [?, ?] やモード分散を利用する方法 [?] などが検討されてきた。QPM はこの位相整合を材料分極の周期的反転 (グレーティング) 構造により実現する方法である。QPM 用グレーティングの周期  $\Lambda$  は、式 (214) を満たすように定める。式 (214) をベクトルダイアグラムで表すと図??のようになる。

$$\beta^{2\omega} - 2\beta^\omega - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \quad (214)$$

この QPM には、

- 適用できる材料や偏光に制限が無い
- 材料の透明域の任意波長で、その最大の非線形光学テンソル成分を用いた位相整合を実現できる
- 入力光と出力光をともに導波モードとでき、それらの間のモードプロファイルの重なりを大きくできる
- 出力光が導波モードで得られるため、その集光が容易にできる

という多くの優れた特徴がある。

チャンネル光導波路は、光ファイバと同様に高い励起光パワー密度を長い相互作用長にわたり保つのに適した構造であり、デバイスの小型・高効率動作を可能とする。

非線形光学デバイスにおける高効率動作実現には、光導波路によって高い励起光パワー密度を長い相互作用長にわたり保持すること、分極反転グレーティングによって擬似位相整合を実現することの他に、大きな非線形光学効果を示す材料を用いることが必要である。これまでにデバイス化が検討されてきている主な無機材料としては、LiNbO<sub>3</sub> LiTaO<sub>3</sub> KTiOPO<sub>4</sub> があげられる。この中で LiNbO<sub>3</sub> はデバイス作製技術の検討が進んでおり、また最も大きな非線形効果を示すことから最も有望な基板材料と言える。

### 2.3 QPM の設計

#### 3 第 2 高調波発生

中心角周波数  $\omega$  のパルス励起光 (波長  $\lambda_1$ ) を  $2\omega$  のパルス高調波 (SH) 光 ( $\lambda_2 = \lambda_1/2$ ) に変換する擬似位相整合 (QPM) 第 2 高調波発生 (SHG) を考える。励起光および SH 光の伝搬方向を  $z$ 、時間を  $t$  とすると、励起光と SH 光の複素振幅  $A_1(t, z)$ 、 $A_2(t, z)$  が満たすモード結合方程式は、連続動作の場合の式

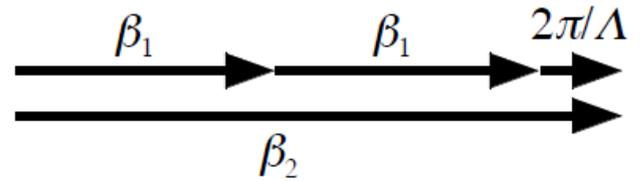


図 25 SHG における擬似位相整合

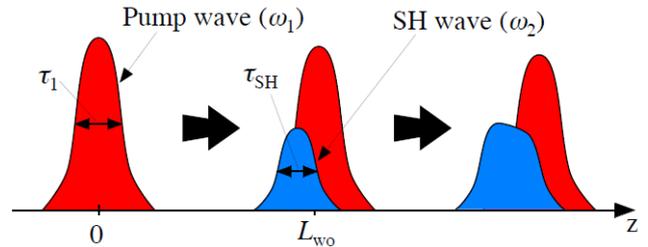


図 26 SHG におけるパルス伝搬およびウォークオフ

に時間依存項を加えた以下の形で表すことができる。

$$\frac{\partial A_1(t, z)}{\partial z} + \beta_1' \frac{\partial A_1(t, z)}{\partial t} - j \frac{\beta_1''}{2} \frac{\partial^2 A_1(t, z)}{\partial t^2} \quad (215)$$

$$= -j \kappa_{SH}^* A_1(t, z) A_2(t, z) e^{-j2\Delta_{SH}z} \quad (216)$$

$$\frac{\partial A_2(t, z)}{\partial z} + \beta_2' \frac{\partial A_2(t, z)}{\partial t} - j \frac{\beta_2''}{2} \frac{\partial^2 A_2(t, z)}{\partial t^2} \quad (217)$$

$$= -j \kappa_{SH} \{A_1(t, z)\}^2 e^{j2\Delta_{SH}z} \quad (218)$$

$$2\Delta_{SH} = \beta_2 - 2\beta_1 - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (219)$$

$$\beta_i' = \left. \frac{\partial \beta_i(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_i} \quad (i = 1, 2) \quad (220)$$

$$\beta_i'' = \left. \frac{\partial^2 \beta_i(\omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_i} \quad (i = 1, 2) \quad (221)$$

$A_1(t, z)$ 、 $A_2(t, z)$  は絶対値の 2 乗がパワーを表すように規格化されている。 $\kappa_{SH}$  は SHG 結合係数、 $\beta_i (i = 1, 2)$  は各光波の伝搬定数である。 $\Delta_{SH}$  は QPM からのずれであり、 $\Lambda$  は QPM 用分極反転グレーティングの周期を表す。図 25 は式 (219) をベクトルダイアグラムで表したものである。以下ではパルス中心周波数において QPM-SHG 条件 ( $\Delta_{SH} = 0$ ) が成立している場合を考える。

励起光および SH 光パルスはそれぞれ異なる群屈折率  $n_{gi}$  を持ち、導波路中を異なる群速度  $v_{gi} = c/n_{gi} = 1/\beta_i'$  ( $c$ : 光速,  $i = 1, 2$ ) で伝搬する。LN では  $\omega_1 < \omega_2$  の場合は  $n_{g1} < n_{g2}$  であり、 $v_{g1} > v_{g2}$  となる。このため図 26 に示すように励起光パルスは

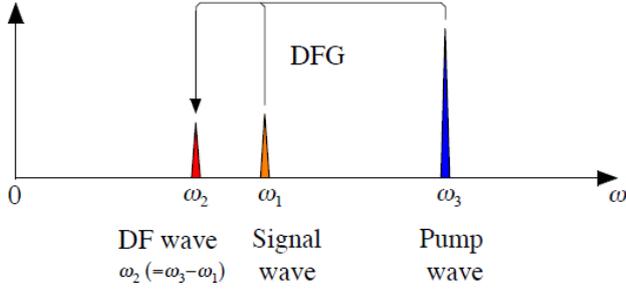


図 27 DFG における周波数スペクトル

SH 光パルスよりも速く伝搬し、両パルス間には次第にずれ（ウォークオフ）が生じるとともに、一定の長さ以上の距離を伝搬すると、SH 光パルス幅は拡大を始める。ここでパルス波長変換特性を評価するためのパラメータとして以下で示すウォークオフ距離  $L_{wo}$  を導入する。

$$L_{wo} = \frac{\tau_1}{\beta'_2 - \beta'_1} = \frac{c\tau_1}{n_{g2} - n_{g1}} \quad (222)$$

この  $L_{wo}$  は、両パルス間の伝搬時間差がちょうど  $\tau_1$  となる伝搬距離であり、 $\lambda_1 = 1.55\mu\text{m}$ 、 $\tau_1 = 1\text{ps}$  では  $L_{wo} = 3.3\text{mm}$  である。

両パルスのパルス中心位置は時間軸上をそれぞれ異なる速度で移動する。そこで時間軸に関して

$$\tau = t - \frac{\beta'_1 + \beta'_2}{2} z \quad (223)$$

$$\hat{A}_i(\tau, z) = A_i(t, z) \quad (i = 1, 2) \quad (224)$$

と変換すれば、両パルスの複素振幅  $\hat{A}_i(\tau, z)$  を時間軸  $\tau$  の原点近傍にとどめることができる。この変換により式 (216)、(218) は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial z} = -\frac{\beta'_1 - \beta'_2}{2} \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \tau} + j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 \hat{A}_1}{\partial \tau^2} - j \kappa_{SH}^* \hat{A}_1^* \hat{A}_2 \quad (225)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial z} = \frac{\beta'_1 - \beta'_2}{2} \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \tau} + j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 \hat{A}_2}{\partial \tau^2} - j \kappa_{SH} \{\hat{A}_1\}^2 \quad (226)$$

#### 4 差周波発生

図 27 に示すように、角周波数  $\omega_1$  の信号光（波長  $\lambda_1$ ）と  $\omega_3 (> \omega_1)$  の励起光（ $\lambda_3$ ）を混合して、2 光波の差の周波数  $\omega_2 (= \omega_3 - \omega_1)$  を持つ差周波（DF）光を発生する QPM 差周波発生（DFG）を考える。こ

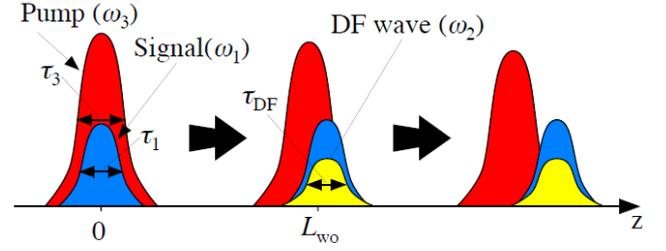


図 28 FG におけるパルス伝搬およびウォークオフ ( $\omega_3 \approx 2\omega_1$ ,  $\tau_1 \approx \tau_3$ )

の DFG では、 $\omega_3 \approx 2\omega_1$  とすれば  $\omega_2 \approx \omega_1$  の DF 光が得られ、同一波長域内での波長変換を行うことができる。このため DFG デバイスは、近年検討されている波長分割多重 (WDM) 方式における波長変換素子などに利用できる。信号光、DF 光、励起光の複素振幅は、以下のモード結合方程式を満たす。

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta'_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} - j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \quad (227)$$

$$= -j \frac{\omega_1}{\omega_3} \kappa_{SF}^* A_2^* A_3 e^{-j2\Delta_{SF}z} \quad (228)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta'_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} - j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} \quad (229)$$

$$= -j \frac{\omega_2}{\omega_3} \kappa_{SF}^* A_1^* A_3 e^{-j2\Delta_{SF}z} \quad (230)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \beta'_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} - j \frac{\beta''_3}{2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} \quad (231)$$

$$= -j \kappa_{SF} A_1 A_2 e^{j2\Delta_{SF}z} \quad (232)$$

$$2\Delta_{SF} = \beta_3 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (233)$$

この DFG における結合係数  $\kappa_{DF}$  と SFG における結合係数  $\kappa_{SF}$  とは、 $\kappa_{DF} = (\omega_2/\omega_3)\kappa_{SF}$  の関係を持ち、特に  $\omega_3 \approx 2\omega_1$  の条件では  $\kappa_{DF} \approx \kappa_{SF}/2$  となる。このとき、信号光と DF 光との群速度差は小さくなるが、この 2 光波と励起光の間にはウォークオフが生じる。このため、信号光パルス幅  $\tau_1$  が励起光パルス幅  $\tau_3$  と近いときは、図 28 に示すように伝搬距離を長くすると励起光と信号光との重なりが失われ、DF 光の増大は飽和する。以下の解析は全て  $\omega_3 \approx 2\omega_1$  の条件下で行っている。

信号光、励起光のパルスピークパワーおよびパルス幅をそれぞれ  $P_{10}$ 、 $P_{30}$ 、 $\tau_1$ 、 $\tau_3$  で表し、ともに  $\text{sech}^2$

型パルスと仮定した。ウォークオフ距離  $L_{\text{wo}}$  は

$$L_{\text{wo}} = \frac{\tau_{\min}}{\beta'_3 - \beta'_i} \quad \tau_{\min} = \begin{cases} \tau_1 & (\tau_1 \leq \tau_3) \\ \tau_3 & (\tau_1 > \tau_3) \end{cases} \quad (234)$$

$$i = \begin{cases} 1 & (\omega_1 < \omega_2) \\ 2 & (\omega_1 > \omega_2) \end{cases}$$

で定義した。

CW 励起光とパルス信号光を用いるパルス DFG では、 $L$  を伸ばすことで高効率動作が実現できる。しかしパルス励起光を用いてパルス信号光を制御する DFG 型光スイッチを実現するためには、SHG や SFG の場合と同様に光波間ウォークオフの影響が顕著とならない  $L = L_{\text{wo}}$  が最適デバイス長となる。

## 5 カスケード第 2 高調波発生/差周波発生

角周波数  $\omega_2$  の光波に対して QPM-SHG 条件を満たす構造中に、 $\omega_2$  の励起光 (波長  $\lambda_2$ ) と  $\omega_1 (\approx \omega_2, \neq \omega_2)$  の信号光 ( $\lambda_1$ ) を入力すると、図??に示すように  $\omega_2$  を  $2\omega_2 (= \omega_3)$  の SH 光に変換する SHG と、 $2\omega_2 - \omega_1 (= \omega_4)$  の DF 光を発生する DFG が同時に実現できる。このカスケード SHG/DFG は、 $\omega_1 \approx \omega_2$  とすれば  $\omega_4 \approx \omega_2$  となり全入出力光が同一波長帯内にある波長変換が可能であり、また励起光による DF 光の光スイッチングが実現できるという特徴を持ち、最近多くの報告例がある [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]。信号光、励起光、SH 光、DF 光の複素振幅  $A_1(t, z) \sim A_4(t, z)$  が満たすモード結合方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta'_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} - j \frac{\beta''_1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \quad (235)$$

$$= -j \frac{\omega_1}{\omega_4} \kappa_{\text{DF}} A_3 A_4^* e^{-j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (236)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta'_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} - j \frac{\beta''_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} \quad (237)$$

$$= -j \kappa_{\text{SH}}^* A_2^* A_3 \quad (238)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \beta'_3 \frac{\partial A_3}{\partial t} - j \frac{\beta''_3}{2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} \quad (239)$$

$$= -j \kappa_{\text{SH}} \{A_2\}^2 - j \frac{\omega_3}{\omega_4} \kappa_{\text{DF}}^* A_1 A_4 e^{j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (240)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial z} + \beta'_4 \frac{\partial A_4}{\partial t} - j \frac{\beta''_4}{2} \frac{\partial^2 A_4}{\partial t^2} \quad (241)$$

$$= -j \kappa_{\text{DF}} A_2 A_3^* e^{-j2\Delta_{\text{DF}}z} \quad (242)$$

$$2\Delta_{\text{DF}} = 2\beta_2 - \beta_1 - \beta_4 \quad (243)$$

$\kappa_{\text{SH}}$  は SHG 結合係数、 $\kappa_{\text{DF}}$  は DFG 結合係数であり  $\omega_1 \approx \omega_2$  では  $\kappa_{\text{SH}} \approx \kappa_{\text{DF}}$  となる。 $\beta_i$  は各光波の伝搬定数である。 $\Delta_{\text{DF}}$  は、QPM-SHG 条件 ( $\beta_3 - 2\beta_2 - 2\pi/\Lambda = 0$ ) が満足されたときの QPM-DFG からのずれを表す。式 (243) をベクトルダイアグラムを用いて表すと図??のようになる。 $\omega_1 \approx \omega_2$  とすれば  $\omega_4 \approx \omega_1$  となり、 $|\Delta_{\text{DF}}L| \ll 1$  とできる。このとき、信号光、励起光および DF 光の間の群速度差は小さく、これら 3 光波と SH 光との間のウォークオフのみが顕著となる。この結果、図??に示すように伝搬距離を長くすると SH 光はパルス幅が拡大するが、DF 光は拡大せずパワーが増大する。以下の解析では全て  $\omega_1 \approx \omega_2$  とした。

信号光、励起光のパルスピークパワーおよびパルス幅をそれぞれ  $P_{10}$ 、 $P_{20}$ 、 $\tau_1$ 、 $\tau_2$  で表し、ともに  $\text{sech}^2$  型パルスを仮定した。 $L_{\text{wo}}$  は

$$L_{\text{wo}} = \frac{\tau_{\min}}{\beta'_3 - \beta'_i} \tau_{\min} = \begin{cases} \tau_1 & (\tau_1 \leq \tau_2) \\ \tau_2 & (\tau_1 > \tau_2) \end{cases} \quad (244)$$

SFG/DFG では DFG と異なり、 $L/L_{\text{wo}} > 1$  でも信号光、励起光および DF 光の間のウォークオフが小さいため、 $L$  を伸ばすことで  $P_{\text{DF}}$  を増大できる。このため、同一パワーの励起光パルスを用い、ある導波型非線形光学デバイスを DFG デバイスとして用いる場合とカスケード SHG/DFG デバイスとして用いる場合を比較すると、 $L/L_{\text{wo}} > 1$  の場合はカスケード SHG/DFG の方が DFG より高い入出力光変換効率を実現することも可能である。

カスケード SHG/DFG では、 $L > L_{wo}$  でも  $L$  を伸ばすことで出力 DF 光のパルス幅を拡大させずにそのパワーを増大できる。カスケード SHG/DFG は入出力光が同一波長帯内にある波長変換動作が可能であり、長尺デバイスを用いることで高効率パルス波長変換が可能であることから超高速光信号処理に有用な方式であると言える。

### 5.1 QPM による DFG の時間発展計算

QPM を用いた DFG の時間発展の方程式は以下の通りであり、これを計算すると DFG の計算が可能である

$$E_{THz}(\Omega, z) = A_{THz}(\Omega, z) e^{-j k(\Omega) z} \quad (245)$$

$$E_{OP}(\omega, z) = A_{OP}(\omega, z) e^{-j k(\omega) z} \quad (246)$$

$$E(\omega) = \frac{E_0 \tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\tau^2(\omega-\omega_0)^2}{4}} \quad (247)$$

$$\begin{aligned} P_{NL}(\Omega) &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \int_0^\infty E_{OP}(\omega + \Omega) E_{OP}^*(\omega) d\omega \\ &= \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2 \tau}{2} \end{aligned} \quad (248)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_{THz}(\Omega, z)}{dz} &= -\frac{\alpha}{2} A_{THz}(\Omega, z) \\ &\quad - \frac{i\mu_0 \Omega c}{2n_{THz}} e^{i(k(\Omega) + \Delta k)z} P_{NL}(\Omega) \end{aligned} \quad (249)$$

$$\Delta k = k(\Omega) + k(\omega) - k(\omega + \Omega) - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (250)$$

$$= \frac{\Omega}{c} (n_{THz} - n) - \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (251)$$

$$\Delta k = k(\omega - \Omega) - k(\Omega) + \frac{2\pi}{\Lambda} - k(\omega) \quad (252)$$

$$\Delta k : k - \text{vectormismatch} \quad (253)$$

$$k(\omega + \Omega) - k(\omega) = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Omega \quad (254)$$

$$(255)$$

### 5.2 MgO:PPLN による THz 発生

非線形光学素子による THz 発生の問題は、

- 非線形光学素子の THz 帯での吸収
- 位相整合角の励起光と信号光 (THz) での乖離
- マンレーロー限界による効率の低さ

が挙げられる。非線形光学定数の大きいニオブ酸

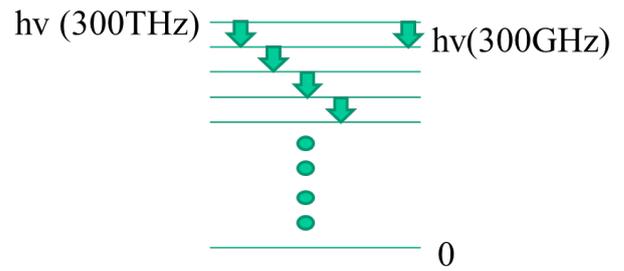


図 29 差周波での光子エネルギーの比較

リチウム (LN) は常温では THz 帯の吸収が大きいですが、冷却する事で透過率が上がるため、冷凍機などの装置が必要になる。

また THz 帯では信号光と励起光の乖離が大きく、従来の非線形素子を用いた方式では横長の THz ができてしまいシングルモードのビームにならなかった。しかし分極反転構造 (Periodic Poled LN:PPLN) とする事で、同軸上にシングルモードのビームとして得られるようになった。なお PPLN はフォトリフラクティブ耐性が低いため、MgO をドーピングする事でフォトリフラクティブ耐性を向上させている。

効率に関しては光子エネルギーの差により限界をマンレーロー限界と呼ばれているが、図 ?? のように例えば  $1 \mu\text{m}$  帯のレーザー (300THz) から 300GHz の THz を得るとすると効率は 0.1 % となってしまう、

さらに効率を上げようとする図の左側のようなカスケードが必要となる。カスケードの 1 方式としては、図 30 のようなチャープ&ディレイ方式というのがある。([3])

通常の DFG については KEK でも Yb:YAG レーザーからの 2 波長増幅を用いて実験を行っており、図 ?? のような 2 波長の狭線幅レーザーを用いて、差周波を 300GHz にしたシードレーザーを用いている。

これを図 31 EO モジュレーターで変調し、Yb:Fiber / Yb:YAG の多段の増幅器で増幅した後、冷凍機で冷却した MgO:PPLN で THz への変換を行い THz の出力を得ている。

この波長変換を行っている MgO:PPLN は分子研・理研製の大型の MgO:PPLN ([2]) を用いて行ってお

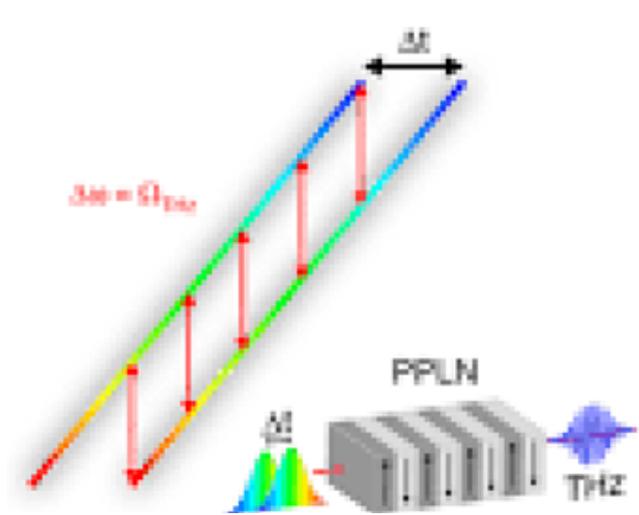


図 30 チャープ&ディレイ方式

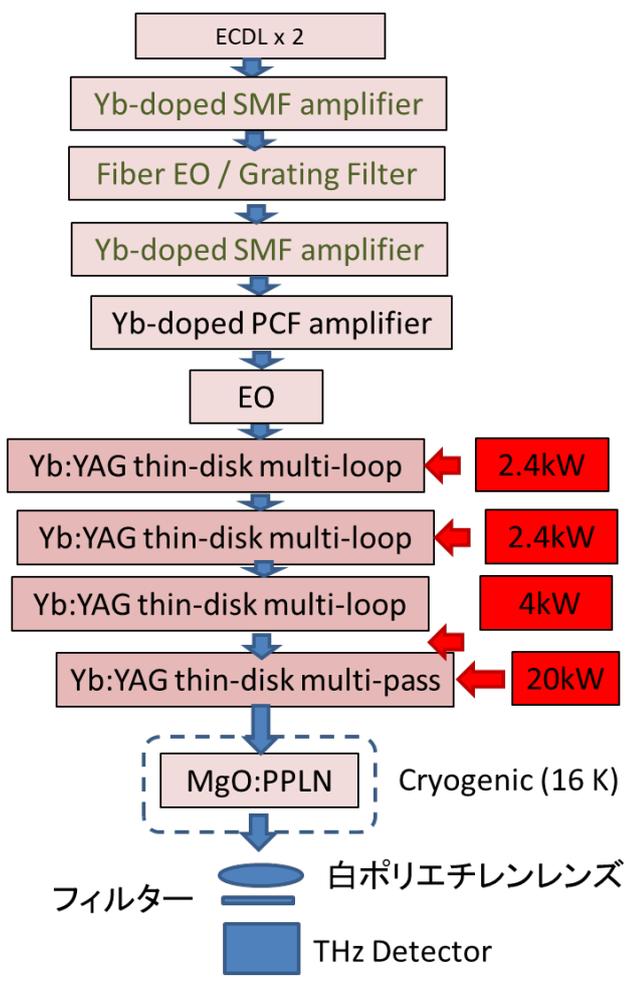


図 31 THz 差周波発生のためのレーザー増幅器

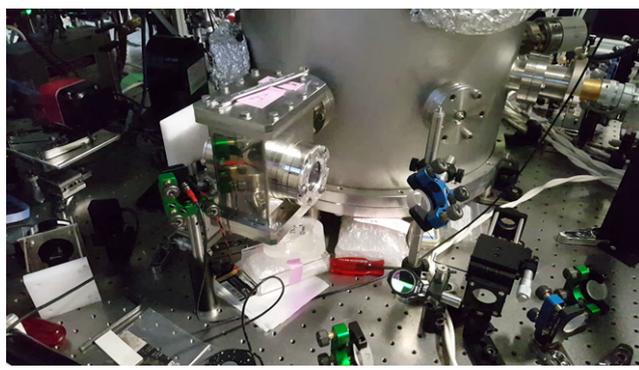


図 32 THz 差周波発生のための MgO:PPLN の冷却チャンバー

り、THz での吸収を減らすため、図 32 の冷却チャンバーで 20K 程度まで冷却を行っている。

### 参考文献

- [1] Alan Matthew Cook. *Generation of narrow-band terahertz coherent Cherenkov radiation in a dielectric wakefield structure*. University of California, Los Angeles, 2009.
- [2] H. Ishizuki and T. Taira. Half-joule output optical-parametric oscillation by using 10-mm-thick periodically poled mg-doped congruent linbo3. *Opt. Express*, Vol. 20, p. 20002, 2012.
- [3] A. L. Calendron H. Cankaya G. Cirimi T. Eichner A. Fallahi M. Fakhari A. Hartin M. Hemmer W. R. Huang H. Ishizuki S. W. Jolly V. Leroux A. R. Maier J. Meier W. Qiao K. Ravi D. N. Schimpf T. Taira X. Wu L. Zapata C. Zapata D. Zhang C. Zhou F. X. Kärtner N. H. Matlis, F. Ahr. Acceleration of electrons in thz driven structures for axisis. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 909, pp. 27–32, 2007.
- [4] Mitsuhiro Yoshida Shingo Mori. Thz deflector using dielectric-lined waveguide for ultra-short bunch measurement in gev scale. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.02854>, 2020.

- [5] H.; Rosenzweig J.B.; Travish G.; Hogan M.; Ischebeck R.; Kirby N.; Siemann R.; Walz D.; Muggli P.; Scott A.; Yoder Thompson, M.C.; Badakov. Ultra-high gradient dielectric wakefield accelerator experiments. *Advanced Accelerator Concepts Workshop*, 2007.
- [6] 石月秀貴. 博士論文. 2001.
- [7] 平松崇英. 修士論文. 2008.