

ラティスと線形光学 -設計と運転への適用-

KEK 加速器研究施設 第6研究系 東 直

目次

1. イントロ
2. 電子の運動
3. *Lattice · Optics* の設計

目次

1. イントロ

2. 電子の運動

3. *Lattice · Optics* の設計

1. イントロ

1.1. “明るい”放射光の獲得を目指して

放射光源加速器としてその性能を評価する場合には、得られる光の波長 (エネルギー)や安定度, 偏光や時分割観察が可能か, など様々あるが, 最も重要なものの1つが, “いかに明るい”である.

明るさを示す性能指数はいくつかあり, 光子数を N としたとき, **輝度 $\mathcal{B}$ (Brightness or Brilliance)**は,

$$\mathcal{B} = \frac{d^6 N}{dx dy dx' dy' dt d\omega / \omega} [\text{photons/sec/mm}^2/\text{mrad}^2/0.1 \text{ \%b.w.}]$$

光束密度 $\mathcal{D}$ (Flux Density)は,

$$\mathcal{D} = \int \int \mathcal{B} dx dy [\text{photons/sec/mrad}^2/0.1 \text{ \%b.w.}],$$

これらを用いれば, **全光束 $\mathcal{F}$ (Flux)**は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int \int \mathcal{D} dx' dy' \\ &= \int \int \int \int \mathcal{B} dx dy dx' dy' [\text{photons/sec}/0.1 \text{ \%b.w.}] \end{aligned} \quad \text{と表すことができる.}$$

1. イントロ

1.1. “明るい”放射光の獲得を目指して

光のビームサイズ σ_r と発散角 $\sigma_{r'}$ には光のエミッタンス ε_r と呼ばれる量を使って.

$$\varepsilon_r = \sigma_r \sigma_{r'} = \frac{\lambda}{4\pi} \text{ という関係が成立している.}$$

さらに放射光源加速器に設置されているアンジュレータと呼ばれる挿入光源では, アンジュレータ長 L と光の波長 λ を用いて,

$$\begin{aligned} \sigma_{r'} &= \sqrt{\frac{\lambda}{2L}} \\ \sigma_r &= \frac{\sqrt{2\lambda L}}{4\pi} \end{aligned} \text{ が成立する.}$$

電子ビームサイズ $\sigma_x, \sigma_x', \sigma_y, \sigma_y'$ との畳み込みを考えると, 電子ビームから放出される光のサイズと発散角は,

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2} \\ \Sigma'_x &= \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{r'}^2} \end{aligned} \text{ となる (y, 垂直方向も同様).}$$

1. イントロ

1.1. “明るい”放射光の獲得を目指して

この実効的なビームサイズを用いると、**実効光束密度** $\mathcal{D}_{\text{eff}}$ は、

$$\mathcal{D}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} = \frac{\sigma_{r'}^2}{\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \left. \frac{d^2\mathcal{F}}{dx'dy'} \right|_{x',y'=0}$$

実効輝度 $\mathcal{B}_{\text{eff}}$ は、

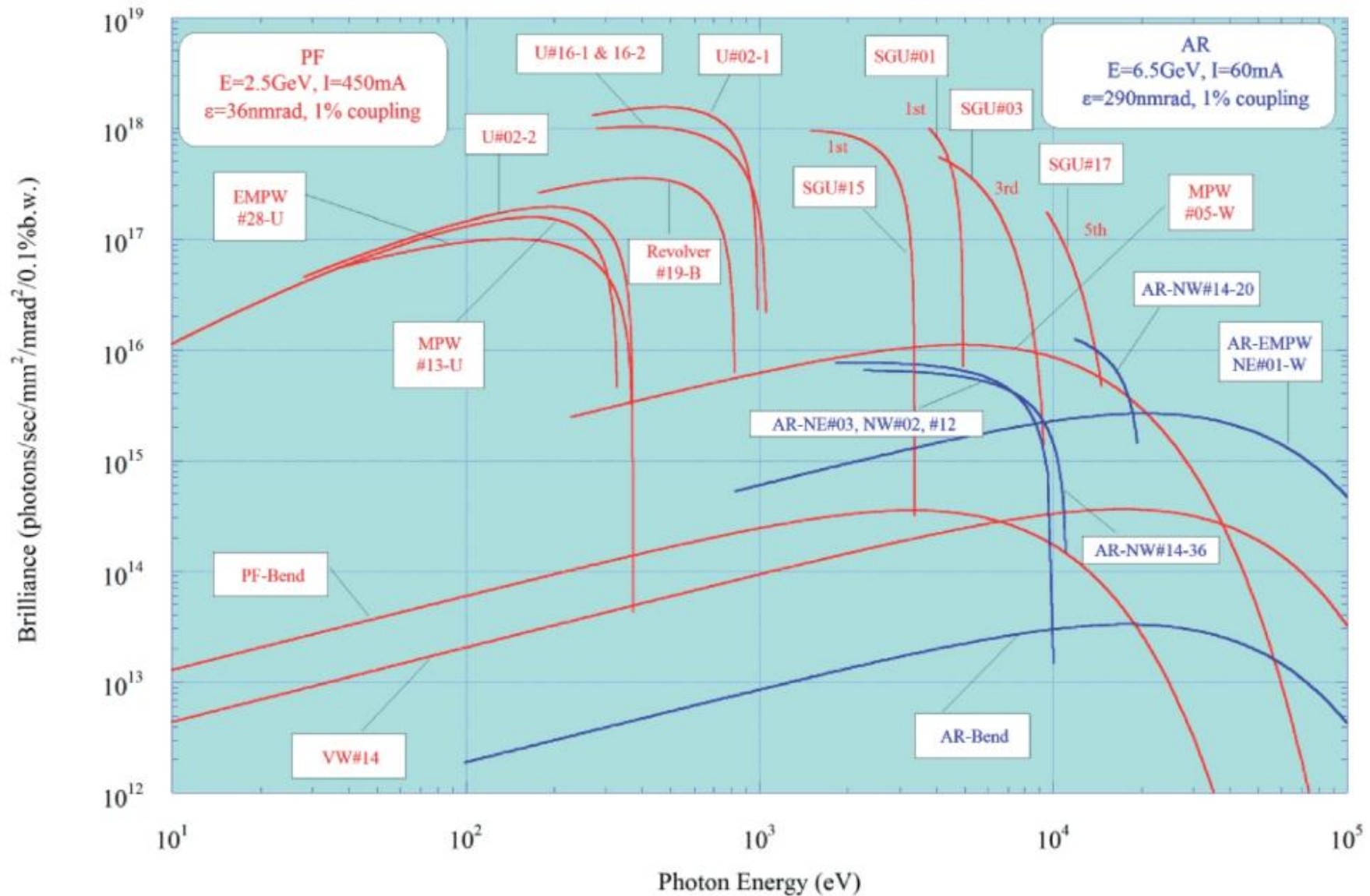
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\text{eff}} &= \frac{\mathcal{D}_{\text{eff}}}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} \\ &= \frac{\sigma_{r'}^2}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \left. \frac{d^2\mathcal{F}}{dx'dy'} \right|_{x',y'=0} \\ &= \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^2\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}}\end{aligned}$$

と書ける.

光を明るくするためには、電子ビームのサイズ及び発散角の抑制が重要.

1. イントロ

1.1. “明るい”放射光の獲得を目指して



目次

1. イントロ
2. 電子の運動
3. *Lattice* ・ *Optics* の設計

目次

1. イントロ

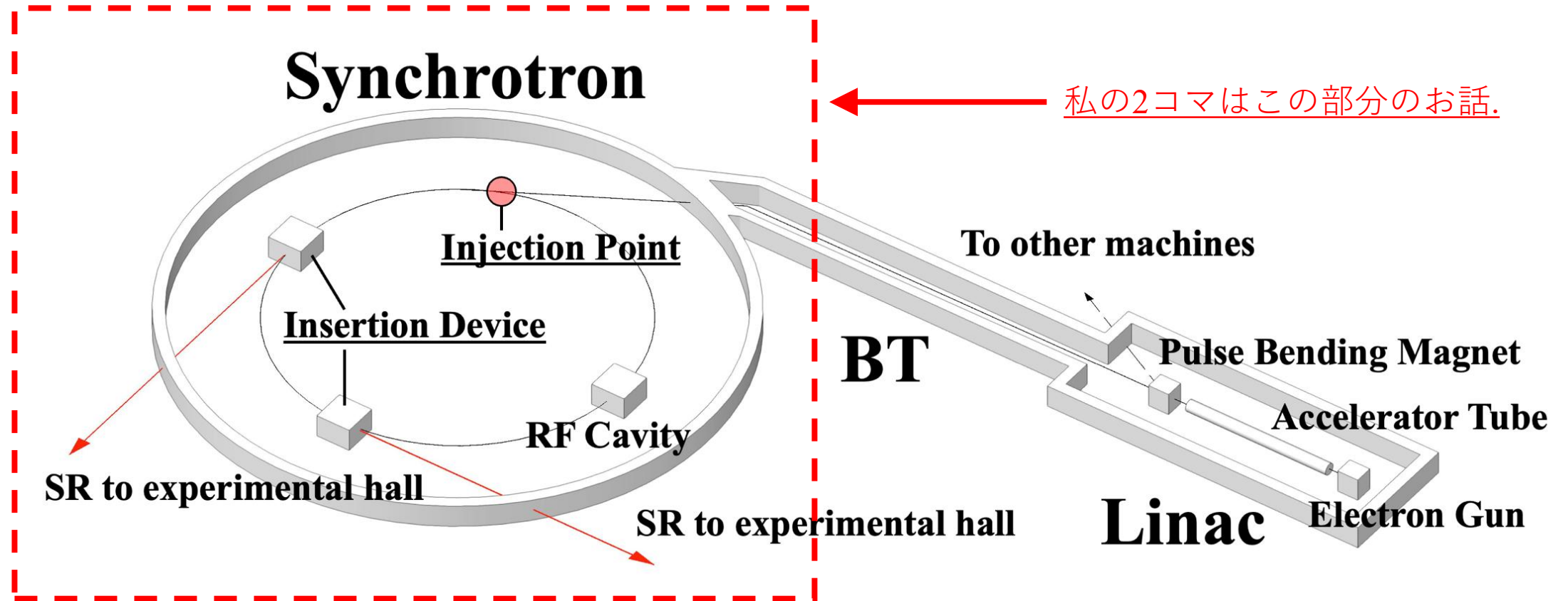
2. 電子の運動

3. *Lattice* ・ *Optics* の設計

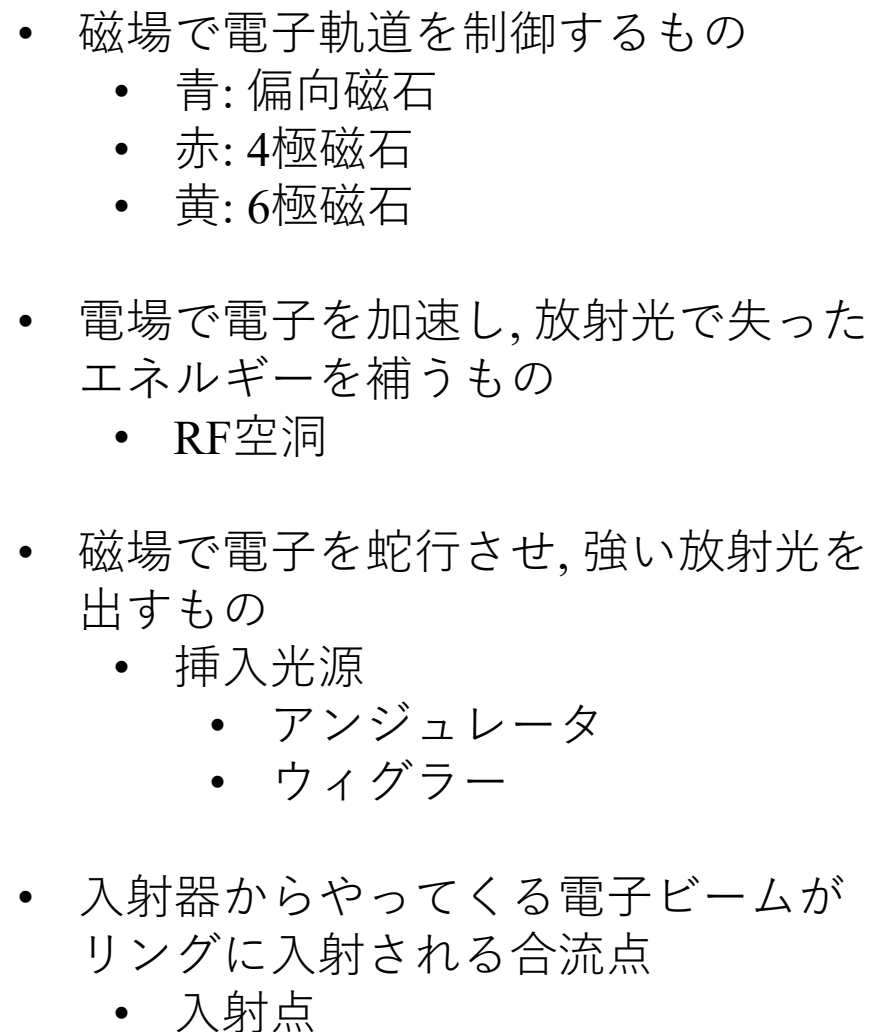
2. 電子の運動

2.1. リング型放射光加速器の機器構成

この後の議論のイメージがしやすくなるように, まずはPF-ring
を例としてリング型放射光加速器の機器構成について示す.

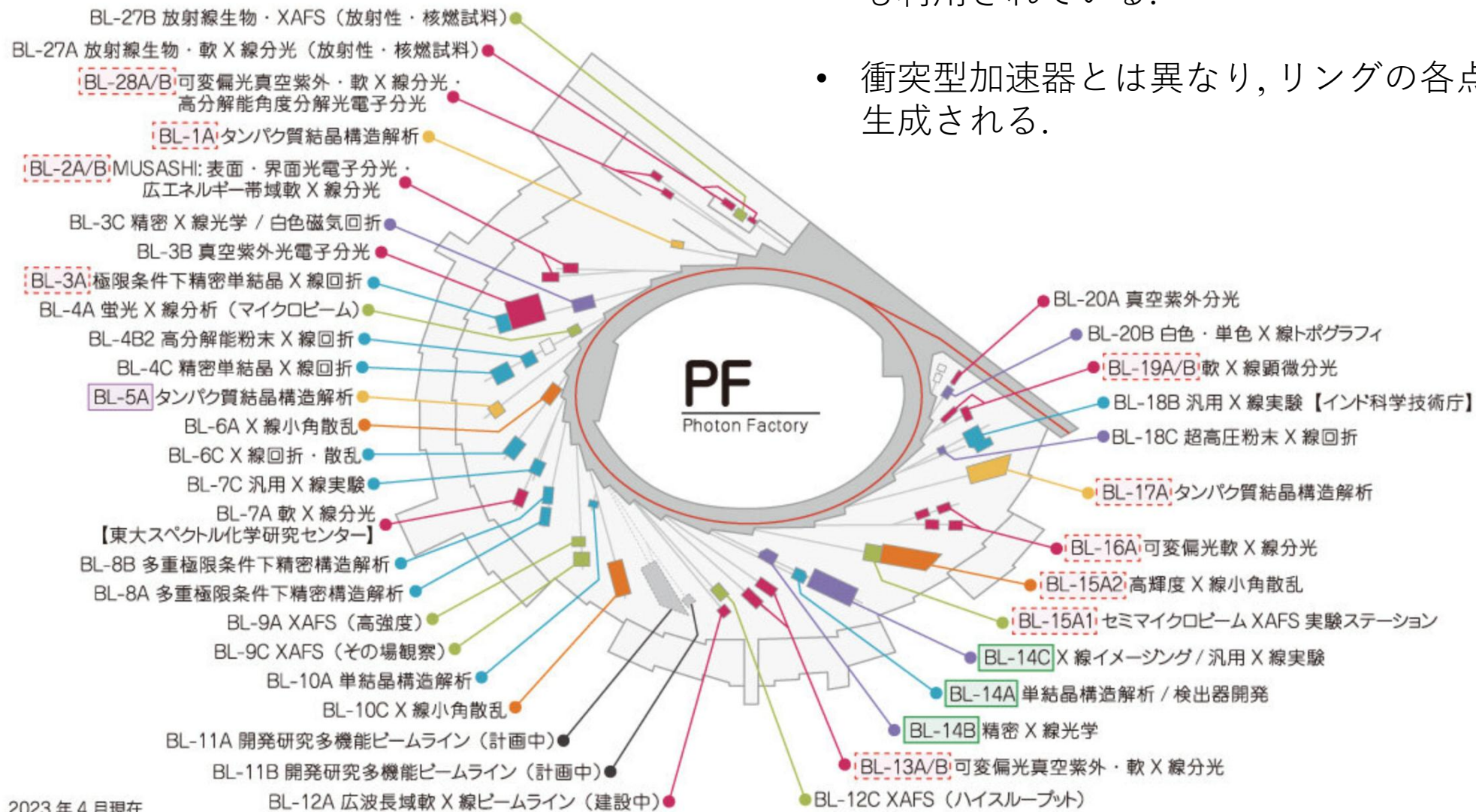


2.1. リング型放射光加速器の機器構成



2. 電子の運動

2.1. リング型放射光加速器の機器構成



2023 年 4 月現在

- 挿入光源だけでなく、偏向磁石で生成される放射光も利用されている。
- 衝突型加速器とは異なり、リングの各点で放射光が生成される。

2. 電子の運動

2.2. 特殊相対論の復習

本講義では特殊相対論の知識があれば十分である.

電子質量: $m_e c^2 \sim 511 \text{ keV}$

ローレンツ因子: $\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_r^2}}$, ここで $\beta_r = \frac{v}{c}$

相対論的運動量: $p = m_e \gamma_r v = m_e \gamma_r c \beta_r$

電子の総エネルギー: $E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} = m_e \gamma_r c^2$

リング型放射光加速器のエネルギーは小さくても数100 MeVであるから,

$$E \sim pc.$$

2. 電子の運動

2.2. 特殊相対論の復習

GeV orderのエネルギーで、電子の速度はどれくらいか推定してみる.

$$E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} = m_e \gamma_r c^2$$

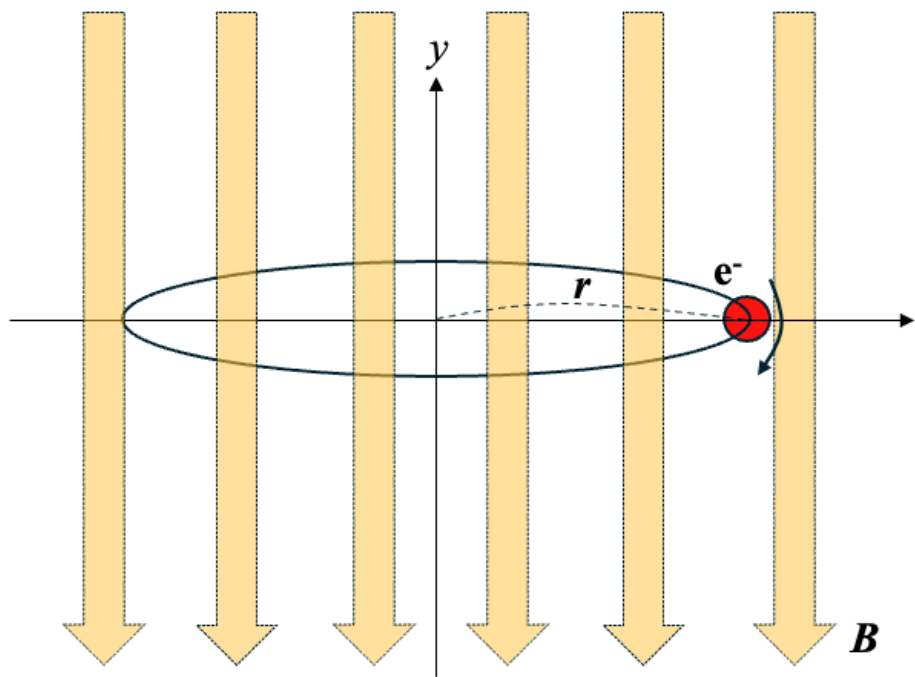


$$\begin{aligned}\beta_r &= \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{E} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{511 \text{keV}}{O(\text{GeV})} \right)^2} \\ &\sim 1\end{aligned}$$

放射光リングを周回している電子の速度は光速と等価と見て、まずは問題ない.

2. 電子の運動

2.3. 偏向磁場と電子の曲率半径



ここでは電子が磁場で曲げられて曲がる様子について説明する.

- 図のような下向き (ここでは垂直を y と取っている)の磁場 B が一様にあるとすると, 電子 (電荷は $-e$)はある半径でぐるぐると回る.
 - 実際には光を出しながらエネルギーを失うが, ここでは無視する.
- 電子の運動方程式は,

$$\frac{dp}{dt} = F,$$
$$m_e \gamma_r \frac{d^2 r}{dt^2} = \underbrace{m_e \gamma_r \frac{v^2}{r}}_{\text{遠心力}} - \underbrace{evB}_{\text{ローレンツ力}}.$$

- ローレンツ力と遠心力が $r = \rho$ という半径でつり合っているとすると,

$$m_e \gamma_r \frac{v^2}{\rho} = evB,$$

$$p = eB\rho.$$

2. 電子の運動

2.3. 偏向磁場と電子の曲率半径

$$p = eB\rho$$

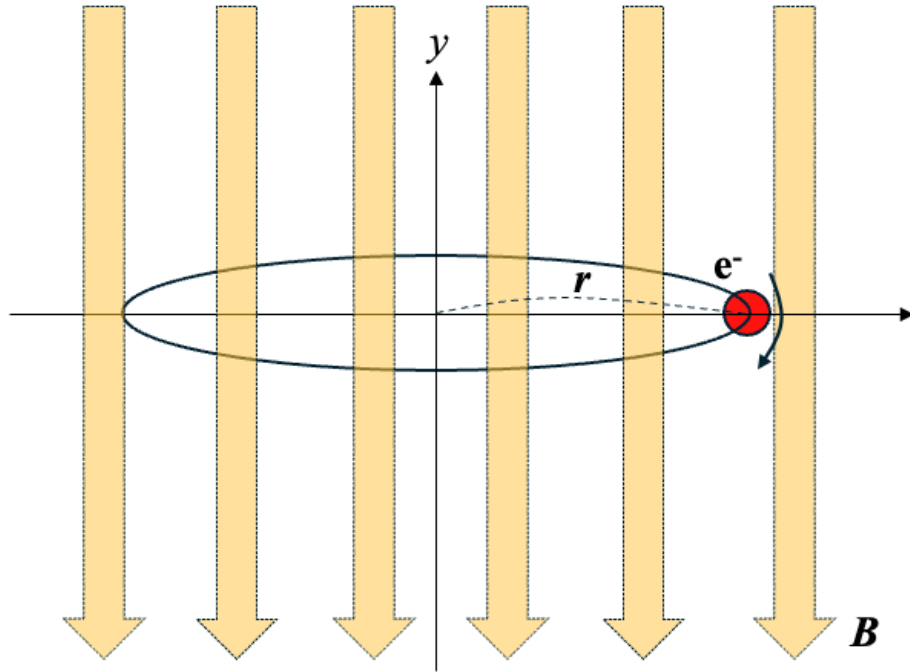
単位を明記すると,

$$p \text{ [kg}\cdot\text{m/s]} = e \text{ [C]} B \text{ [T]} \rho \text{ [m]}$$

特に $p \text{ [GeV/c]}$, $B \text{ [T]}$, $\rho \text{ [m]}$ という単位を採用すると, 電子の場合,

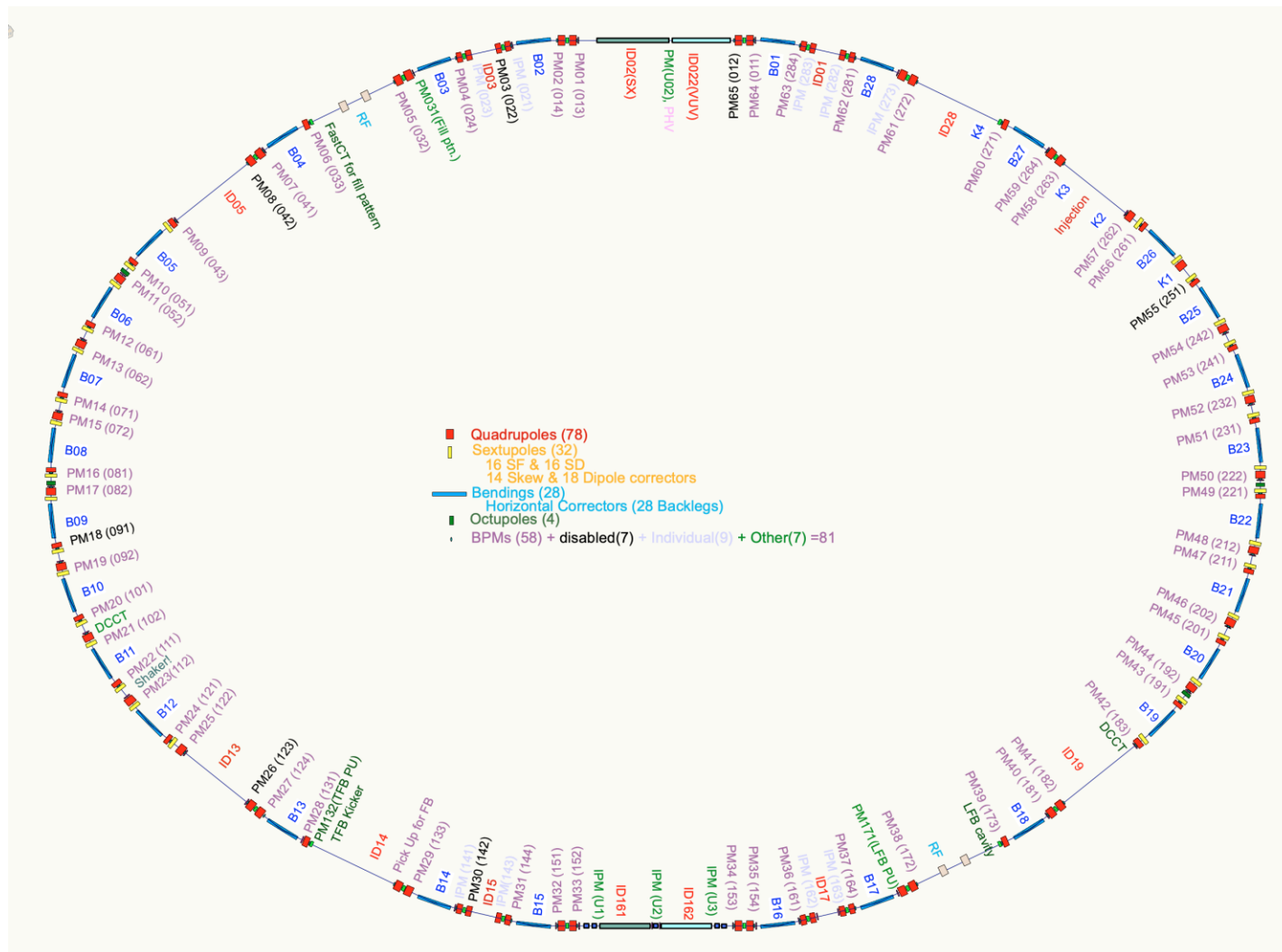
$$p \text{ [GeV]} = 0.3 B \text{ [T]} \rho \text{ [m]}.$$

例えばPF-ringの場合, $p = 2.5 \text{ GeV}$, $B = 1 \text{ T}$ で, $\rho = 8.333... \text{ m}$.



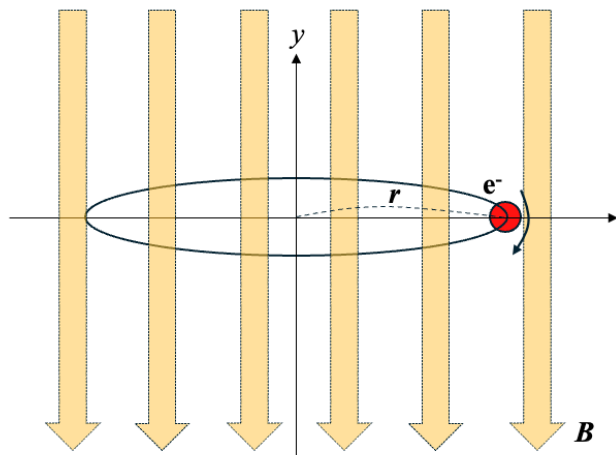
2. 電子の運動

2.3. 偏向磁場と電子の曲率半径



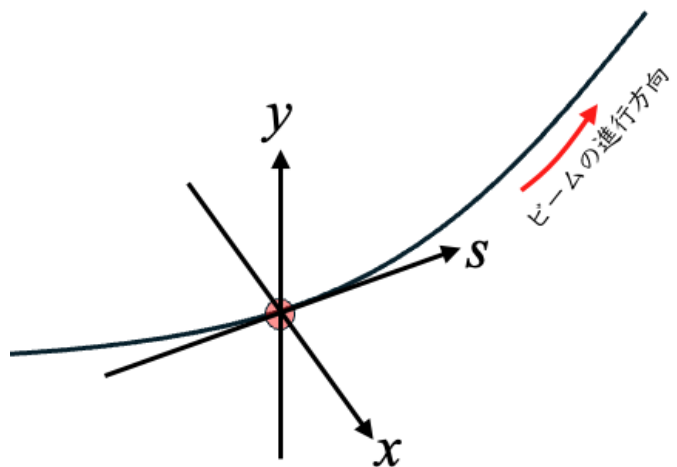
2. 電子の運動

2.4. 座標系



垂直方向: y

動径方向: r



ビームの進行方向: s (縦方向 (longitudinal))

それに直交するような x - y 平面 (横方向 (transverse))

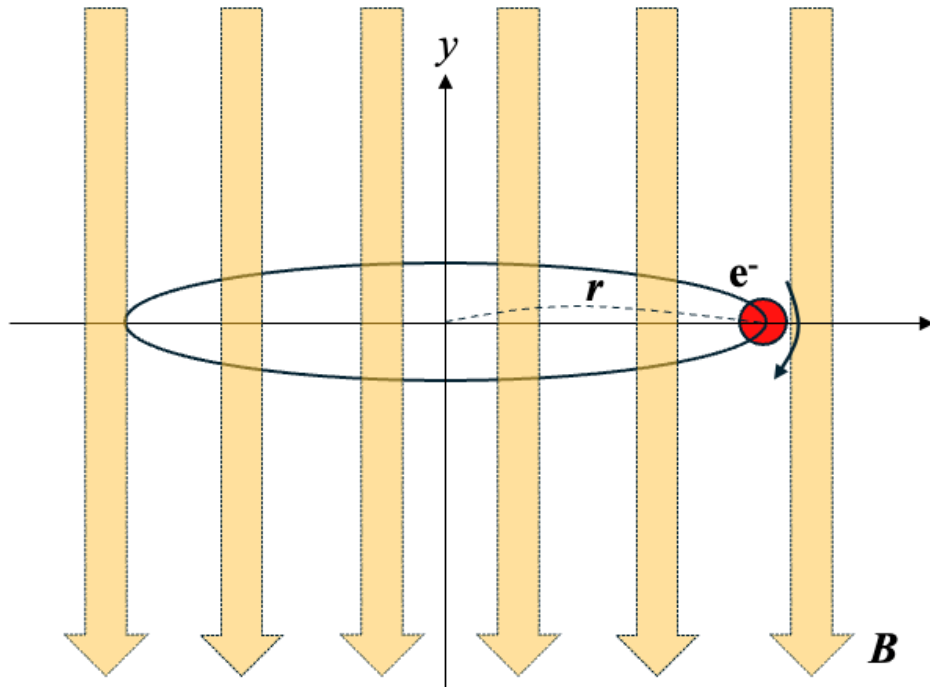
s : 基準エネルギー E_0 (もしくは基準運動量 p_0) を持つ粒子 (ビーム) が基準軌道 (設計軌道) を取るように設定

longitudinal: 時間やエネルギーの振動に関わる

transverse: 磁石による振動に関わる

2. 電子の運動

2.5. 電子の軌道方程式



水平方向 (x方向)の運動だけを考慮 with 偏向磁石



垂直方向 (y方向)も同時に安定して周回させたい



4極磁石の導入

前述の偏向磁場内で周回する電子の式:

2. 電子の運動

2.5. 電子の軌道方程式

$$m_e \gamma_r \frac{d^2 r}{dt^2} = m_e \gamma_r \frac{v^2}{r} - evB.$$

$s = vt = ct$ という変換を行うと, 

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{r} - \frac{eB}{p}$$

と, 時間座標からビーム進行方向の座標に方程式を書き換えられる.

ここで $x \ll \rho$, つまり電子は偏向磁石で決まる軌道半径周辺を微小振動する, という仮定する

$r = \rho + x$ という変換を行うと, 

$$\frac{d^2 x}{ds^2} \sim \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho^2} - \frac{eB}{p}$$

と, r から x の式に置き換えられる.

つまり, 偏向磁石の磁場に追加して4極磁石の磁場成分があるとする,

$B \rightarrow B + ax$ という変換を行うと, 

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = - \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{a}{B\rho} \right) x$$

と, x の斉次2階微分方程式の形に“とりあえず”おさまる.

2. 電子の運動

2.5. 電子の軌道方程式

ここで, 4極磁場の強度 a を基準運動量で規格化し, s 依存性を明示すると,

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \frac{a}{B\rho} \\ &= \frac{ea}{p_0} \end{aligned}$$

つまり, (当たり前だが), 同じ磁場強度でも電子の運動量が高ければ, 電子の運動への寄与はそれに反比例して小さくなる.

$k_1(s)$ を用いて, 垂直方向も合わせて書き下すと,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1(s) \right) x &= 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} - k_1(s)y &= 0 \end{aligned}$$

まとめると,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0$$

2. 電子の運動

2.5. 電子の軌道方程式

ここで, $K(s)$ の s 依存性を一旦無視して,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + k^2 x = 0$$

とすれば, これはよくある調和振動子の式で,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ks & \frac{1}{k} \sin ks \\ -k \sin ks & \cos ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

と解くことができる. ここで, R を仮想的なリングの半径とし, $k = \nu / R$, リング周長 $C = 2\pi R$ とすると,

ν : チューン: 電子がリングを1周する間に振動する回数

s 依存性を復活させても, 調和振動子的な解が得られることが期待される.

2. 電子の運動

2.6. ハミルトニアンと転送行列

$$H_x = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}K_x(s)x^2$$

というハミルトニアンを考えると,

$$X' = S_2 H X$$

が成立し,

先の

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0$$

を再導出できる.

ここで,

$$H = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

カップリング, つまり水平方向と垂直方向の運動が相互に絡まるような効果は, 本講義では無視する

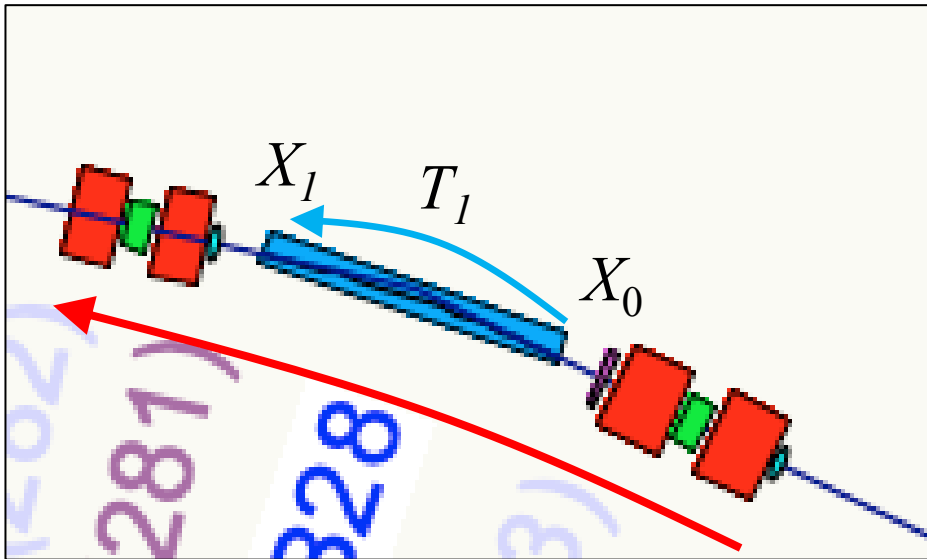
2. 電子の運動

2.6. ハミルトニアンと転送行列

ある区間で $K(s)$ が定数であれば, その中では先の調和振動子のように解くことができ,

$$\begin{aligned} X &= TX_0 \\ &= e^{S_2 H_2} X_0 \end{aligned} \quad \text{が,}$$

$$X' = S_2 H X \quad \text{の解となる.}$$



例えば左図では青い偏向磁石内では,

$$K_x = \frac{1}{\rho^2} \quad \text{が常に成立している.}$$

X_0 から X に位相座標を転送するので, T は**転送行列**と呼ばれる.

2. 電子の運動

2.6. ハミルトニアンと転送行列

$$T = e^{S_2 H_2}$$

展開すると,

$$e^{S_2 H_2} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix}$$

4極磁石 (Focus) の場合

$$K_x = k_1$$

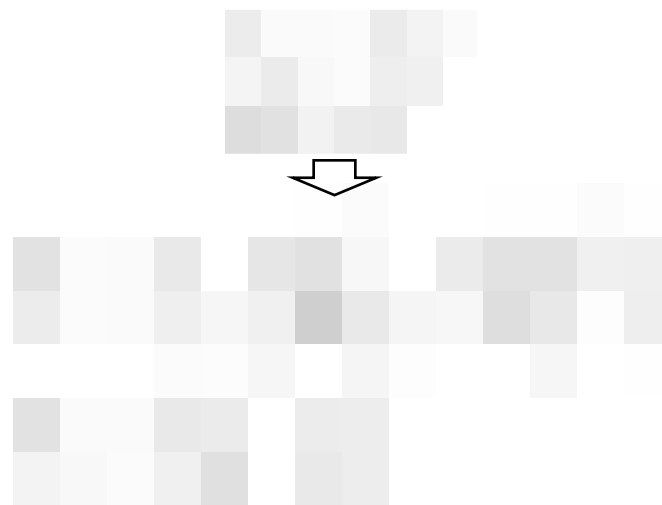
$$K_y = -k_1$$



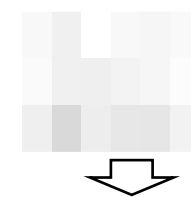
$$T_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_1}s) & \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sin(\sqrt{k_1}s) \\ -\sqrt{k_1} \sin(\sqrt{k_1}s) & \cos(\sqrt{k_1}s) \end{pmatrix}$$
$$T_y = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k_1}s) & \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sinh(\sqrt{k_1}s) \\ -\sqrt{k_1} \sinh(\sqrt{k_1}s) & \cosh(\sqrt{k_1}s) \end{pmatrix}$$

Defocusは T_x と T_y が入れ替わる.

偏向磁石の場合



ドリフトスペース
(何もない空間) の場合



$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T_y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

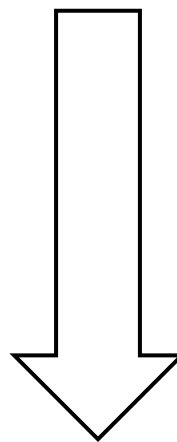
2. 電子の運動

2.6. ハミルトニアンと転送行列

4極磁石 (Focus) の場合

$$T_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_1}s) & \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sin(\sqrt{k_1}s) \\ -\sqrt{k_1} \sin(\sqrt{k_1}s) & \cos(\sqrt{k_1}s) \end{pmatrix}$$

$$T_y = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k_1}s) & \frac{1}{\sqrt{k_1}} \sinh(\sqrt{k_1}s) \\ -\sqrt{k_1} \sinh(\sqrt{k_1}s) & \cosh(\sqrt{k_1}s) \end{pmatrix}$$



thin lens近似

4極磁石の磁極長を L とし、 Lk_1 を維持したまま $L \rightarrow 0$ の極限を考える (つまりfocusing powerの総量は変わらないが、focusing作用がある1点に凝縮されているようなイメージ)

$$T_x|_{L \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k'_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_y|_{L \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k'_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ここで, } k'_1 = Lk_1$$

2. 電子の運動

2.7. シンプレクティック

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

無限小 ε 進めるような転送行列を考える

$$e^{S_2 H_2} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix} \Rightarrow T_\varepsilon = I + S_2 H_x(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -K\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

これを使えば,

$$T_\varepsilon^T S_2 T_\varepsilon = S_2 + O(\varepsilon^2) \quad \text{が成立する.} \quad \overset{\text{等価}}{\longleftrightarrow} \det(T_\varepsilon) = 1$$

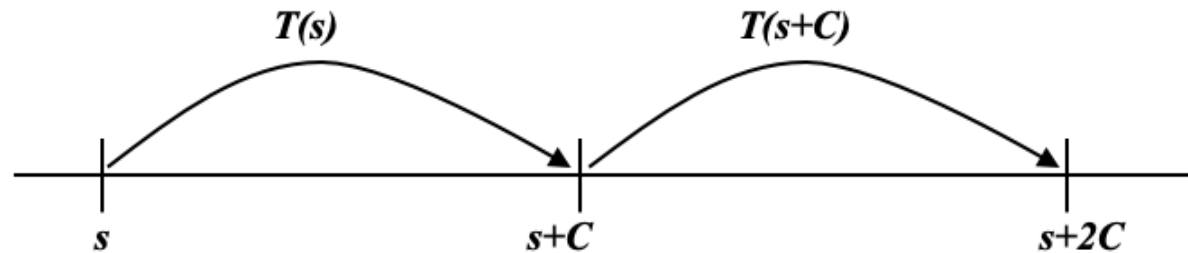
このような性質を持つ行列を“シンプレクティックである”という.

シンプレクティックな行列同士の積もシンプレクティックとなる.

例えば, シンプレクティックな T_1, T_2 から $T = T_2 T_1$ という転送行列について考えるとわかる.

2. 電子の運動

2.8. Twiss Parameters



リングのある点 s からリング1周分の転送行列 $T(s)$ がシンプレクティックであれば、1周後の転送行列 $T(s+C)$ も等価で、シンプレクティックである。

$$T(s) = T(s + C)$$

ここで $T(s)$ を以下のように単位行列とそれ以外の成分に分けた形で置いてみる。

$$T(s) = I \cos(2\pi\nu) + J(s) \sin(2\pi\nu)$$

$$J(s) = \begin{pmatrix} \alpha_T(s) & \beta_T(s) \\ -\gamma_T(s) & -\alpha_T(s) \end{pmatrix}$$

$T(s)$ はシンプレクティックであるから、

$$\beta_T(s)\gamma_T(s) - \alpha_T^2(s) = 1 \quad \text{が成立し、これから、}$$

$$T^n(s) = I \cos(n \cdot 2\pi\nu) + J(s) \sin(n \cdot 2\pi\nu) \quad \text{が導かれる。}$$

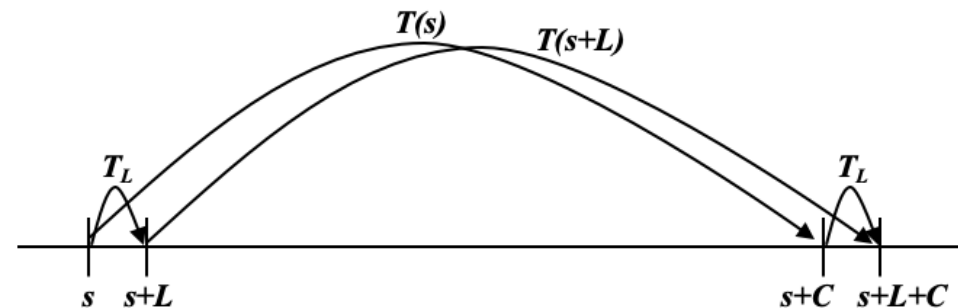
つまり点 s について何周電子を周回させても位相が進むだけで、 $J(s)$ はリングの点 s に固有な値となる。

この $J(s)$ を構成する α, β, γ をTwiss parameterと呼ぶ。

2. 電子の運動

2.8. Twiss Parameters

次に図のような転送行列を考えると, 点 s から点 $s+L+C$ への行き方は2通りあって,



$$T(s+L)T_L = T_L T(s) \Rightarrow T(s+L) = T_L T(s) T_L^{-1}$$

$T_L = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ とすると, 転送行列の I 成分は“透明なので”,

$$\begin{pmatrix} \alpha_T(s+L) & \beta_T(s+L) \\ -\gamma_T(s+L) & -\alpha_T(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_T(s) & \beta_T(s) \\ -\gamma_T(s) & -\alpha_T(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

と変換できる.

書き換えると,

$$\begin{pmatrix} \beta_T \\ \alpha_T \\ \gamma_T \end{pmatrix}_{s+L} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & 1+m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_T \\ \alpha_T \\ \gamma_T \end{pmatrix}_s \quad \text{となる.}$$

Twiss parameterは (x, x') の転送行列要素を使って, 転送することができる.

2. 電子の運動

2.9. ベータトロン振動

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad \Leftarrow \text{Hillの方程式}$$

について、先ほどは一度 s 依存性を無視して調和振動子解になることを見たが、ここでは s 依存性も考慮した解を探る.

ただし、 $K(s)$ はこれまで見たように、リングの要素で決まる値なので、

$$K(s + C) = K(s) \quad \text{という周期性がある.}$$

Floquet の定理 (フロケーの定理)より、

$$f_{1,2}(s) = e^{\pm i \frac{2\pi\nu s}{C}} g_{1,2}(s) \quad \text{が解となる.}$$

ここで、 $g(s)$ は $g(s+C) = g(s)$ の周期性を持つ.

$$T(s) = I \cos(2\pi\nu) + J(s) \sin(2\pi\nu) \quad \text{から来た成分.}$$

2. 電子の運動

2.9. ベータトロン振動

$f_{1,2}(s) = e^{\pm i 2\pi \nu s / C} g_{1,2}(s)$ の $g_{1,2}(s)$ の中身がまだ不定. ここで,

$$g_{1,2}(s) = \omega(s) e^{\pm i \phi(s)} \quad \text{と置くと,}$$

$$f_{1,2}(s) = \omega(s) e^{\pm i \psi(s)}$$

$$\psi(s) = 2\pi \nu \frac{s}{C} + \phi(s) \quad \text{となり, これをHillの方程式に代入すると,}$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0$$

$$\psi' \omega^2 = 1 \quad \text{が導かれる.}$$

2. 電子の運動

2.9. ベータトロン振動

ある点 s において,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = F_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{という解の形を取っている時,}$$

リングの1周先では,

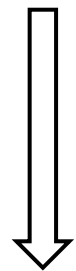
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= T(s)\mathbf{x}_0 \\ &= T(s) \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= F_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{となる, つまり,}$$

$$F_0^{-1}\mathbf{x}_0 = F_1^{-1}\mathbf{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \underline{F_1 F_0^{-1}}\mathbf{x}_0 \text{ が成立する.}$$
$$= T(s)$$

2. 電子の運動

2.9. ベータトロン振動

$$\mathbf{x}_1 = \underline{F_1 F_0^{-1}} \mathbf{x}_0$$



$$f_{1,2}(s) = \omega(s) e^{\pm i\psi(s)}$$

$$\psi(s) = 2\pi\nu \frac{s}{C} + \phi(s) \text{ を代入}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \cos \Delta\psi - \omega\omega' \sin \Delta\psi & \omega^2 \sin \Delta\psi \\ -\frac{1+(\omega\omega')^2}{\omega^2} \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi + \omega\omega' \sin \Delta\psi \end{array} \right)$$



$$T(s) = \left(\begin{array}{cc} \cos(2\pi\nu) + \alpha_T(s) \sin(2\pi\nu) & \beta_T(s) \sin(2\pi\nu) \\ -\gamma_T(s) \sin(2\pi\nu) & \cos(2\pi\nu) - \alpha_T(s) \sin(2\pi\nu) \end{array} \right)$$

各行列成分が等しいとして, 解く.

2. 電子の運動

2.9. ベータトロン振動

$$\omega^2 = \beta_T > 0$$

$$\omega\omega' = -\alpha_T$$

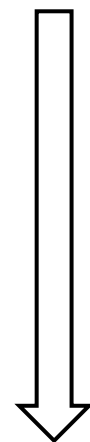
$$\Delta\psi = 2\pi(\nu + \ell)$$



$$\omega = \sqrt{\beta_T}$$

$$\beta'_T = -2\alpha_T$$

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta_T(s')} + \psi_0$$



$$f_{1,2}(s) = \omega(s)e^{\pm i\psi(s)}$$

$$\psi(s) = 2\pi\nu \frac{s}{C} + \phi(s)$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$x(s) = A\sqrt{\beta_T(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0)$$

$$x'(s) = -\frac{A}{\sqrt{\beta_T(s)}} (\alpha_T(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) - \sin(\psi(s) + \psi_0))$$

$$= -A\sqrt{\gamma_T(s)} \sin(\psi(s) + \psi'_0)$$

ここで, $A = a+b$

2. 電子の運動

2.10. クーラン・シュナイダー不変量

$$\begin{aligned} W(s) &= X^T(s) S_2^T J(s) X(s) \\ &= \gamma_T x^2 + 2\alpha_T x x' + \beta_T x'^2 \end{aligned}$$

という量を考えると, 先の,

$$\begin{aligned} x(s) &= A \sqrt{\beta_T(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ x'(s) &= -\frac{A}{\sqrt{\beta_T(s)}} (\alpha_T(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) - \sin(\psi(s) + \psi_0)) \\ &= -A \sqrt{\gamma_T(s)} \sin(\psi(s) + \psi_0') \end{aligned}$$

を代入すれば,

$$W(s) = A^2$$

となり, s 依存性は消える, つまりリングのどの点においても保存される量となる.

W : Courant-Snyder Invariant (クーラン・シュナイダー不変量, 以後CS不変量)

2. 電子の運動

2.11. 誤差を考慮した軌道方程式

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0$$

に対して, 現実には存在するエラー, ゆらぎを組み込んでみる.

運動量のズレ: $p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p$

偏向磁石磁場のズレ: $B \rightarrow B + \Delta B$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{K(s)}{1 + \Delta p/p_0} x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta B}{B}$$

右辺の非斉次項が0のときの解が,
ベータatron振動: x_β .

右辺の運動量誤差に対応する特解を x_ϵ , 誤差磁場に対応する特解を x_{COD} とすると, 一般解は,

$$x = x_\beta + x_\epsilon + x_{COD}$$

COD: Closed Orbit Distortion (閉軌道歪み)という意味で, 誤差磁場がない理想的なリング1周の閉軌道に対し, 誤差磁場の影響で成立した新たな閉軌道のこと.

2. 電子の運動

2.12. 分散

運動量誤差がある場合を考える

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p}$$

ここでは偏向磁石内を考えると,

$K(s) = 1/\rho^2$ であり, 右辺の非斉次項がないとすれば,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0$$

となり,

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho}$$

$$x' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho}$$

と, 斉次解は簡単に求まる.

2. 電子の運動

2.12. 分散

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

の特殊解 x_p は,

$$x_p = \rho \frac{\Delta p}{p} \quad \text{と見つけられれば, 偏向磁石の入口 (} s=0 \text{) で}$$
$$x = x_0, x' = x'_0 \text{ とし,}$$

偏向磁石における運動量誤差を含めた転送行列は,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_0 \quad \text{と求まる.}$$

既存の転送行列成分 **運動量誤差に係る成分**

2. 電子の運動

2.12. 分散

運動量誤差に起因する軌道差を

$$x_{\epsilon} = \eta \frac{\Delta p}{p}$$

$$x_{\epsilon} = \eta' \frac{\Delta p}{p}$$

と置くと, 先の関係は,

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_0$$

と書き換えられる.

- 偏向磁石内で成立する特殊解に対応
- 4極磁石内では非斉次項はないため, ここは0になる.
 - 4極磁石では0から分散を生むことができない.

$\eta(s)$: 分散関数 (Dispersion Function) と呼び, Twiss Parameter と同様に s の変数である.

ビームサイズ σ_x は $\sigma_x = \sqrt{\varepsilon_x \beta_{Tx} + \left(\eta \frac{\Delta p}{p}\right)^2}$ で表すことができる.

2. 電子の運動

2.13. Momentum Compaction Factor

前節で見たように、基準運動量からずれた電子は基準軌道からずれた軌道を新たな閉軌道として周回する。

この運動量差から来る周回軌道長の差 ΔC を、

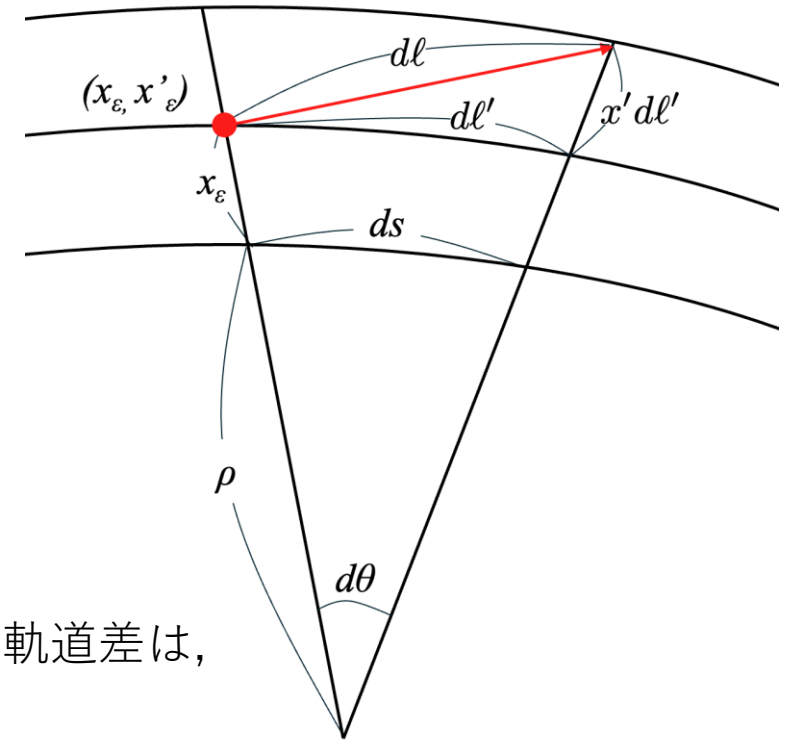
$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_m \frac{\Delta p}{p} \quad \text{と表す.}$$

α_m : Momentum Compaction Factor

運動量 $p = p_0 + \Delta p$ を持った電子が偏向磁石内で取る軌道長 $d\ell$ は、

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{(d\ell')^2 + (x'd\ell')^2} \\ &\sim \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds \end{aligned} \quad \text{となるので、軌道差は,}$$

$$d\ell - ds = \frac{x}{\rho} ds$$



2. 電子の運動

2.13. Momentum Compaction Factor

従って,

$$\begin{aligned}\Delta C &= \oint \frac{x}{\rho} ds \\ &= \frac{\Delta p}{p} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \frac{\Delta C/C}{\Delta p/p} \\ &= \frac{1}{C} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds\end{aligned}$$

と, momentum compaction factorは求められる.

リング周回積分の中身に $1/\rho(s)$ があるため, 一般には偏向磁石のみを考慮すればよい.

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

チューン: リング1周分に対応するベータatron振動の振動数

$$\mu = 2\pi\nu = \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$

運動量差でどれだけチューンがズレるの見積もる.

運動量が $p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p$ ならば, $\Delta p > 0$ であれば, 4極磁場成分は弱くなったように見える, つまり,

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \frac{K}{1 + \Delta p/p} \\ &\sim K - K \frac{\Delta p}{p} \end{aligned} \quad \text{と, 余剰な4極磁場成分,}$$

$$\Delta K = -K \frac{\Delta p}{p} \quad \text{が現れる.}$$

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

ある点で余剰な4極磁場成分が現れたとき, 新たな転送行列 T' はもとの転送行列 T_0 とthin lens近似の4極磁場転送行列 T_k を使って,

$$T' = T_k T_0 \text{ と表せ,}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_T \sin \mu & \beta_T \sin \mu \\ -\gamma_T \sin \mu & \cos \mu - \alpha_T \sin \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_{T0} \sin \mu_0 & \beta_{T0} \sin \mu_0 \\ -\gamma_{T0} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_{T0} \sin \mu_0 \end{pmatrix}$$

となる. T の固有方程式を適用すると,

$$\begin{aligned} \cos \mu &= \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(2 \cos \mu_0 - k \beta_{T0} \sin \mu_0) \end{aligned}$$

となる.

チューンの変化量 $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ は小さいとして, $\Delta\mu$ の一次までを取ると,

$$\Delta\nu = \frac{k\beta_{T0}}{4\pi}$$

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

$$\Delta\nu = \frac{k\beta_{T0}}{4\pi}$$



$$k = \Delta K ds, \quad \Delta K = -K \frac{\Delta p}{p}$$

を代入して、リング一周の積分とすると、

$$\Delta\nu = -\frac{1}{4\pi} \oint \Delta K \beta_{T0}(s) ds \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

$$\xi = \frac{\Delta\nu}{\Delta p/p} \text{ を使うと,}$$

$$\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \oint K_1(s) \beta_{T0}(s) ds$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint K_1(s) \beta_{T0}(s) ds$$

これらが大きく、チューンが不安定領域に掛かると、安定した周回が困難になる。



垂直方向は先の議論から符号が逆になる。

ξ: 色収差 (Chromaticity)

6極磁場によるchromaticityの補正

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

6極磁石の磁場強度:

$$B_x = 2a_3xy$$

$$B_y = a_3(x^2 - y^2) \text{ より, 軌道方程式は,}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\lambda(x^2 - y^2)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 2\lambda xy$$

となる. ここで,

$$\lambda = \frac{a_3}{2B\rho}$$

と, 4極磁場と同様, 運動量で規格化する形で置き直した.

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

6極磁石が分散 η_x がある場所に設置されていると仮定.

$$x = x_\varepsilon + x_\beta = \eta_x \frac{\Delta p}{p} + x_\beta$$

$$y = y_\varepsilon + y_\beta = y_\beta$$

$$x_\beta = y_\beta = 0 \text{ の時, } \frac{d^2 x}{ds^2} = -\lambda(x^2 - y^2),$$

$$\frac{d^2 \eta_x}{ds^2} = -\lambda \eta_x^2 \frac{\Delta p}{p} \text{ が導ける.}$$

次に,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\lambda(x^2 - y^2)$$
$$\frac{d^2 y}{ds^2} = 2\lambda xy$$

について, 上の関係式を使って, x_β, y_β の一次までを計算すると,

$$\frac{d^2 x_\beta}{ds^2} = -2\lambda \eta \frac{\Delta p}{p} x_\beta$$

$$\frac{d^2 y_\beta}{ds^2} = 2\lambda \eta \frac{\Delta p}{p} y_\beta \text{ が導ける.}$$

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

$$\frac{d^2 x_\beta}{ds^2} = -2\lambda\eta \frac{\Delta p}{p} x_\beta$$

$$\frac{d^2 y_\beta}{ds^2} = 2\lambda\eta \frac{\Delta p}{p} y_\beta$$

はよく見れば, 調和振動子の形. つまり, 6極磁石を分散のあるところに置いたことで,

$$\Delta K_x = 2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p}$$

$$\Delta K_y = -2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p}$$

という収束力が現れた.

これを先のchromaticityの式に追加すれば,

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \oint (2\lambda(s)\eta_x(s) - K_1(s))\beta_{Tx}(s)ds$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint (K_1(s) - 2\lambda(s)\eta_x(s))\beta_{Ty}(s)ds$$

と補正できることがわかる.

2. 電子の運動

2.14. 運動量差によるTune-ShiftとChromaticity (色収差)

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \oint (2\lambda(s)\eta_x(s) - K_1(s))\beta_{Tx}(s)ds$$
$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint (K_1(s) - 2\lambda(s)\eta_x(s))\beta_{Ty}(s)ds$$

- Natural chromaticityは4極磁場とその場所の β の積に比例
- 6極磁場による補正項は6極磁場強度, その場所の分散, β の積に比例
 - 分散の大きいところ, また β の大きいところに6極磁石を設置するのが効率的
- 水平, 垂直それぞれのchromaticityを補正するため, 最低でも2 Family以上の6極磁石が必要.

2. 電子の運動

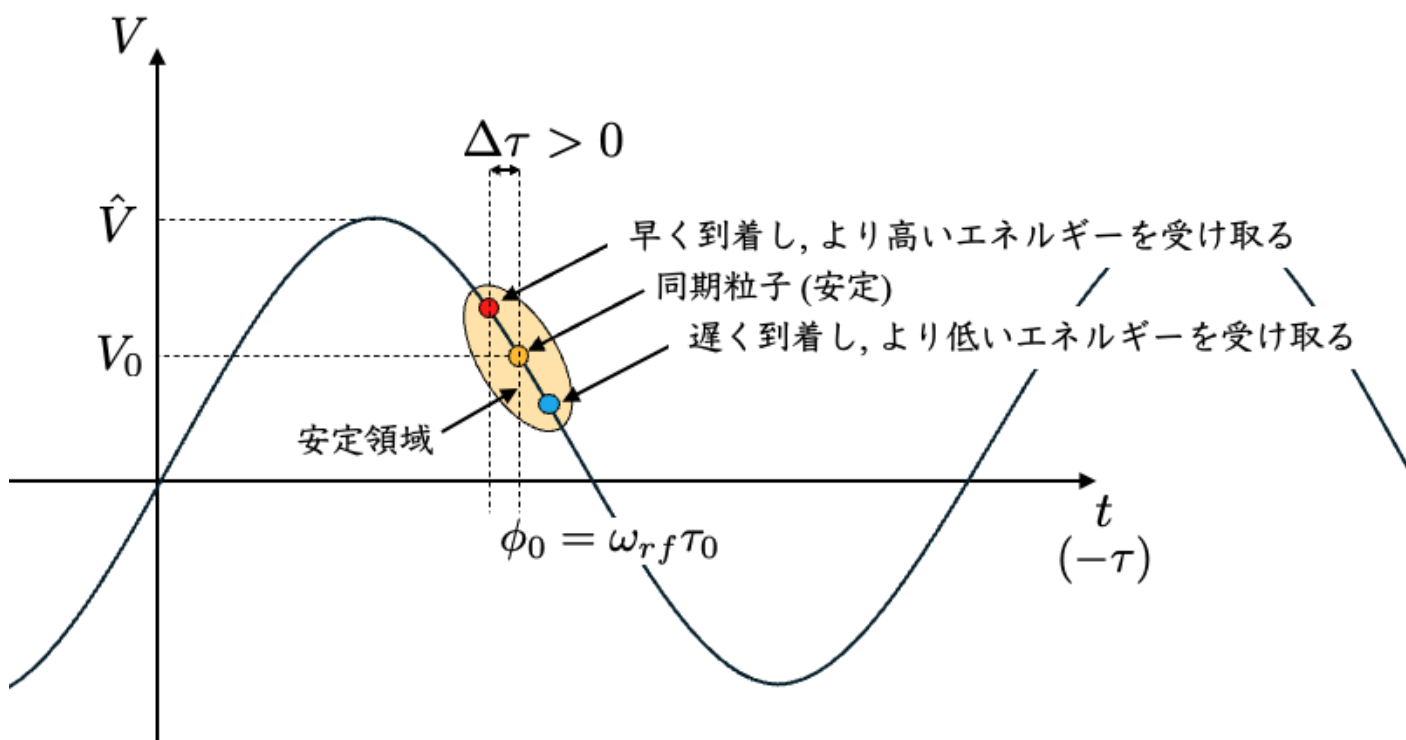
2.15. 縦方向の微小振動

これまでは横方向 (x, y) にまつわる運動について説明してきたが, ここでは縦方向, つまり s 方向 (時間方向) に関する, 安定点近傍の微小振動に限定して説明を行う.

放射光放出によるエネルギー U の損失



RF空洞における加速 (エネルギー補充)



同期位相: $eV_0 = e\hat{V} \sin \phi_0$

非同期位相: $eV = e\hat{V} \sin \phi$

momentum compaction factor $\alpha_m > 0$

- $p > p_0$
 - 遠回りになり, RF空洞への到着が遅れ, より低いエネルギーを受け取る.
- $p < p_0$
 - 近道になり, RF空洞への到着が早まり, より高いエネルギーを受け取る.

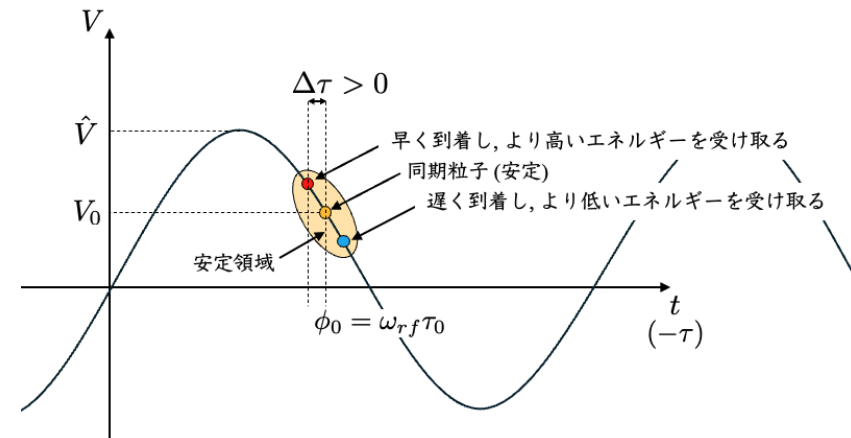
⇒ シンクロトロン振動と位相安定性

2. 電子の運動

2.15. 縦方向の微小振動

基準粒子とのエネルギー差を ϵ とすると, エネルギー収支の時間変化は,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{eV(\tau) - U(\epsilon)}{T_0}, \text{ ここで } T_0 \text{ は周回時間で } C/c.$$



$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{C} &= \alpha_m \frac{\Delta p}{p} \\ \Downarrow \\ \frac{dt}{T_0} &= \alpha_m \frac{\Delta p}{p} \\ \Downarrow \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\alpha_m \frac{\epsilon}{E_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} eV(\tau) &= eV(0) + e\dot{V}\tau \\ U(\epsilon) &= U(0) + \frac{dU}{d\epsilon}\epsilon \\ \Downarrow \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{e\dot{V}\tau - \frac{dU}{d\epsilon}\epsilon}{T_0} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 2\alpha_\epsilon \frac{d\tau}{dt} + \Omega^2\tau = 0$$

α_ϵ : シンクロトロン振動の減衰定数
 Ω : シンクロトロン周波数

$$\begin{aligned} \alpha_\epsilon &= \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \\ \Omega &= \sqrt{\frac{\alpha_m e \dot{V}}{E_0 T_0}} \end{aligned}$$

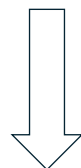
2. 電子の運動

2.15. 縦方向の微小振動

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 2\alpha_\epsilon \frac{d\tau}{dt} + \Omega^2\tau = 0$$

の解を $\tau(t) = e^{\lambda t}$ と置けば,

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_\epsilon \pm \sqrt{\alpha_\epsilon^2 - \Omega^2}$$



一般に $\alpha_\epsilon \ll \Omega$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_\epsilon \pm i\Omega$$



$$\tau(t) = Ae^{-\alpha_\epsilon t} \cos(\Omega t - \theta_0)$$

- $\exp(-\alpha_\epsilon t)$: シンクロトロン振動の振幅が徐々に小さくなっていく (dampしていく)ことを示す.
- $\cos(\Omega t - \theta_0)$: シンクロトロン振動そのもので, Ω がその振動数であることを示す.
- $dU/d\varepsilon = 0$ の場合, $\alpha_\epsilon = 0$ となり, 振幅の減衰効果はなくなり, 永遠に同じ振幅でシンクロトロン振動が続く.

2. 電子の運動

2.16. 放射積分

この後の計算に便利な放射積分と呼ばれる量を定義しておく.

$$I_1 = \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds$$

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds$$

$$I_3 = \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds$$

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds$$

$$I_5 = \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds$$

ここで,

$$H = (\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2)$$

これを使えば, 先に導出したMomentum Compaction Factor α_m は,

$$\alpha_m = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds = \frac{I_1}{C} \text{ と書ける.}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

先ほど、 $dU/d\varepsilon > 0$ であるときに、シンクロトロン振動の振幅が指数的に減少していくことを垣間見た。ここでは縦方向だけでなく横方向を含めた、振動の減衰について説明を行う。

2.17.1. 放射パワーと放射エネルギー

基準エネルギー E_0 を持つ電子が偏向磁石の垂直磁場 B_0 下 (曲率半径 ρ)で曲げられたときに放出する放射光パワー P_0 は、ここでは天下りで、

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{2e^4}{3m_e c^2} \left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^2 B_0^2 \\ &= \frac{2e^2 r_e c^3}{3(m_e c^2)^3} E_0^2 B_0^2 \end{aligned} \quad , \text{ここで } r_e \text{ は電子の古典半径で,}$$

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \sim 2.82 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

また、 $p_0 = eB_0\rho$ より、

$$P_0 = \frac{2r_e c}{3(m_e c^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho^2}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.1. 放射パワーと放射エネルギー

この“基準電子”がリング1周する際に放出するエネルギー U_0 は P_0 を周回時間 T_0 の範囲で積分することで得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{T_0} P_0 dt \\ &= \oint P_0 \frac{ds}{c} \\ &= \frac{2r_e E_0^4}{3(m_e c^2)^3} \oint \frac{1}{\rho^2} ds \\ &= \frac{2r_e E_0^4}{3(m_e c^2)^3} I_2 \end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.2.シンクロトロン振動の減衰

シンクロトロン振動の微分方程式は、先に示した通り、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 2\alpha_\epsilon \frac{d\tau}{dt} + \Omega^2\tau = 0$$

ここでは、

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \text{ を求めたい.}$$

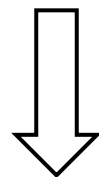
つまり、 $dU/d\epsilon$ を計算できればよい.

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.2.シンクロトロン振動の減衰

$$P_0 = \frac{2e^2 r_e c^3}{3(m_e c^2)^3} E_0^2 B_0^2$$



リング周回中に E と B と軌道長
が変化することを盛り込む.

$$U = \int_0^T P dt$$

$$= \oint P \frac{dl}{c}$$

Momentum Compaction Factorのところで議論

$$= \frac{2e^2 r_e c^2}{(m_e c^2)^3} \oint E^2 \underline{B^2} \underline{d\ell} \leftarrow d\ell = \left(1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0}\right) ds$$

$$B = B_{0y} + \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\epsilon}{E_0}$$

$$E = E_0 + \epsilon$$

2. 電子の運動

2.17. 放射減衰

2.17.2. シンクロトロン振動の減衰

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c} \oint P \left(E_0 + \epsilon, B_0 + \frac{dB_y}{dx} \eta \frac{\epsilon}{E_0} \right) \left(1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left(P_0 + \frac{\partial P}{\partial E_0} \epsilon + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\epsilon}{E_0} \right) \left(1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0} \right) ds \\ &= U_0 + \frac{\epsilon}{c} \oint \left(\frac{\partial P}{\partial E_0} + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0 E_0} \right) ds \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\epsilon} &= \frac{1}{c} \oint \left(\frac{\partial P}{\partial E_0} + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0 E_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left(\frac{2P_0}{E_0} + \frac{2P_0}{B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{cE_0} \oint P_0 \left\{ 2 + \left(\frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \\ &= \frac{2r_e \gamma_r^3}{3} \oint \left\{ \frac{2}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \quad \Rightarrow \quad \alpha_\epsilon = \frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.2.シンクロトロン振動の減衰

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_\epsilon} &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} \oint \left\{ \frac{2}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \\ &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} (2I_2 + I_4) \\ &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_\epsilon\end{aligned}$$

ここで,

$J_\epsilon = 2 + \frac{I_4}{I_2}$ は, シンクロトロン振動のDamping Partition Number (減衰分配係数).

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

i) RF空洞における加速によって生じる発散角の減少

ii) 放射光放出によるベータトロン振動の変化



横方向 (水平, 垂直)のベータトロン振動の減衰

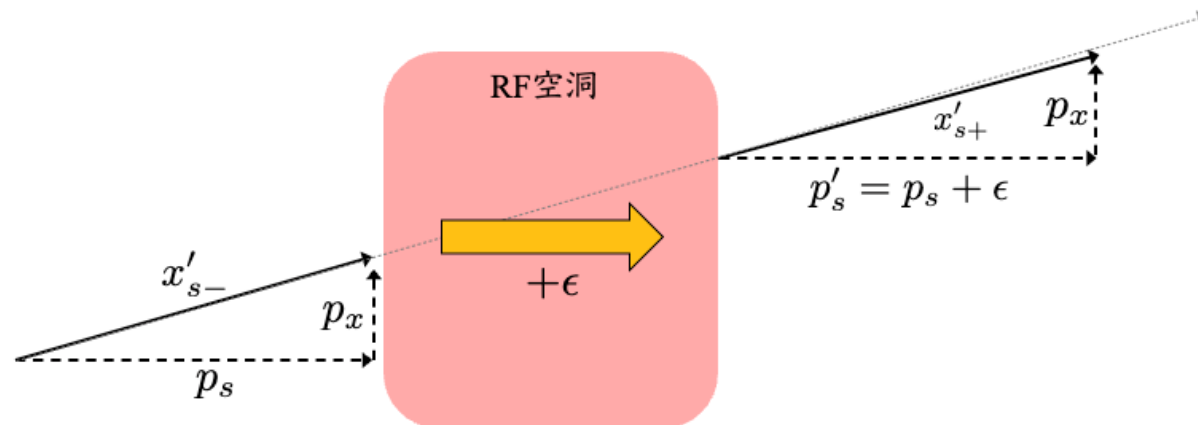
- ベータトロン振動の減衰とは, つまりベータトロン振動の振幅の減衰のこと.
- CS不変量 W の減衰の様子, つまり dW/dt を求めることが目的.
- 以下, 各寄与について説明した後に, 最終的な水平ベータトロン振動の減衰時間 τ_x を見積もる.

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータatron振動の減衰

2.17.3.1. RF空洞による効果



リングを周回する際に失ったエネルギーを補うためにRF空洞で ϵ のエネルギーをもらうと仮定すると、 x' は縦方向分のエネルギーが増えるため、通過前を x'_{s-} 、通過後を x'_{s+} とすると、

$$\begin{aligned}x'_{s+} &= \frac{p_x}{p_s + \epsilon} \\&= \frac{p_x}{p_s (1 + \epsilon/p_s)} \\&\sim \frac{p_x}{p_s (1 + \epsilon/E)} \\&= x'_{s-} \frac{1}{1 + \epsilon/E} \\&\sim x'_{s-} \left(1 - \frac{\epsilon}{E}\right) \Rightarrow \Delta x' = -x' \epsilon / E\end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.1. RF 空洞による効果

ここでCS不変量の変化 ΔW を考えると,

$$\begin{aligned}\Delta W_{d1} &= W' - W \\ &= (\gamma_T x^2 + 2\alpha_T x(x' + \Delta x') + \beta_T (x' + \Delta x')^2) - (\gamma_T x^2 + 2\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \\ &= 2\alpha_T x \Delta x' + 2\beta_T x' \Delta x' + \beta (\Delta x')^2 \\ &\sim 2\alpha_T x \Delta x' + 2\beta_T x' \Delta x' \\ &= -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \langle W \beta_T \cos^2(\psi(s) + \psi_0) \rangle \\ &= W \beta_T \left\langle \frac{\cos(2(\psi(s) + \psi_0)) + 1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{W \beta_T}{2}\end{aligned}\quad \begin{aligned}\langle x'^2 \rangle &= \frac{W \gamma_T}{2} \\ \langle x x' \rangle &= -\frac{W \alpha_T}{2}\end{aligned}$$

ベータトロン振動の位相平均

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.1. RF 空洞による効果

$$\begin{aligned}\frac{\langle \Delta W_{d1} \rangle}{T_0} &= -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E} \\ &= -2 \left(-\frac{W \alpha_T^2}{2} + \frac{W \beta_T \gamma_T}{2} \right) \frac{\epsilon}{T_0 E} \\ &= -W(\beta_T \gamma_T - \alpha_T^2) \frac{\epsilon}{T_0 E} \\ &= -\frac{W}{T_0} \frac{\epsilon}{E} \\ &= -\frac{W}{T_0} \frac{U_0}{E}\end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.2. 分散による効果

分散があるところで、電子が放射光を放出すると、 x 及び x' は滑らかに変化するはずなので、ベータトロン振動と分散の寄与の和は0、つまり、

$$x_{\beta} + x_{\epsilon} = 0$$

$$x'_{\beta} + x'_{\epsilon} = 0$$

従って、放射光放出による ϵ のエネルギー変化はベータトロン振動に転換され、

$$\Delta x_{\beta} = -\eta_x \frac{\epsilon}{E_0}$$

$$\Delta x'_{\beta} = -\eta'_x \frac{\epsilon}{E_0}$$

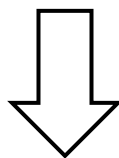
2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.2. 分散による効果

$$\begin{aligned} W' &= \gamma_T \left(x - \eta \frac{\epsilon}{E} \right)^2 + 2\alpha_T \left(x - \eta \frac{\epsilon}{E} \right) \left(x' - \eta' \frac{\epsilon}{E} \right) + \beta_T \left(x' - \eta' \frac{\epsilon}{E} \right)^2 \\ &\sim \gamma_T \left(x^2 - 2\eta x \frac{\epsilon}{E} \right) + 2\alpha_T \left(xx' - \eta' x \frac{\epsilon}{E} - \eta x' \frac{\epsilon}{E} \right) + \beta_T \left(x'^2 - 2\eta' x' \frac{\epsilon}{E} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta W_{d2} &= -2\gamma_T \eta x \frac{\epsilon}{E} - 2\alpha_T \frac{\epsilon}{E} (\eta' x + \eta x') - 2\beta_T \eta' x' \frac{\epsilon}{E} \\ &= -2\eta \frac{\epsilon}{E} (\gamma_T x + \alpha_T x') - 2\eta' \frac{\epsilon}{E} (\alpha_T x + \beta_T x') \end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17. 放射減衰

2.17.3. 水平ベータatron振動の減衰

2.17.3.2. 分散による効果

$$\Delta W_{d2} = -2\eta \frac{\epsilon}{E} (\gamma_T x + \alpha_T x') - 2\eta' \frac{\epsilon}{E} (\alpha_T x + \beta_T x')$$

振幅 x を持つ電子が放射
光を出して変化するエネ
ルギー ϵ を考える. (シン
クロtron振動の減衰と
同様に, 放射パワー P につ
いて, 軌道長と磁場が変
わる効果を鑑みる)

$$\epsilon = -P \Delta t$$

$$= -P \frac{d\ell}{c}$$

$$= - \left(P_0 + \frac{\partial P}{\partial B} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \right) \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c}$$

$$= -P_0 \left(1 + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \right) \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c}$$

$$\begin{aligned} \Delta W_{d2} &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(1 + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \right) \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \cdot \{ \eta (\gamma_T x + \alpha_T x') + \eta' (\alpha_T x + \beta_T x') \} \\ &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{2}{\rho B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x^2 \right) \cdot \{ \eta (\gamma_T x + \alpha_T x') + \eta' (\alpha_T x + \beta_T x') \} \end{aligned}$$

2. 電子の運動

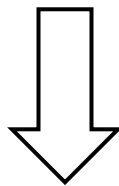
2.17. 放射減衰

2.17.3. 水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.2. 分散による効果

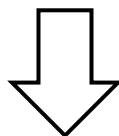
$$\Delta W_{d2} = \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{2}{\rho B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x^2 \right) \cdot \{ \eta(\gamma_T x + \alpha_T x') + \eta'(\alpha_T x + \beta_T x') \}$$

ベータトロン振動の位相平均



$\langle x^2 \rangle = \frac{W\beta_T}{2}$	$\langle x \rangle = 0$
$\langle x'^2 \rangle = \frac{W\gamma_T}{2}$	$\langle x' \rangle = 0$
$\langle xx' \rangle = -\frac{W\alpha_T}{2}$	$\langle x^2 x' \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \Delta W_{d2} &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \{ \eta(\gamma_T x^2 + \alpha_T x x') + \eta'(\alpha_T x^2 + \beta_T x'^2) \} \\ &= \frac{P_0 ds}{cE_0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) W \eta \end{aligned}$$



リング1周分積分し、周回時間 T_0 で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{d2}}{T_0} &= \frac{1}{cT_0 E_0} \oint P_0 \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K_1 \right) \eta W ds \\ &= \frac{2r_e \gamma_r^3}{eT_0} I_4 W \end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.3.水平ベータトロン振動の減衰

2.17.3.3. 2つの効果を合わせる

水平ベータトロン振動の振幅は $\sqrt{W}$ に比例しているから、

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{\sqrt{W}} \frac{d\sqrt{W}}{dt} = \frac{1}{2W} \frac{dW}{dt} \quad \text{で求められる.}$$

先のRFの効果と分散の効果を足すと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_x} &= \frac{1}{2W} \frac{dW_d}{dt} \\ &= \frac{1}{2W} \frac{\Delta W_{d1} + \Delta W_{d2}}{T_0} \\ &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} (I_2 - I_4) \\ &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ここで,} \\ J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{は, 水平ベータトロン振動の} \\ \text{Damping Partition Number.} \end{array}$$

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.4.垂直ベータトロロン振動の減衰

前項の水平ベータトロロン振動では水平分散 η_x とその微分 η'_x が0でないことからその効果を考慮する必要があったが, 垂直方向の分散関数 η_y 及び η'_y は一般には0である. したがって, CS不変量の変化量 ΔW は,

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta W_{d1} + \Delta W_{d2} \\ &= \Delta W_{d1} \quad \text{となり,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_y} &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 \\ &= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_y \quad \text{となる.}\end{aligned}$$

ここであえてy方向ベータトロロン振動のDamping Partition Numberを $J_y = 1$ として明示した.

2. 電子の運動

2.17.放射減衰

2.17.5. Damping Partition Number

3つを並べると,

$$J_{\epsilon} = 2 + \frac{I_4}{I_2}$$

$$J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2}$$

$$J_y = 1$$

となり, その和は4となることがわかる.

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

前節では放射光の放出とRF空洞でのエネルギー補充の効果により、縦方向も横方向も振動振幅が減衰していくことを説明した。この放射減衰の効果によっていつかは振動振幅は0になりそうだが、実際には放射光放出による効果、“放射励起”によってある点でバランスを取り、0にはならない。ここではこの放射励起について簡単に説明を行う。先の放射減衰と同様に、縦方向と横方向に分けて考えてみよう。

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

2.18.1. 光子の放出

ここでは電子が放出する光子の放射パワーに分布があることを考えよう．計算がかなり込み入ってくるので，ここでは参考文献 [1, 2] などから得られる結果を引用する．

$$\text{臨界角周波数: } \omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma_r^3}{\rho}$$

$$\text{放射パワースペクトル: } P(\omega)$$

$$\text{基準放射パワー: } P_0 = \int_0^\infty P(\omega) d\omega$$

$$\text{放出光子数スペクトル: } n(u)$$

$$\begin{aligned} \text{全放出光子数: } \mathcal{N} &= \int_0^\infty n(u) du \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_0}{u_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{平均光子エネルギー: } \langle u \rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^\infty u n(u) du \\ &= \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{平均二乗光子エネルギー: } \langle u^2 \rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^\infty u^2 n(u) du \\ &= \frac{11}{27} u_c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{後で頻出する形: } \mathcal{N} \langle u^2 \rangle &= \int_0^\infty u^2 n(u) du \\ &= C_u u_c P_0 \\ &= \frac{\hbar c^2}{(m_e c^2)^3} \frac{3 C_u C_\gamma}{4\pi} \frac{E^7}{\rho^3} \\ &= \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar m_e c^4 \frac{\gamma_r^7}{\rho^3} \\ C_u &= \frac{55}{24\sqrt{3}} \\ C_\gamma &= \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} \end{aligned}$$

[1] H. Wiedemann, “Synchrotron Radiation”, Springer Berlin, Heidelberg, (2003)

[2] M. Sands, “The Physics of Electron Storage Rings: An Introduction”, Conf. Proc. C **6906161** (1969), 257-411 SLAC-R-121. <https://inspirehep.net/files/0f9249be89a808732c1451100b84d55a>

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

2.18.2. 光子の放出によるシンクロトロン振動の励起

放出する光子エネルギーが定数 u であるとし, これが $\mathcal{N}$ 回放出されることを考える. これまで見てきたように, 元々,

$$\epsilon(t) = A_0 e^{i\Omega(t-t_0)}$$

と振動していた最中に, 時刻 t_i でエネルギー u の光子を放出したとすると,

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= A_0 e^{i\Omega(t-t_0)} - u e^{i\Omega(t-t_i)} \\ &= A_1 e^{i\Omega(t-t_0)}\end{aligned}$$

と置けば,

$$A_1^2 = A_0^2 + u^2 - 2A_0 u \cos \Omega(t_i - t_0) \quad \text{となり, } t_i \text{ に対して平均化処理を行うと,}$$

$$\langle (\delta A)^2 \rangle = \langle A_1^2 - A_0^2 \rangle = u^2 \quad \text{となる. これが時間当たり } \mathcal{N} \text{ 回起きるので,}$$

$$\left\langle \frac{d(A^2)}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = \mathcal{N} u^2$$

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

2.18.3. ベータトロン振動の励起

i) 放射光放出によるベータトロン振動の変化

ii) 放射光放出による電子の反跳効果



横方向 (水平) のベータトロン振動の励起

一般にはii) の効果はi) と比較して十分小さいので, ここではi)のみの説明を行う.

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

2.18.3. ベータトロン振動の励起

先の放射減衰の時と同様、放射光の放出により電子はその分エネルギーを失うが、 x 及び x' は滑らかに変化することから ΔW を計算すると、

$$\Delta W = -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E} + \underbrace{(\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2)}_{\text{励起分}} \left(\frac{\epsilon}{E_0} \right)^2$$

$$= \underbrace{\Delta W_{d2}}_{\text{放射減衰の計算で現れた量}} + \underbrace{H(s)}_{\text{励起分} \Delta W_{ex} \text{を分離}} \left(\frac{\epsilon}{E_0} \right)^2$$

が導かれる。

放射減衰の計算で現れた量

励起分 ΔW_{ex} を分離

放射光子のエネルギー ϵ に対する分布の積分とリング1周分の積分を行うと、リング1周する際のCS不変量の励起分は、

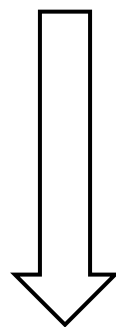
$$\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} = \frac{1}{E_0^2} \frac{\oint \{ H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \} ds}{\oint ds}$$

2. 電子の運動

2.18. 放射励起

2.18.3. ベータトロン振動の励起

$$\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} = \frac{1}{E_0^2} \frac{\oint \{ H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \} ds}{\oint ds}$$



$$\oint ds = cT_0$$

$$\int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar m_e c^4 \frac{\gamma_r^7}{\rho^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{ex}}{T_0} &= \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} \oint \frac{H(s)}{|\rho|^3} ds \\ &= \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \end{aligned}$$

ここで,

$$C_q = \frac{3}{4} C_u \frac{\hbar}{m_e c}$$

$$= \frac{55}{32\sqrt{3}} \lambda_c$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c}$$

ここまでは水平のベータトロン振動の励起について考えてきたが、垂直方向に対する寄与は分散がないため、ここでは垂直方向の励起について無視する。

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.1. エネルギー幅

先ほど減衰については一旦無視していたが, 実際には,

$$\epsilon(t) = \bar{\epsilon} e^{-(\alpha_{\epsilon} - i\Omega)t} \quad \text{となっており, 両辺を2乗すると,}$$

$$\epsilon^2(t) = \bar{\epsilon}^2 e^{-2\alpha_{\epsilon}t} e^{i2\Omega t} \quad \text{となり, 先と同様に時間の平均化を行うと,}$$

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = -2\alpha_{\epsilon} \langle A^2 \rangle \quad \text{が導かれる.}$$

これが先に求めた励起分 $\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = \mathcal{N}u^2$ とつり合うので,

$$\mathcal{N}u^2 = 2\alpha_{\epsilon} \langle A^2 \rangle = 2 \frac{\langle A^2 \rangle}{\tau_{\epsilon}}$$

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} \tau_{\epsilon} \mathcal{N}u^2$$

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.1. エネルギー幅

シンクロトロン振動におけるエネルギーの分散 σ_ϵ は,

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon^2 &= \langle \epsilon^2 \rangle \\ &= \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \\ &= \frac{1}{4} \tau_\epsilon \mathcal{N} u^2\end{aligned}$$

振動成分の2乗の平均が1/2であることから.

ここまでは u を定数と見なしてきたが, 分布 $n(u)$ を考慮すると, 励起成分は,

$$\begin{aligned}\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} &= \int_0^\infty u^2 n(u) du \\ &= \mathcal{N} \langle u^2 \rangle \quad \text{となる.}\end{aligned}$$

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.1. エネルギー幅

さらにリング一周分で平均化すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} &= \langle \mathcal{N} \langle u^2 \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{C} \oint \mathcal{N} \langle u^2 \rangle ds \\ &= \frac{3}{2} C_u \hbar c \gamma_r^3 \frac{\langle P_0 \rangle \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\tau_\epsilon &= \frac{2T_0 E_0}{U_0 J_\epsilon} \\ &= \frac{2E_0}{J_\epsilon \langle P_0 \rangle}\end{aligned}$$

という表式を, 元の

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{4} \tau_\epsilon \mathcal{N} u^2$$

に戻してやると,

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.1. エネルギー幅

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{1}{4} \tau_{\epsilon} \mathcal{N} u^2$$



$$\langle \mathcal{N} < u^2 > \rangle = \frac{3}{2} C_u \hbar c \gamma_r^3 \frac{\langle P_0 \rangle \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds}, \quad \tau_{\epsilon} = \frac{2E_0}{J_{\epsilon} \langle P_0 \rangle}$$

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{3C_u \hbar m_e c^3 \gamma_r^4 I_3}{4J_{\epsilon} I_2}$$



両辺を E_0^2 で割り,

$$\left(\frac{\sigma_{\epsilon}}{E_0} \right)^2 = C_q \gamma_r^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4}$$

一般にエネルギー幅と言った場合, 割合である σ_{ϵ}/E_0 を指す.

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.2. バンチ長

前項ではエネルギー幅 σ_e/E_0 について説明したが、エネルギー幅が有限であるということは、進行方向 (s 方向)にも有限の長さを持っている、ということになる. これをバンチ長と呼ぶ.

シンクロトロン振動が十分に平衡状態になっているとすると、シンクロトロン振動のエネルギーのやり取りの式は、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e\dot{V}\tau - \frac{dU}{d\epsilon}\epsilon}{T_0}$$



$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e\dot{V}\tau}{T_0}$$



$$\Omega = \sqrt{\frac{\alpha_m e \dot{V}}{E_0 T_0}}, \quad \theta = \frac{\Omega E_0}{\alpha_m} \tau$$

変数変換

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \Omega \theta$$

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.2. バンチ長

$$\theta = \frac{\Omega E_0}{\alpha_m} \tau$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\Omega E_0}{\alpha_m} \frac{d\tau}{dt}$$



Momentum Compaction Factorの定義から

$$\frac{d\tau}{dt} = -\alpha_m \frac{\epsilon}{E_0}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \Omega \theta \quad \frac{d\theta}{dt} = -\Omega \epsilon$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \theta &= A \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \epsilon &= A \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned} \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_\epsilon \Rightarrow \sigma_\tau = \frac{\alpha_m}{\Omega} \frac{\sigma_\epsilon}{E_0}$$

↑

2. 電子の運動

2.18. 放射減衰と放射励起のつり合い

2.18.3. 平衡エミッタンス

これまでに求めた水平ベータatron振動の減衰量と励起量を使うと,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} + \frac{\Delta W_d}{T_0} \\&= \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 - \frac{2W_{eq}}{\tau_x} \\&= 0\end{aligned}$$

これを平衡エミッタンス $\varepsilon_x = \langle W \rangle / 2$ について解くと,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\langle W \rangle}{2} \\&= \frac{W_{eq}}{2} \\&= \tau_x \cdot \frac{1}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \\&= \frac{3T_0}{r_e \gamma_r^3 (I_2 - I_4)} \cdot \frac{1}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \\&= C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4}\end{aligned}$$

垂直方向のエミッタンスは理想的には0になる.

目次

1. イントロ
2. 電子の運動
3. *Lattice* ・ *Optics* の設計

目次

1. イントロ

2. 電子の運動

3. *Lattice · Optics* の設計

3. Lattice · Optics の設計

水平平衡エミッタンス

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} \\ &= C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 J_x}\end{aligned}$$

放射積分

$$\begin{aligned}I_2 &= \oint \frac{1}{\rho^2} ds \\ I_4 &= \oint \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds \\ I_5 &= \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds \\ H &= (\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2)\end{aligned}$$

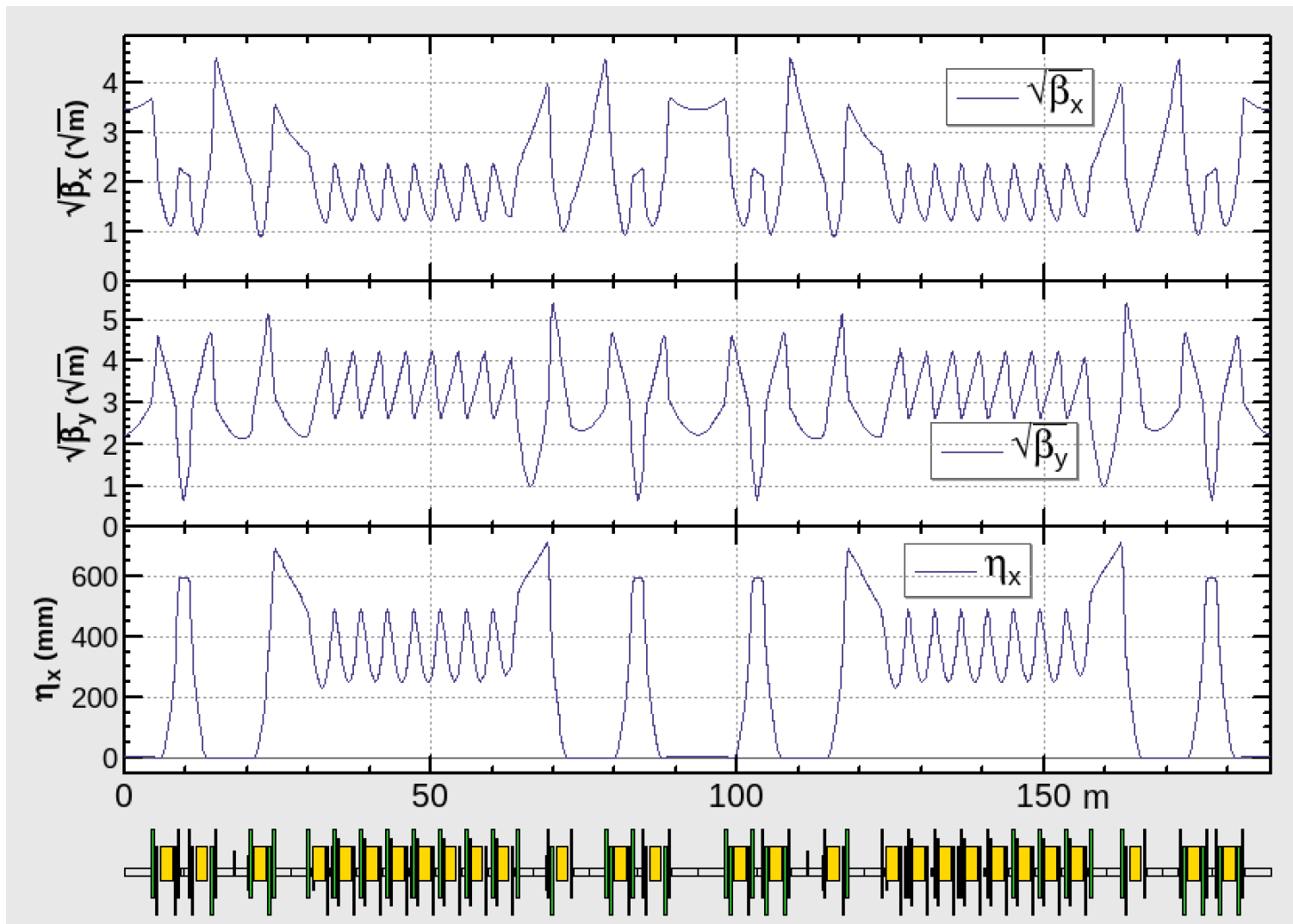
- C_q は定数であり, 操作することができない.
- γ_r はローレンツ因子で, 得られる放射光のエネルギー帯もしくは波長帯はこれによっておおよそ決まるため, 放射光源としてはまず最初に決まる値である.
- 残りの放射積分 I_2, I_4, I_5 はこれまで見てきたように, 加速器を構成する磁石の配列・強さによって決まり, エミッタンスの調整ノブとなりうる.

この磁石の配列 (どう並べるか) を Lattice (ラティス) と呼ぶ.

3. *Lattice · Optics* の設計

3.1. FODO

- FODO lattice: 最も基本的なlattice.
- KEKにある放射光源, PF-ringとPF-ARはともにFODOを採用.
- 分散 η_x が0の領域を**Achromat (アクトマツト)**と呼び, 挿入光源やRF空洞が設置される.
 - 一般に, 分散が0であればビームサイズは小さくなり, 輝度は上がる.
- 図を見ると同じパターンが2つ続いて全体を構成していることがわかる. この繰り返しのことを**Superperiod (スーパーピリオド)**と呼ぶ.

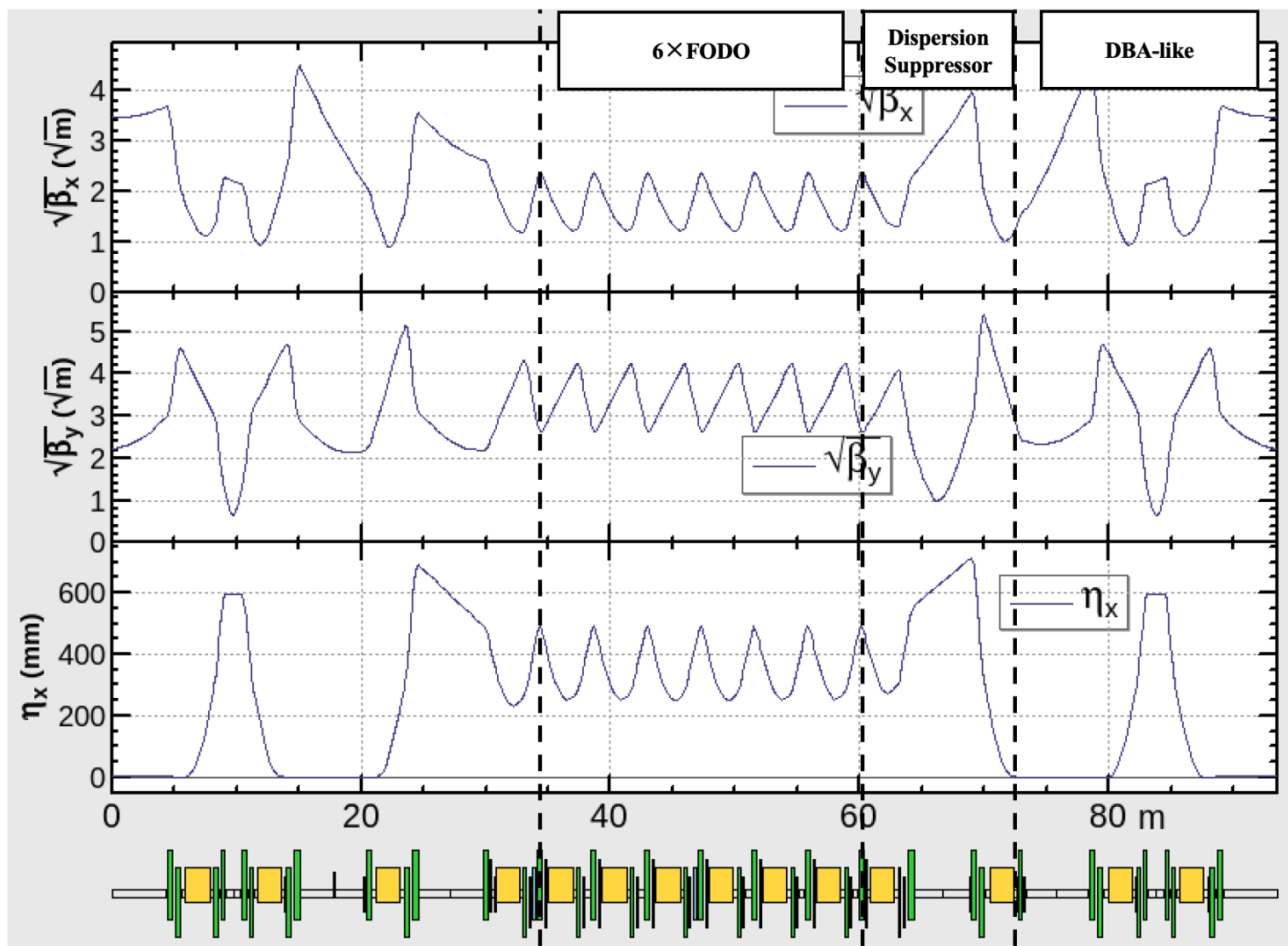


Opticsの計算にはKEKで開発されているSAD[1]を使用した.

3. Lattice · Optics の設計

3.1. FODO

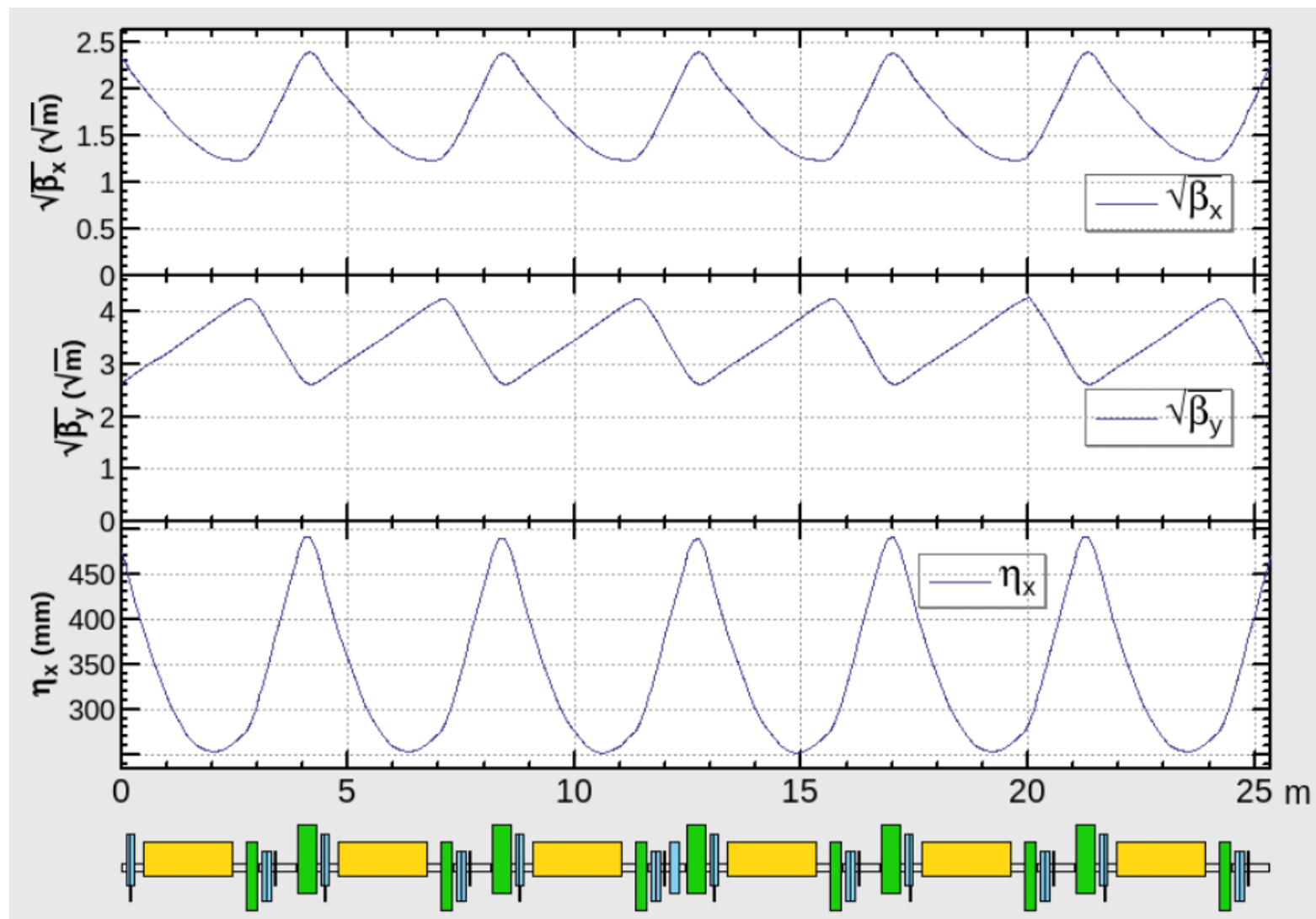
- Superperiodの中央を大きく占めているのはFODOと呼ばれるパターンの6つの繰り返しである．この繰り返しの単位を**Cell (セル)**という．
- このFODOに接続しているのが**Dispersion Suppressor**と呼ばれる部分で、FODOの端で有限の値で終わっている分散を引き継ぎ、0にする役目を担っている．
- その直後に次節で説明するDBA-likeなcellが1つ続いている．



3. Lattice · Optics の設計

3.1. FODO

- FODOは4極磁石のfocus “F”とdefocus “D”がドリフトスペース“O”を挟んで順に並ぶ構成からFODOと呼ばれる。ここでは、あるいは一般的に偏向磁石”B”も構成要素となり、PF-ringではFOBODOと並んでいる。



3. Lattice ・ Optics の設計

3.1. FODO

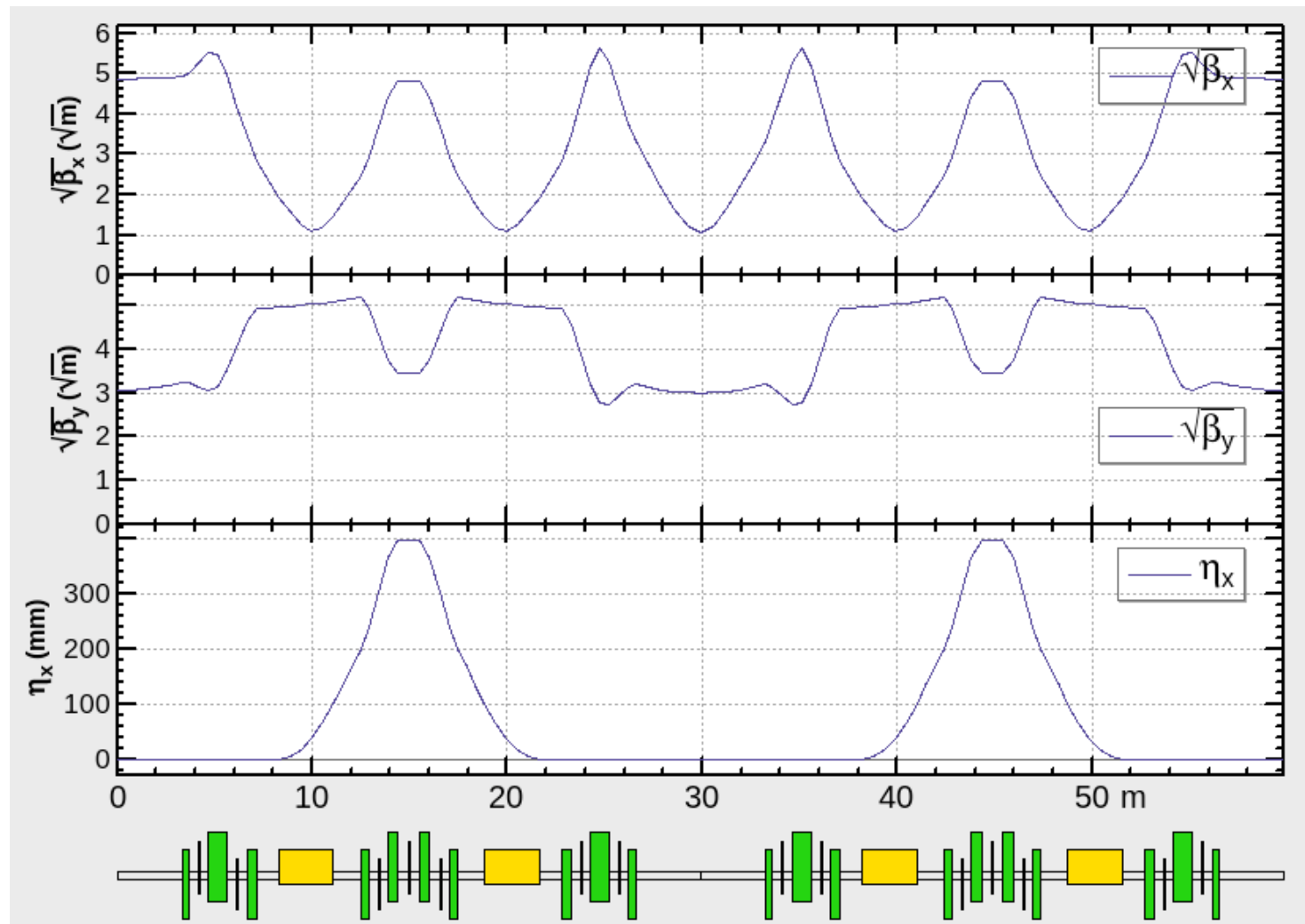
Table 1 PF-ring の主要パラメータ.

エネルギー	E_0 [GeV]	2.5
周長	C [m]	187.035
エネルギー損失	U_0 [MV/turn]	0.399
Momentum Compaction Factor	α_m	6.563×10^{-3}
減衰時間	$\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms]	7.999, 7.815, 3.863
減衰分配係数	J_x, J_y, J_ϵ	0.977, 1.000, 2.023
Betatron Tune (x, y)	ν_x, ν_y	9.598, 5.279
Natural Chromaticity (x, y)	ξ_x, ξ_y	-13, -17
水平エミッタンス	ϵ_x [nmrad]	35
エネルギー幅	σ_ϵ/E	7.288×10^{-4}
放射積分	I_1	1.227
	I_2	7.258×10^{-1}
	I_3	8.383×10^{-2}
	I_4	1.638×10^{-2}
	I_5	2.811×10^{-3}

3. *Lattice · Optics* の設計

3.2. *Double Bend Achromat (DBA)*

- DBA lattice (Chasman-Green Lattice)はその名の通り、1つのcellに偏向磁石が2つあり、cellの端が常にAchromatになる。つまり、FODOのときのような dispersion suppressorが必要なくなる。
- DBA の一例として、日本の SPring-8 の optics (DBA cell 2つ分)を示した[1]。分散は端にある2つの偏向磁石で立ち上がり、中央に設置されたQFで分散が最大となっている。
- SPring-8におけるDBA opticsでの運転は2002年までで、2003年からは分散を漏らしてさらなる低エミッタンス化を図る DB opticsが適用されている[1]。



SPring-8で2002年まで適用されていたoptics (2 × DBA-cell) [1].

3. Lattice ・ Optics の設計

3.2. Double Bend Achromat (DBA)

Table 2 SPring-8, DBA optics の主要パラメータ (参考値).

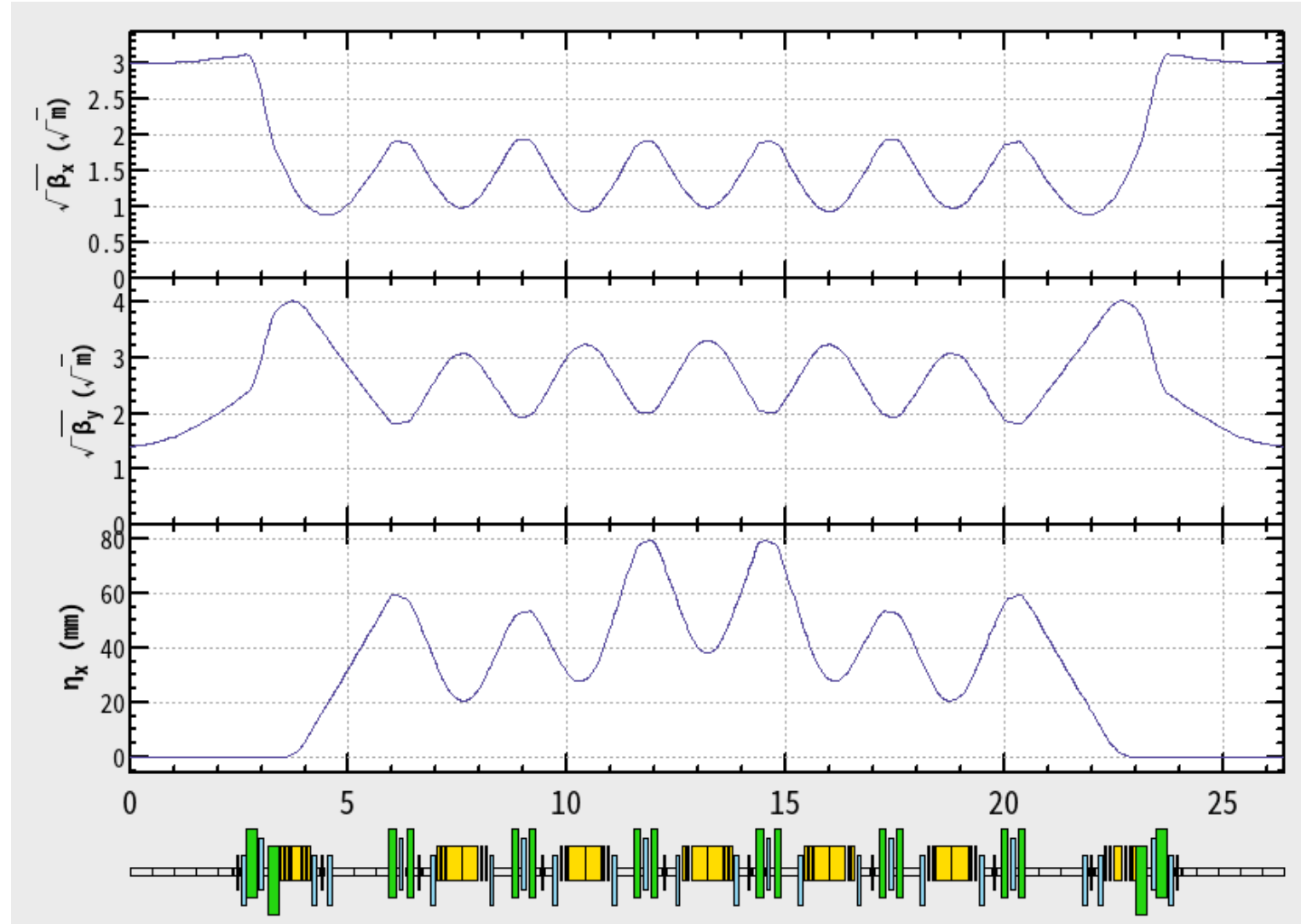
エネルギー	E_0 [GeV]	8
周長	C [m]	1435.948
エネルギー損失	U_0 [MV/turn]	9.227
Momentum Compaction Factor	α_m	1.460×10^{-4}
減衰時間	τ_x, τ_y, τ_e [ms]	8.317, 8.309, 4.152
減衰分配係数	J_x, J_y, J_e	0.999, 1.000, 2.001
Betatron Tune (x, y)	ν_x, ν_y	47.120, 15.220
Natural Chromaticity (x, y)	ξ_x, ξ_y	-107, -39
水平エミッタンス	ε_x [nmrad]	7.0
エネルギー幅	σ_e/E	1.094×10^{-4}
放射積分	I_1	2.096×10^{-1}
	I_2	1.600×10^{-1}
	I_3	4.074×10^{-3}
	I_4	1.359×10^{-4}
	I_5	1.185×10^{-5} 

3. Lattice ・ Optics の設計

3.3. Multi-bend Achromat (MBA)

- DBAからさらに偏向磁石の蹴り角を小さくする (偏向磁石の数を増やす) ことによって低エミッタンス化を進めたのが, Multi-bend Achromat Lattice (MBA) である.
- スウェーデンにあるMAX IVを例に, MBA lattice 1セル分のopticsを示す (ただし現行のlatticeではなく, 2014年に論文で紹介されたものになる[1]).
- MAX IVでは1つのcellに7つの偏向磁石が使用されているが, 1つの偏向磁石がいくつかの部分に分かれている. これは進行方向に磁場勾配を持つ**Longitudinal Gradient Bend**と呼ばれる設計で, つまり各部分固有の曲率半径 ρ を持つ. これによって, 放射積分 I_5 を抑制することが可能となる.

$$I_5 = \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds$$
$$H = (\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2)$$

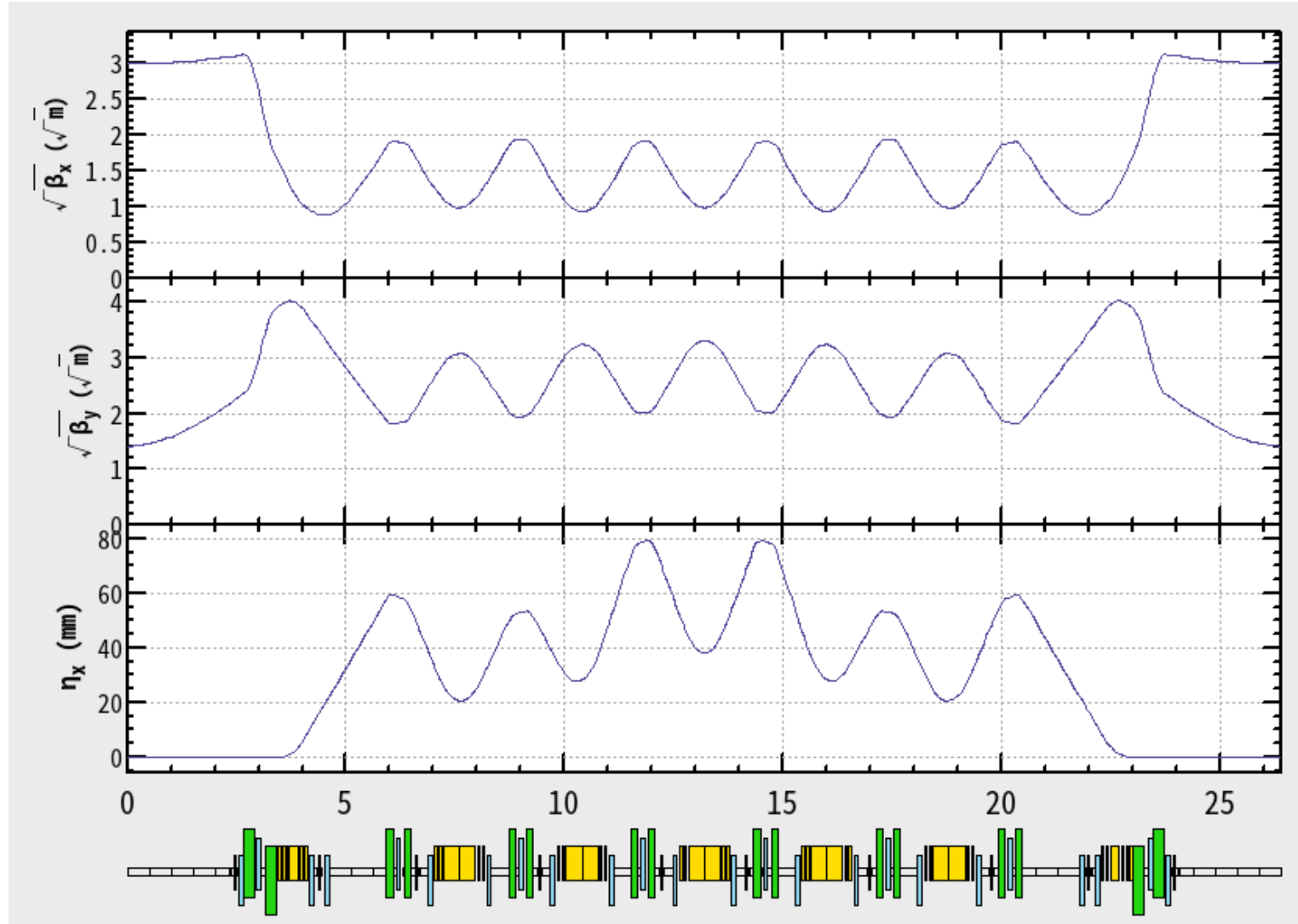


3. *Lattice · Optics* の設計

3.3. Multi-bend Achromat (MBA)

- 同時に偏向磁石には4極成分も付与し
(機能結合型偏向磁石 (Combined Bend)), I_4 の調整も可能となっている.
- これまでのFODOやDBAとは異なり, I_4 が負の値を持ち, 減衰分配係数 (Damping Partition Number) J_x がおよそ2まで近付いている.
- ρk_1 という, 2極成分と4極成分のカップリング効果を利用. ここで $k_1 < 0$, つまり発散であれば, I_4 は負となり, ε_x の低減に貢献する.
- 分散を効果的に抑制できたことで, chromaticity補正のための6極磁石への負担が大きくなり, **Dynamic Aperture (DA)** の確保にさらなる注意を払う必要がある.

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds \quad J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} \quad \varepsilon_x = C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} = C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 J_x}$$



$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \oint (2\lambda(s)\eta_x(s) - K_1(s))\beta_{Tx}(s)ds$$

3. *Lattice · Optics の設計*

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds \qquad J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} \qquad \varepsilon_x = C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} = C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 J_x}$$

3.3. *Multi-bend Achromat (MBA)*

Table 3 MAX IV の主要パラメータ (2014 年報告 [7]).

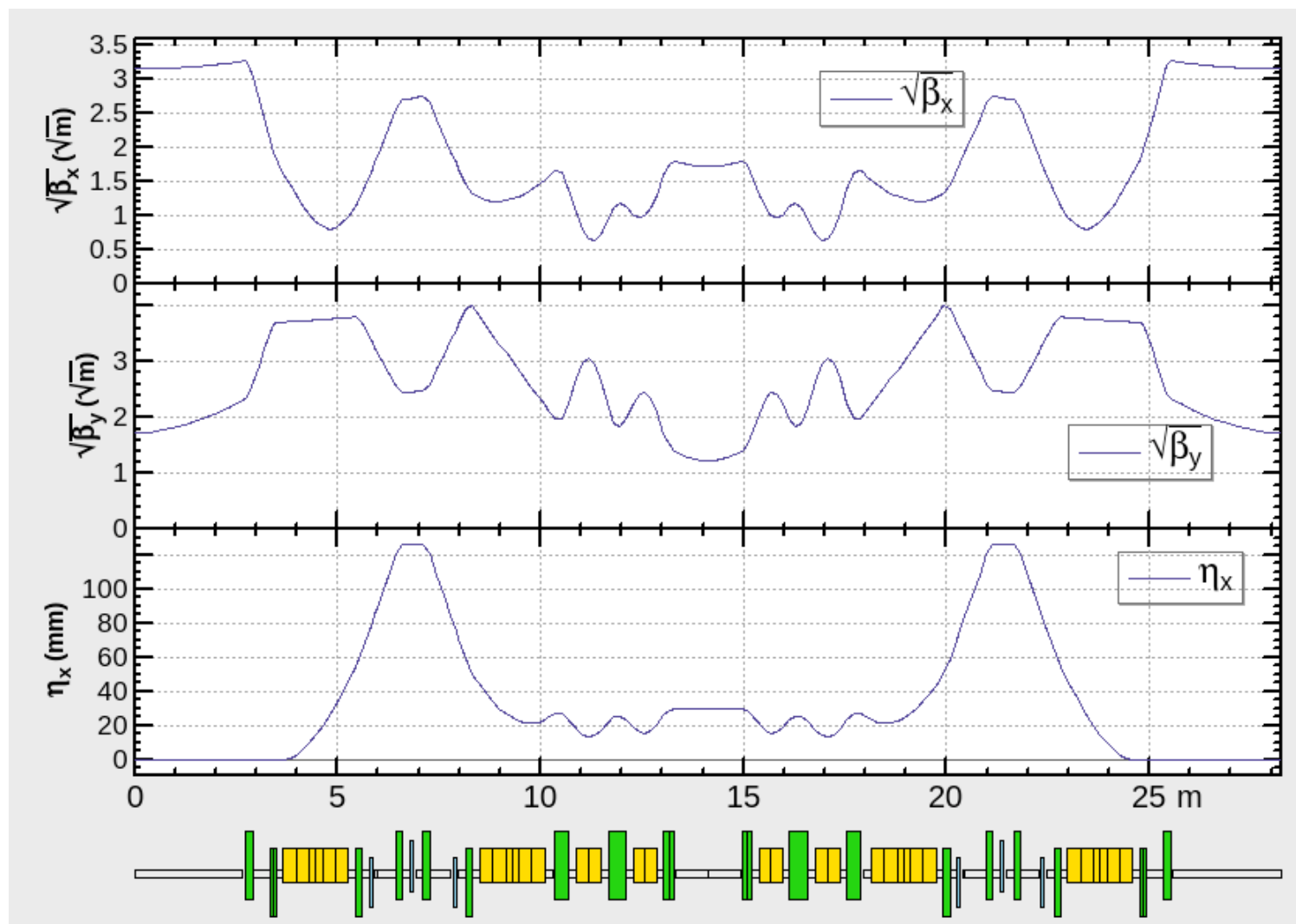
エネルギー	E_0 [GeV]	3
周長	C [m]	528
エネルギー損失	U_0 [MV/turn]	0.364
Momentum Compaction Factor	α_m	3.060×10^{-4}
減衰時間	$\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms]	15.724, 29.045, 25.195
減衰分配係数	J_x, J_y, J_ϵ	1.8472, 1.000, 1.1528
Betatron Tune (x, y)	ν_x, ν_y	 42.200, 16.280
Natural Chromaticity (x, y)	ξ_x, ξ_y	-50, -51
水平エミッタンス	ε_x [nmrad]	0.328 
エネルギー幅	σ_ϵ/E	7.686×10^{-4}
放射積分	I_1	1.616×10^{-1}
	I_2	3.190×10^{-1}
	I_3	1.645×10^{-2}
	I_4	-2.703×10^{-1} 
	I_5	1.464×10^{-5}

[7] Tavares, P. F., Leemann, S. C., Sjöström, M. and Andersson, AA., The MAX IV storage ring project, J. Synchrotron Rad. 21, 862 - 877 (2014)

3. Lattice · Optics の設計

3.4. Hybrid-MBA (HMBA)

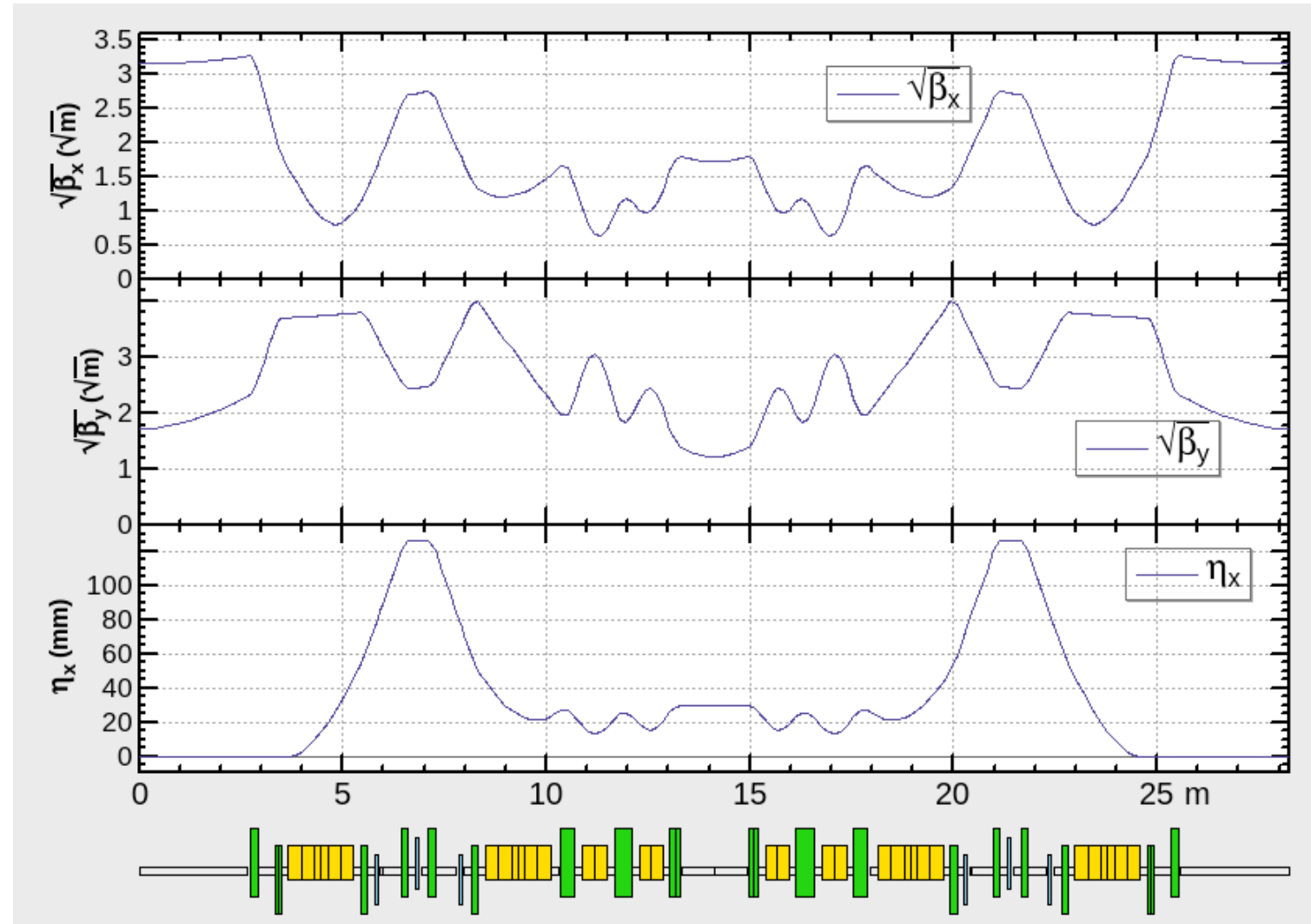
- DAの確保が比較的容易におこなえて、かつ低エミッタンスopticsを実現できるのが特徴。
 - KEKのPF-ring後継機として検討されていたKEK-LSを例に示す[1].
 - (最終的 Conceptual Design Report (CDR)で採用されたものは分散を漏らし, 水平エミッタンスのさらなる低減を実現している[1]).



3. Lattice · Optics の設計

3.4. Hybrid-MBA (HMBA)

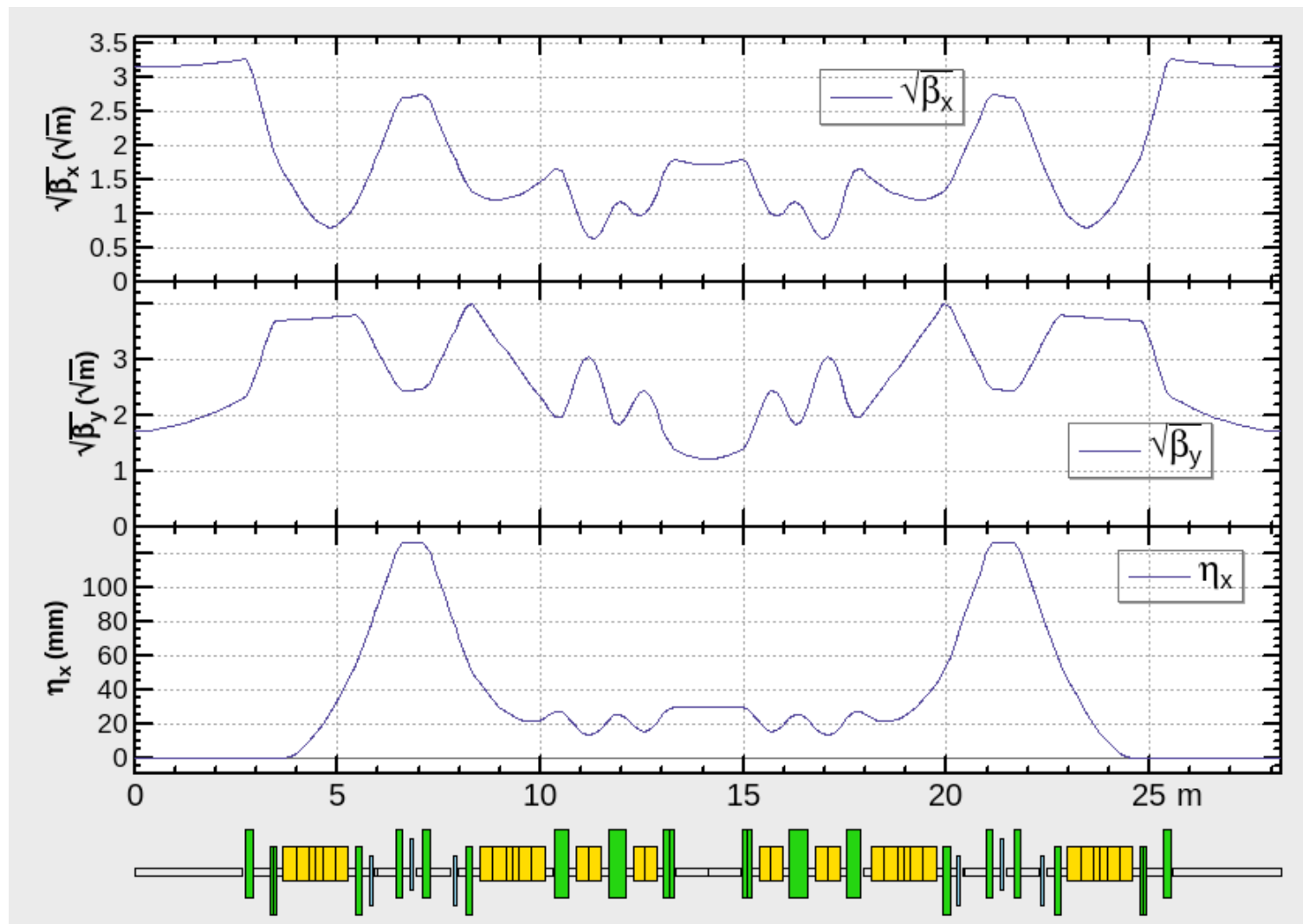
- HMBAはESRF-EBSが世界に先駆けて実現したlatticeで[1], MBAと比較してcell両端の分散がある程度大きくなるように調整がなされている.
- これによってMBAでは強くせざるを得なかった6極磁場を, 分散が大きいところに6極磁石が設置することで, その磁場強度を緩和することが可能となっている.
- また, 6極磁石が設置される分散ピーク間の位相 (tune)を180度に近づけ(その間の転送行列が $-I$ となる), 6極磁石の非線形効果を打ち消すような設計を導入している. これによって, MBAでは難しかったDAの緩和をより楽に進めることが可能となっている.



3. Lattice · Optics の設計

3.4. Hybrid-MBA (HMBA)

- MAX IVやESRF-EBS同様, KEK-LSでも longitudinal gradient bendやcombined bendを採用し, より柔軟に低エミッタンス化できるような工夫がなされている.



3. *Lattice · Optics の設計*

3.4. *Hybrid-MBA (HMBA)*

Table 4 KEK-LS の主要パラメータ.

エネルギー	E_0 [GeV]	3
周長	C [m]	565
エネルギー損失	U_0 [MV/turn]	0.294
Momentum Compaction Factor	α_m	1.995×10^{-4}
減衰時間	$\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms]	20.448, 38.444, 34.331
減衰分配係数	J_x, J_y, J_ϵ	1.880, 1.000, 1.120
Betatron Tune (x, y)	ν_x, ν_y	 47.150, 17.220
Natural Chromaticity (x, y)	ξ_x, ξ_y	-62, -61
水平エミッタンス	ϵ_x [nmrad]	0.153 
エネルギー幅	σ_ϵ/E	7.323×10^{-4}
放射積分	I_1	1.127×10^{-1}
	I_2	2.579×10^{-1}
	I_3	1.173×10^{-2}
	I_4	-2.268×10^{-1} 
	I_5	5.632×10^{-6}

backup