

4-4 非線形オプティクス最適化(下崎)

(前半) 非線形オプティクス最適化とは

(後半) 電子蓄積リングにおける非線形オプティクスの設計例

前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

後半の概要:

- 1 非線形オプティクス補正の方法について
- 2 非線形共鳴と振幅依存チューンを補正したら
入射効率が良くなった話(まずはお話のベースとして)
- 3 更に非線形共鳴と振幅依存チューンを補正したら
入射効率が悪化した話(振幅依存center shiftの補正について)
- 4 更にスキュー六極磁場が励起する非線形共鳴を
ノーマル六極磁場で回避して入射効率が良くなった話
- 5 極低エミッタンス化に向けてのストラテジー

非線形オプティクス設計とは

ラティス設計とは：

ビームを高品質に保つために、偏向磁石・四極磁石・六極磁石などを、どれくらいの磁場強度で、どのような配置に並べるかを検討すること

ラティスとは：磁石の並びのこと

線形オプティクス設計とは：

- ・ ラティスは変えない（既にある状態）。
- ・ 線形磁場（＝四極磁場と偏向磁場）を調整してチューン、ラティス関数などを決める。
- ・ 運転の基準点を作ることに相当。

非線形オプティクス設計：

- ・ ラティスは変えない（既にある状態）。
- ・ 非線形磁場（今回は六極磁場）を調整して、ビーム安定領域（ダイナミックアパーチャ、モーメントムアパーチャ）を広げる。
- ・ ビームや加速器にエラーがあっても安定に運転できるようにするのが目的。

今回のお話



なぜ加速器調整を行うのか

- (1) ユーザー実験の条件を変えないために
 - ・ ビーム強度の安定化
 - ・ ビーム軌道の安定化
 - ・ ビーム形状の安定化などを行う (ビームの再現性)

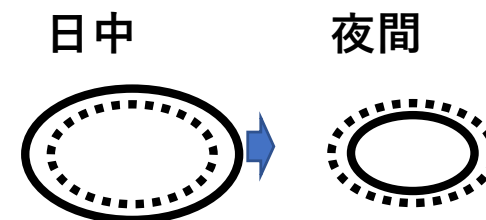
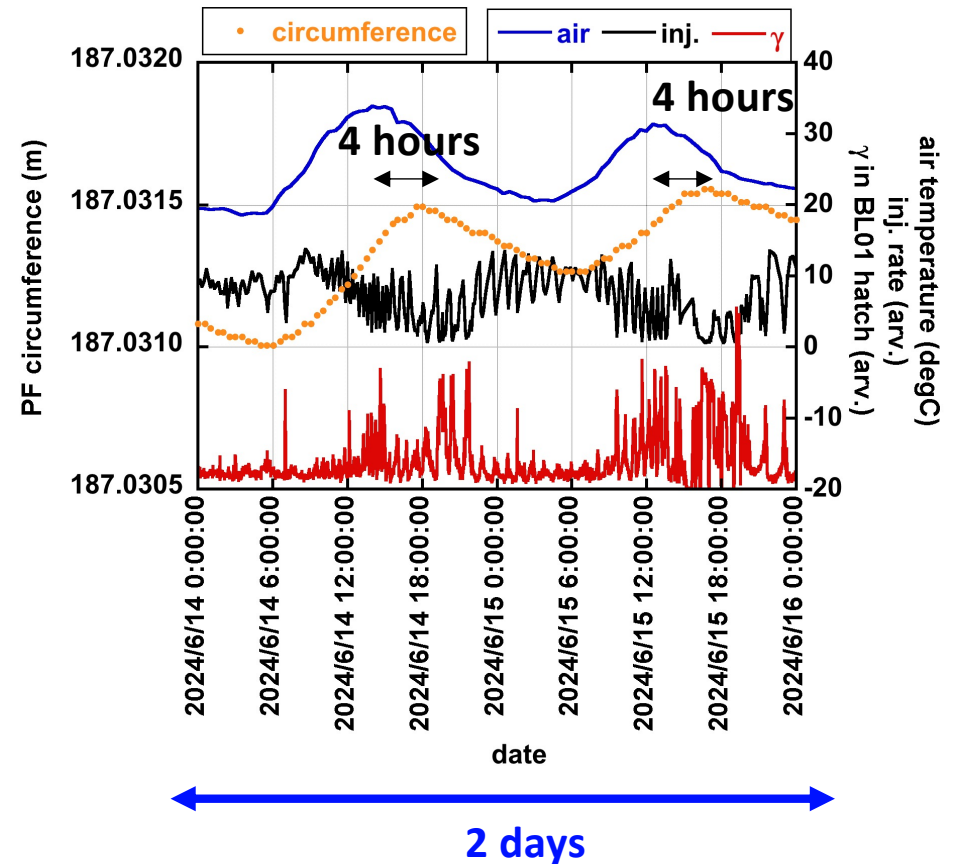
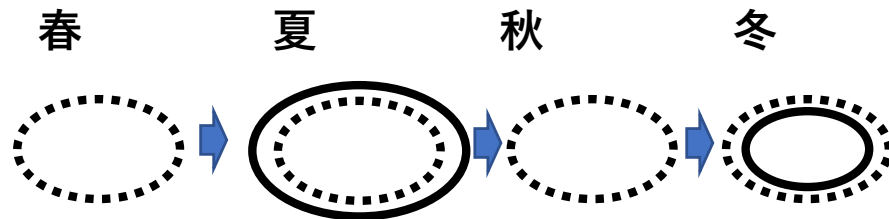
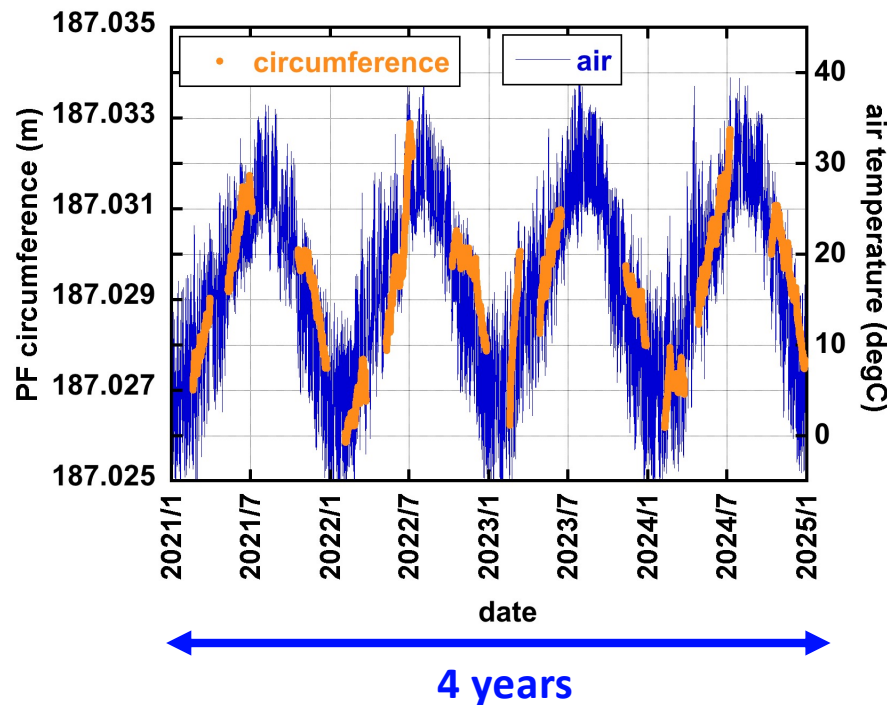
- (2) ビームロスは
 - ・ 機器の故障
 - ・ 機器の放射化を招くので、
 - ・ ビームロスの抑制
 - ・ ビームロス発生箇所の局所化などを行う

- (3) 加速器の高度化に向けた試験を行う
 - ・ ビームサイズの低減や成形
 - ・ ビーム電流の増強
 - ・ 運転経費の低減
 - ・ 「故障による運転停止時間」の低減 など

気温によるPFリングの変形

リングの変形でビームが入らなくなる
→ ユーザー実験の再現性のために
加速器調整が必要

気温の変化でリングの形状が変わる

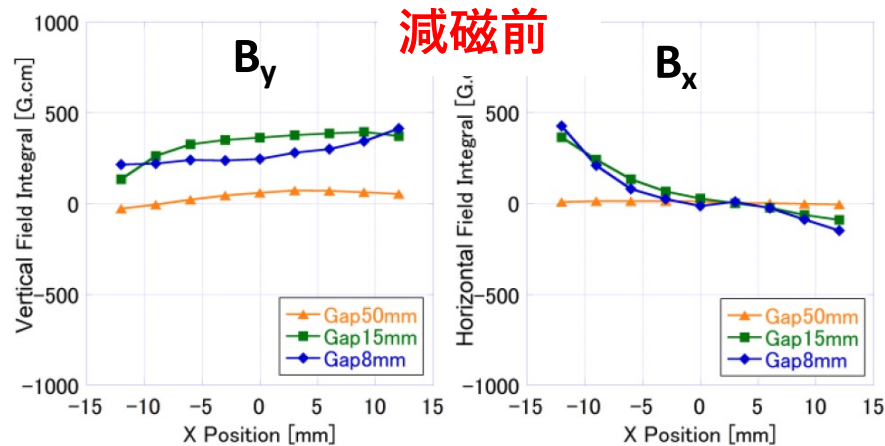


ビームロス制御の必要性

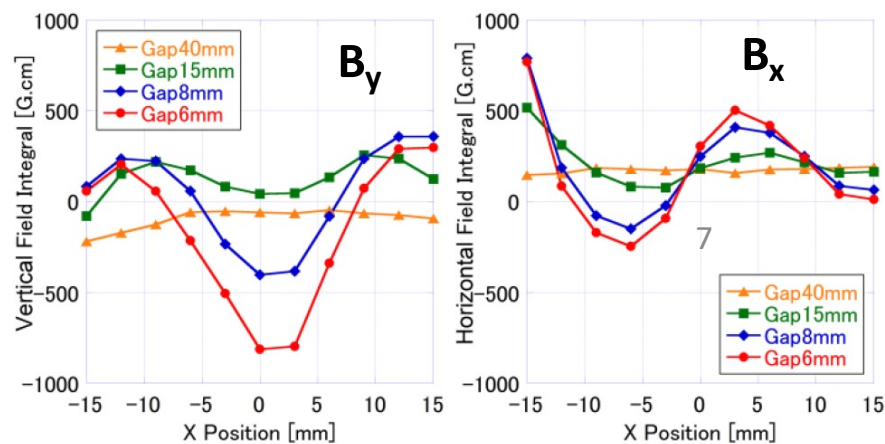
ビームロスは機器の熱的損傷、放射線損傷、放射化を引き起こす。
＝ ビームロスの制御は重要な課題。

挿入光源(ID10)の減磁@ SPring-8

長谷川照晃、第12回日本加速器学会, THP023.



(a) Before install **減磁後** ary, 1998

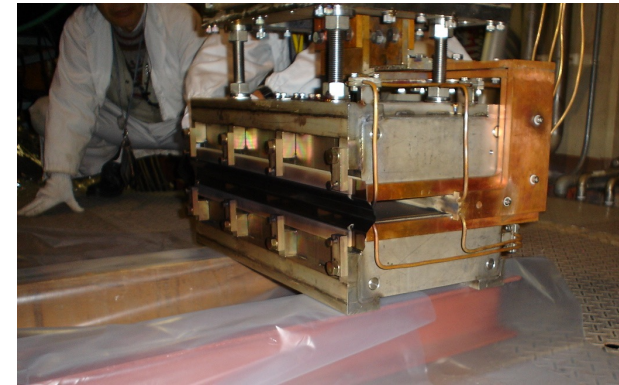


(b) Before correction in February, 2015

減磁するとユーザーの欲しい光が出ない

機器の放射化

KEK-PSブースターの取り出しセプタム



故障時、下崎は写真撮影係として同行。



30分で放射線バッジから警告音
(1ヶ月分のリミットオーバー)

では**作業担当者の負担**は？

放射化すると壊れても触れない

＝修理できない

ビームロスを抑制し放射化を避ける必要。

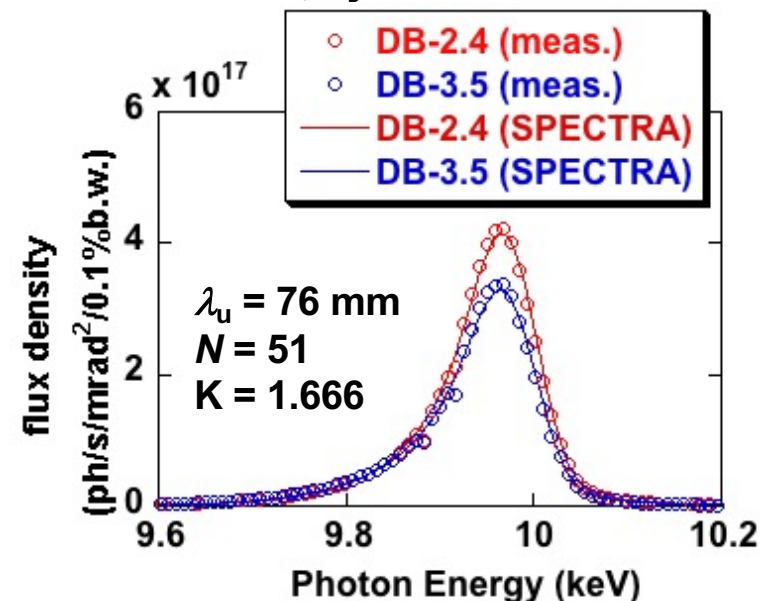
SPring-8: 第3世代大型放射光施設

Storage Ring Design Parameters @ 8 GeV

	DB-3.5 ~ May 2013	下崎 → DB-2.4 Present
Natural Emittance	3.49 nm.rad	2.41 nm.rad
σ_E / E	0.11 %	
Betatron Tune	(40.14 , 19.35)	(41.14 , 19.35)
Natural Chromaticity	(-88 , -42)	(-117 , -47)

フラックス密度測定

BL05SS, by JASRI 正木氏



非線形オプティクス 最適化を適用

DB-2.4の入射効率改善の履歴

→	チューニング開始時の積上入射効率	: 8 %
→	→ 振幅依存チューン補正	: 34 %まで改善
→	→ ハーモニック六極調整 (beam-based)	: 57 %
→	→ 入射バンプ・セプタム磁石 蹴角調整	: 74 %
→	→ 六極磁石再調整 (応答関数 + CETRA)	: 84 %
→	→ 入射軌道調整	: 89 %
→	→ 六極磁石再々調整	: 94 %まで達成

DB-3.5の入射効率：90 %

激減

入射効率が悪い = ビームロスが多い +
ユーザー運転を維持できない

なぜ加速器調整を行うのか

非線形
オプティクス
最適化が必要

(1) ユーザー実験の条件を変えないために

- ・ ビーム強度の安定化
 - ・ ビーム軌道の安定化
 - ・ ビーム形状の安定化
- などを行う (ビームの再現性)



(2) ビームロス

- ・ 機器の故障
 - ・ 機器の放射化
- を招くので、
- ・ ビームロスの抑制
 - ・ ビームロス発生箇所の局所化
- などを行う



(3) 加速器の高度化に向けた試験を行う

- ・ ビームサイズの低減や成形
- ・ ビーム電流の増強
- ・ 運転経費の低減
- ・ 「故障による運転停止時間」の低減 など

前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ビーム安定領域とは何か
- ・なぜビーム安定領域ができるのか
- ・なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・なぜ六極磁場が必要なのか
- ・なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・非線形共鳴について
- ・振幅依存チューンについて
- ・非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

非線形オプティクス設計とは

ラティス設計とは：

ビームを高品質に保つために、偏向磁石・四極磁石・六極磁石などを、どれくらいの磁場強度で、どのような配置に並べるかを検討すること

ラティスとは：磁石の並びのこと

線形オプティクス設計とは：

- ・ラティスは変えない（既にある状態）。
- ・線形磁場（＝四極磁場と偏向磁場）を調整してチューン、ラティス関数などを決める。
- ・運転の基準点を作ることに相当。

非線形オプティクス設計：

- ・ラティスは変えない（既にある状態）。
- ・非線形磁場（今回は六極磁場）を調整して、ビーム安定領域（ダイナミックアパーチャ、モーメントムアパーチャ）を広げる。
- ・ビームや加速器にエラーがあっても安定に運転できるようにするのが目的。

今回のお話 ➡

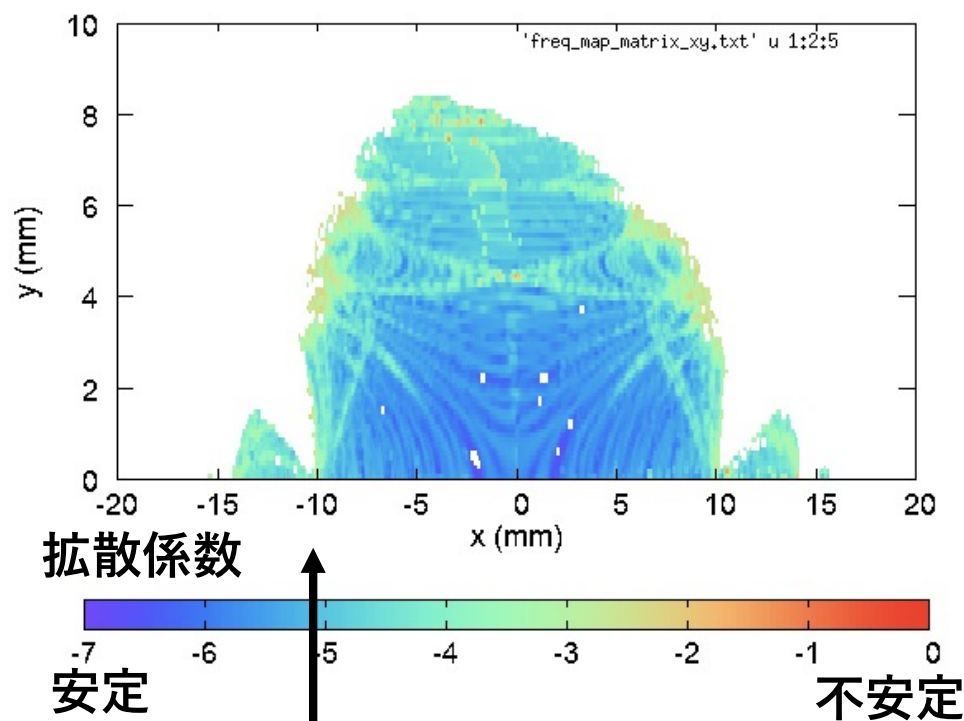
ビーム安定領域について (1 / 2)

X-Y空間のビーム安定領域 (ダイナミックアパーチャ)

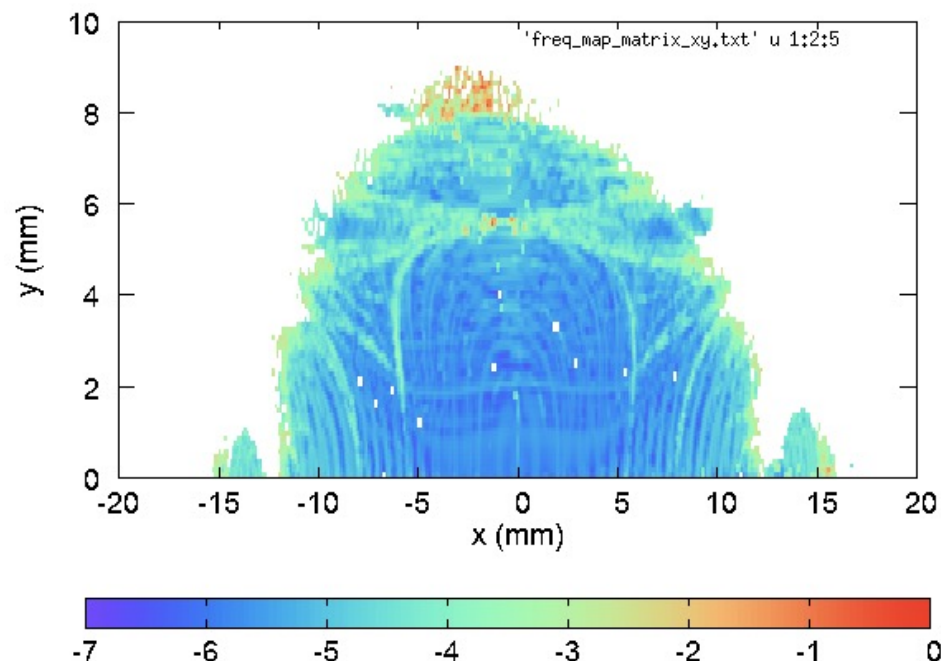
色のついたところが安定領域。白いところはビームが存在できない領域。
=色のついたところにビームを入射しないと、ビームは失われる。

ただし赤色に近づくほど不安定
=エラーの大きさによっては不安定領域に転じる可能性。

非線形オプティクス最適化前



非線形オプティクス最適化後



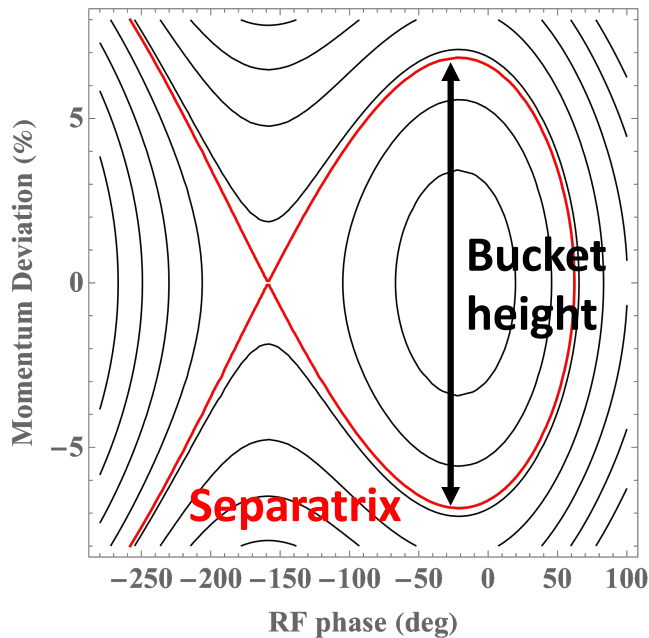
入射点

ビーム安定領域について (2 / 2)

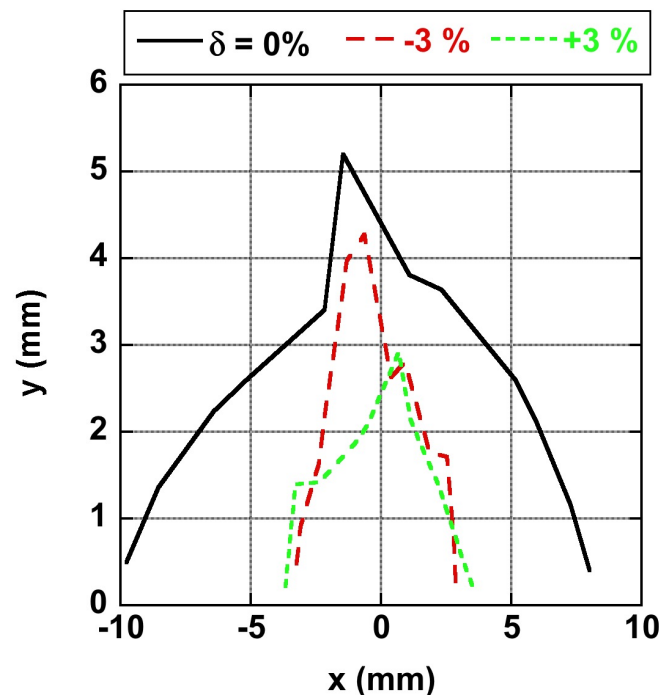
モーメントムアクセプタンス (1 / 2)

- ・シンクロトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス
 - ・ベータトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス
- } の狭い方が支配的となる

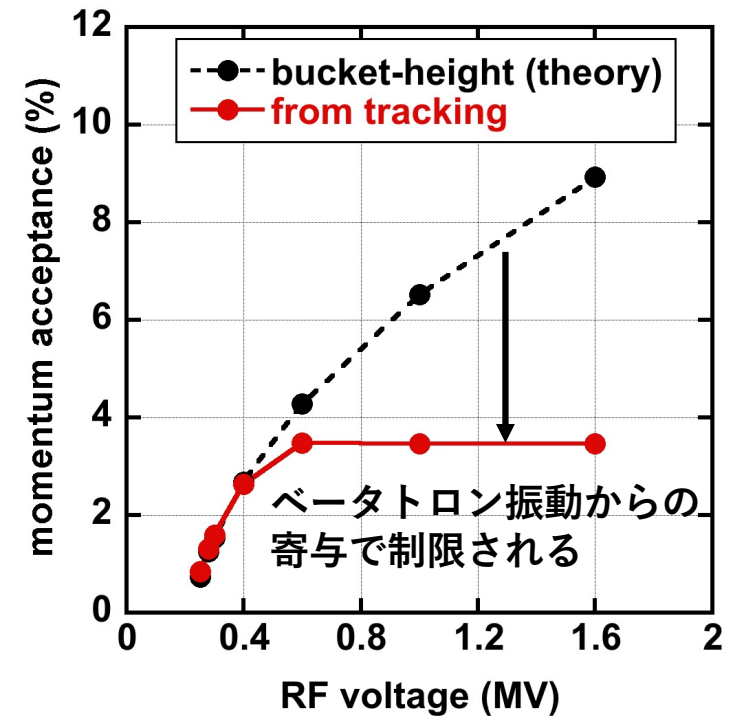
シンクロトロン振動で決まる モーメントムアクセプタンス



ベータトロン振動で決まる モーメントムアクセプタンス



モーメントムアクセプタンスの RF電圧依存性



前半の概要：

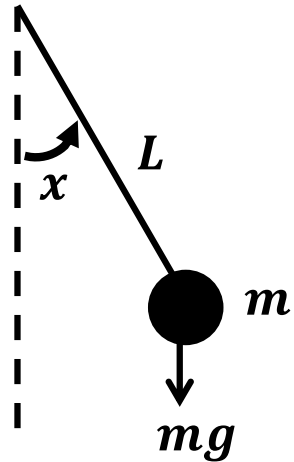
1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ **なぜビーム安定領域ができるのか**
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

なぜビーム安定領域ができるのか：振り子の運動から(1/4)



運動方程式

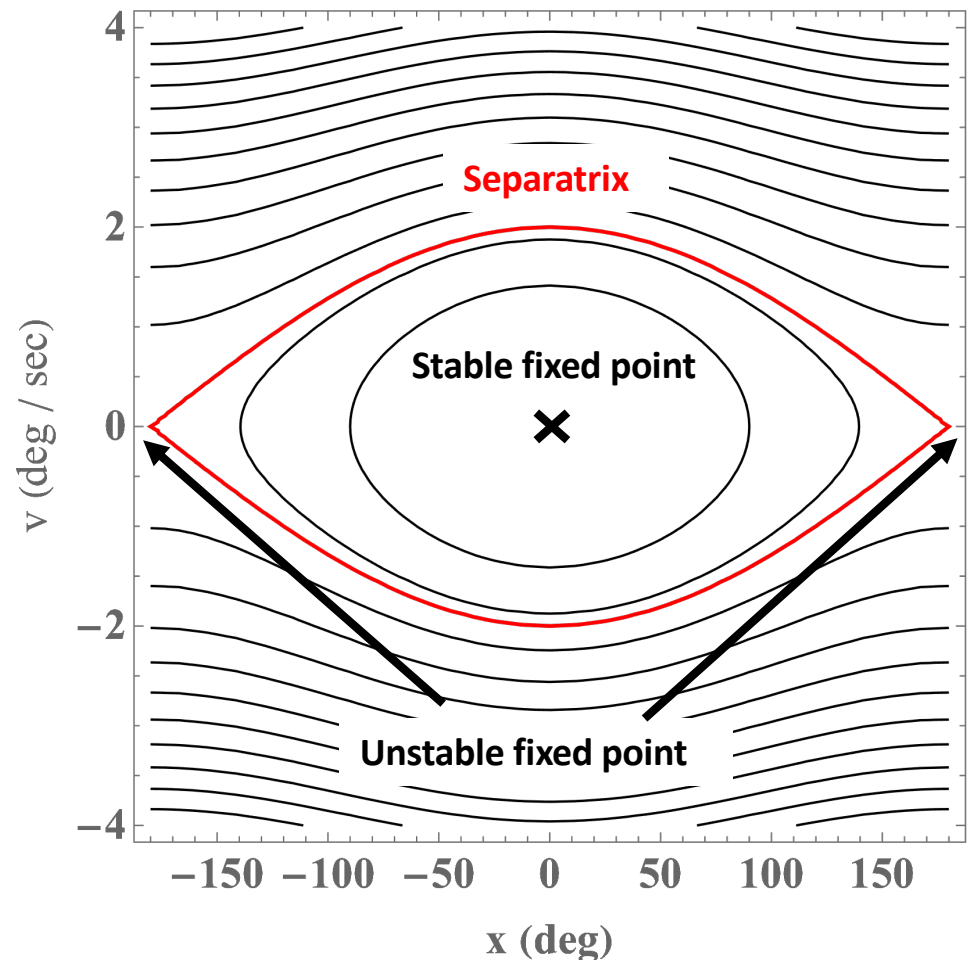
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 \sin x \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \omega_0^2 \cos x = \text{const.}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

位相空間での軌道：

$$\frac{1}{2}v^2 - \omega_0^2 \cos x = \text{const.}$$

位相空間で見た軌道



不動点について

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = (0, 0)$ を満たす点 = 不動点

振り子の場合、
 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ が
安定不動点となる

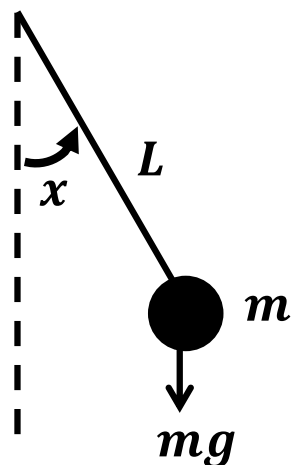
振り子の場合、
 $(x, \dot{x}) = (\pm\pi, 0)$ が
不安定不動点となる



不安定不動点を通る
軌道をセパトリクス
という

なぜビーム安定領域ができるのか：振り子の運動から(2/4)

運動方程式

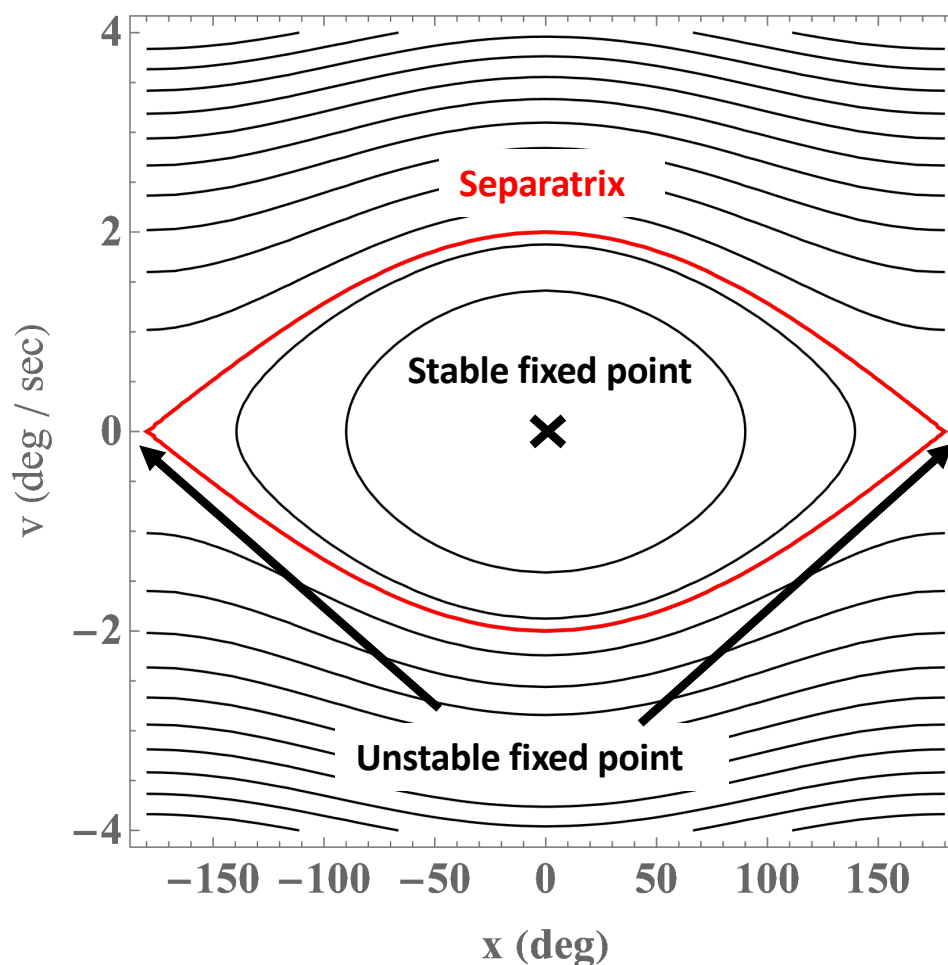


$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 \sin x \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \omega_0^2 \cos x = \text{const.}$$
$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

位相空間での軌道：

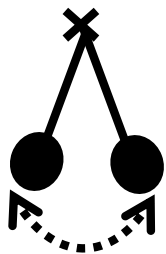
$$\frac{1}{2}v^2 - \omega_0^2 \cos x = \text{const.}$$

位相空間で見た軌道

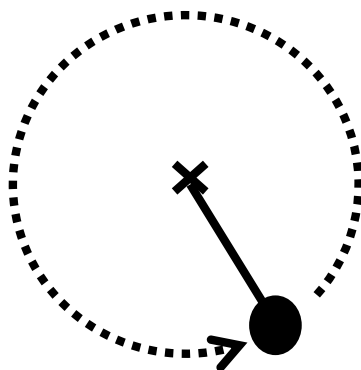


運動の種類について

セパトリクスの内側では振動運動となる



セパトリクスの外側では回転運動となる



なぜビーム安定領域ができるのか：振りの運動から(3/4)

周波数について

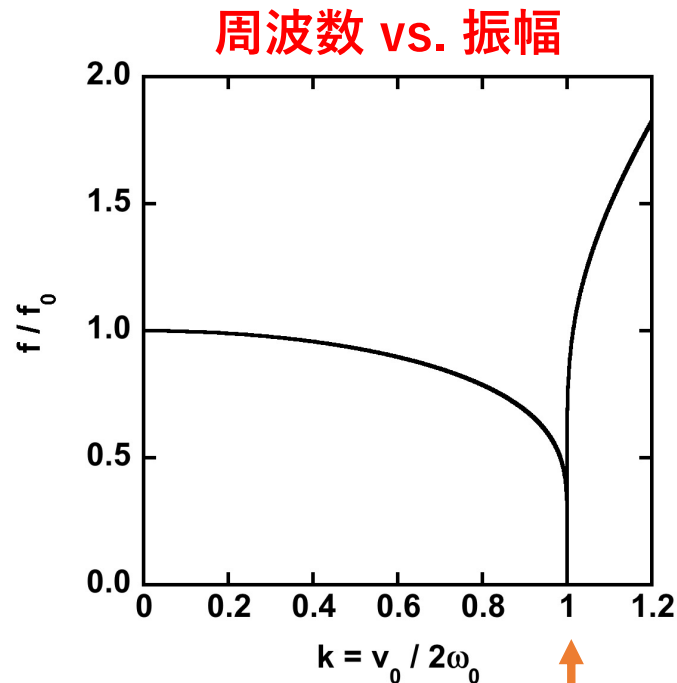
- ・ 調和振動の場合、
周波数は振幅によらず一定

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

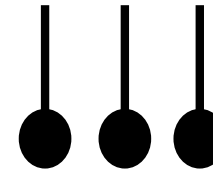
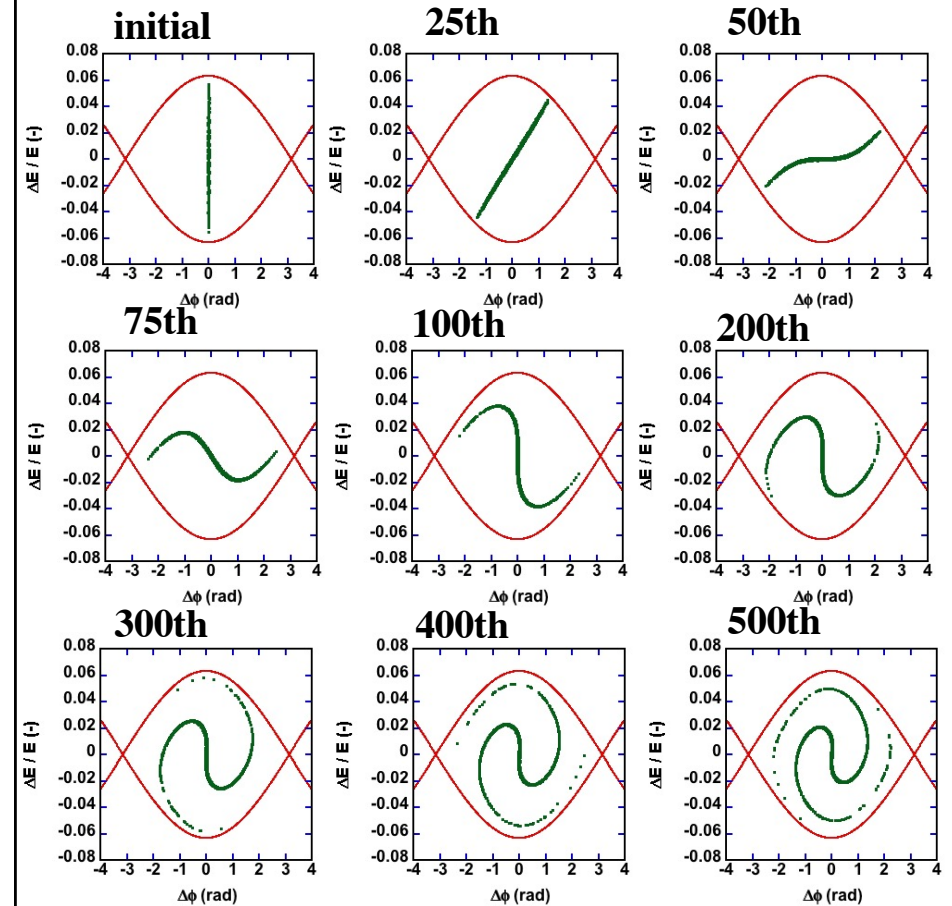
- ・ 振りの運動の場合、
周波数は振幅に依存する

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin x$$

調和振動の場合が $f/f_0 = 1$



振りの運動の時間発展例



複数の振りの初期値を
変えて位相空間での
軌道を計算したイメージ

なぜビーム安定領域ができるのか：振り子の運動から(4/4)

運動方程式が同じでも
セパトリクスの内側と外側で挙動が異なる。
＝「初期値依存性」がある。

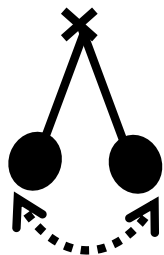
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0^2}{6} x^3 + \dots$$

振り子の運動と同様、
非線形磁場がある時のビーム運動も初期値依存性がある。

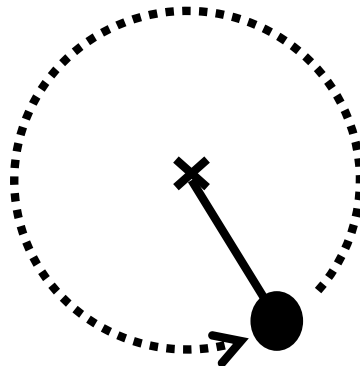
＝ビームの存在できる領域（ビーム安定領域）と
ビームの存在できない領域ができる

運動の種類について

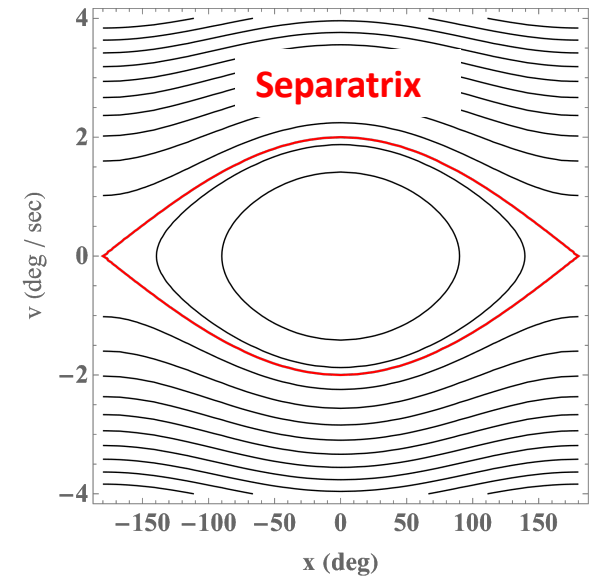
セパトリクスの
内側では振動運動
となる



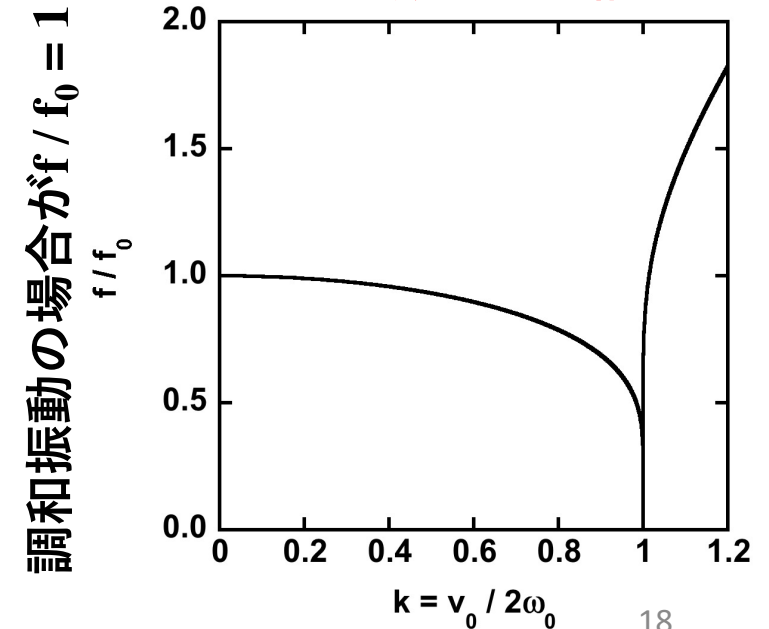
セパトリクスの
外側では回転運動
となる



位相空間で見た軌道



周波数 vs. 振幅



前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ **なぜビーム安定領域を広げないといけないのか**

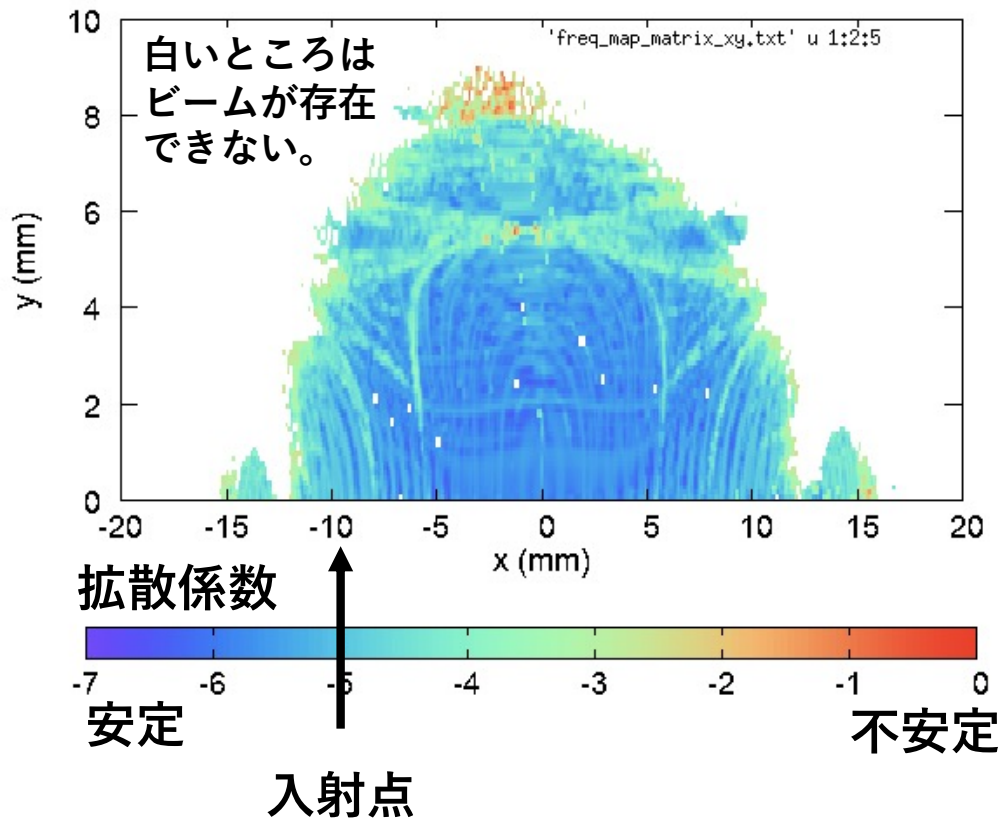
2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

ビーム安定領域拡張の必要性 (1/3)

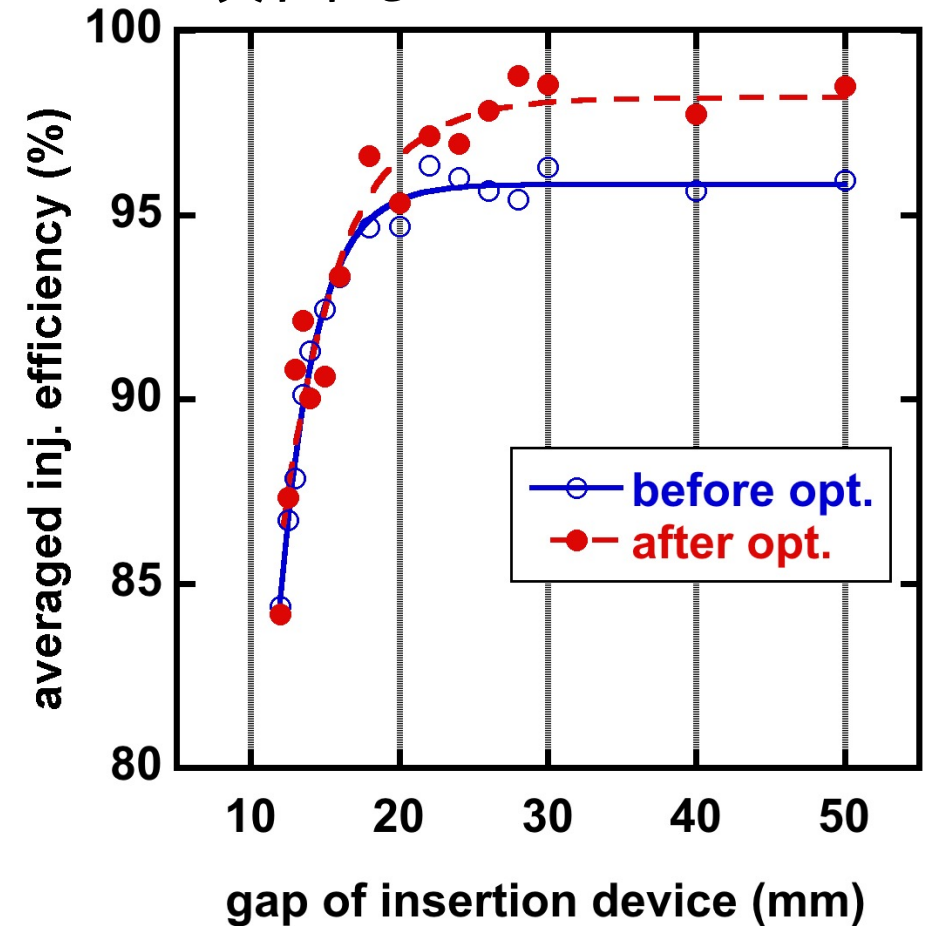
x-y空間のビーム安定領域 (ダイナミックアパーチャ)

色のついたところが安定領域
ただし赤色に近づくほど不安定
＝条件によっては不安定領域に転じる可能性



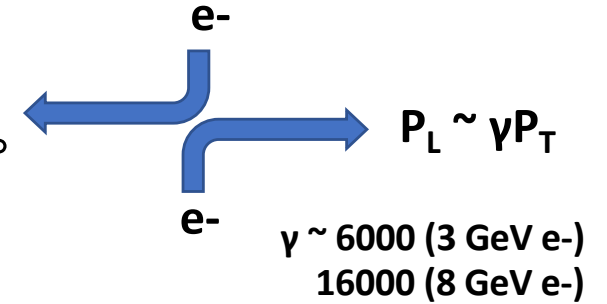
入射効率 (測定値)

ダイナミックアパーチャの
内側に入射しないとビームが
失われる



ビーム安定領域拡張の必要性 (2/3)

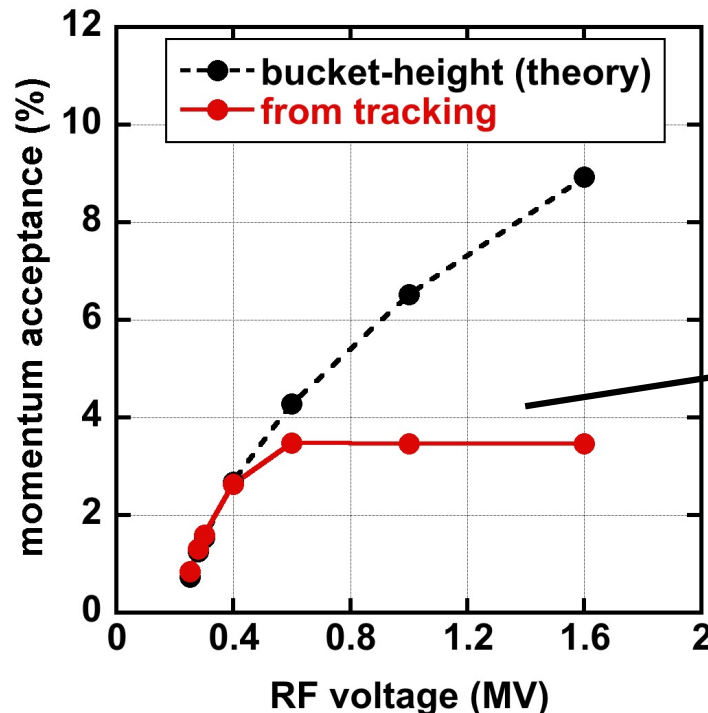
バンチ内の散乱で電子ビームの横方向運動量(P_T)が縦方向の運動量(P_L)に変換されると、相対論効果で γ 倍になる。



P_L がモーメントアクセプタンスを超えるとビームが失われる (タウシェック寿命)。

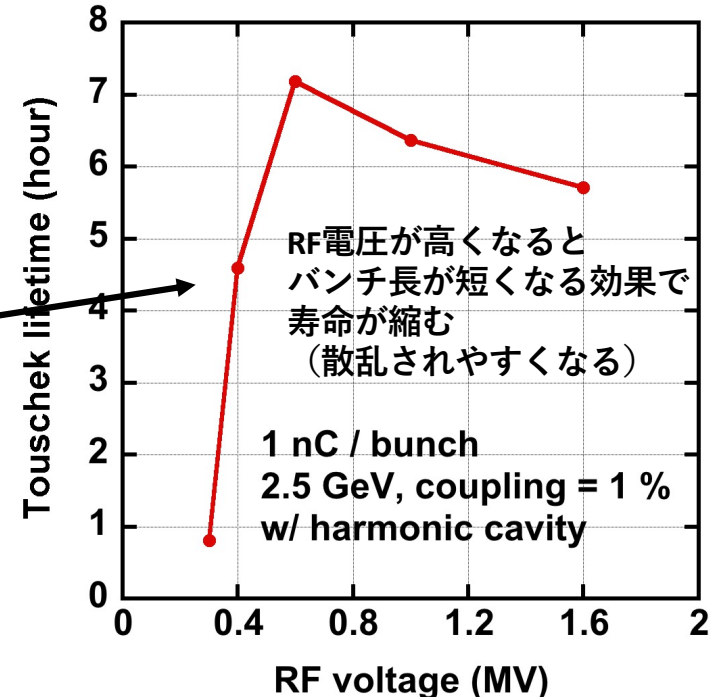
蓄積電流: $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

モーメントアクセプタンス



赤線のモーメントアクセプタンスで寿命が決まる

タウシェック寿命 (計算)



ビーム安定領域拡張の必要性 (3/3)

蓄積リング型放射光施設では、電子ビームが**寿命**を持っている。

蓄積電流：

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

→ 蓄積電流が一定値以下に減少したら、ユーザー運転を継続しながら
継ぎ足し入射（＝**トップアップ入射**）を行う。

トップアップ入射は、蓄積リング型放射光施設において
必要不可欠な運転形態である。

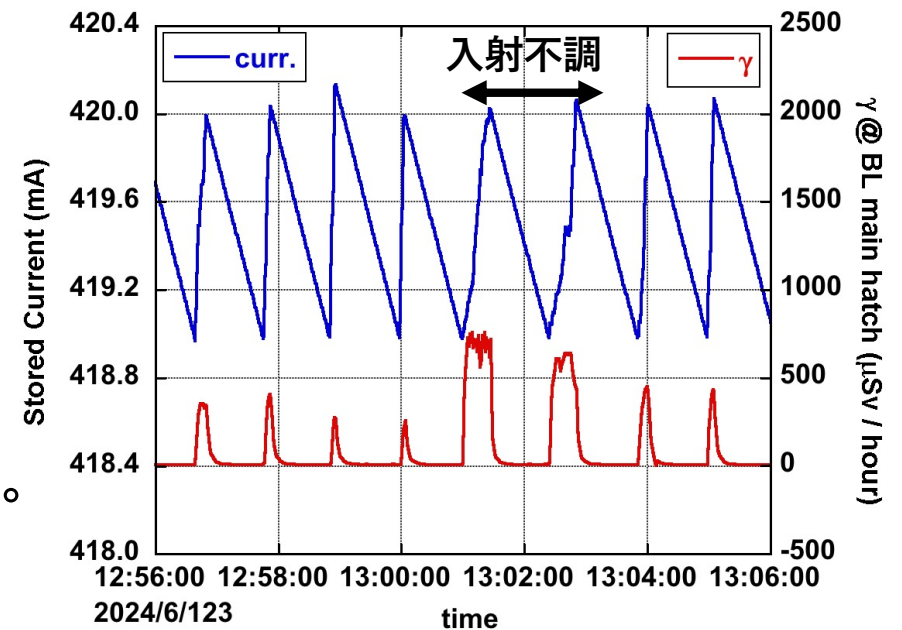
ただし安定領域が狭いと**トップアップ入射**の際に
ビームロスを生じて

- ・ 放射線の問題（人的防護、環境の放射化）
 - ・ 機器損傷の問題（熱的損傷、放射線損傷）
- を生じうる。



安定にユーザー運転を行うために
ビームの存在できる安定領域を拡張する必要がある。

トップアップ入射例@PF ring



前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

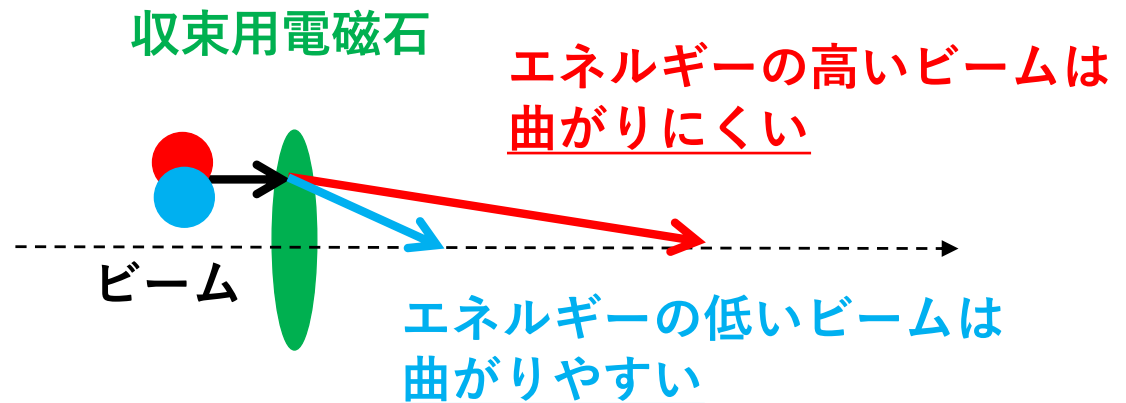
2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ **なぜ六極磁場が必要なのか**
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

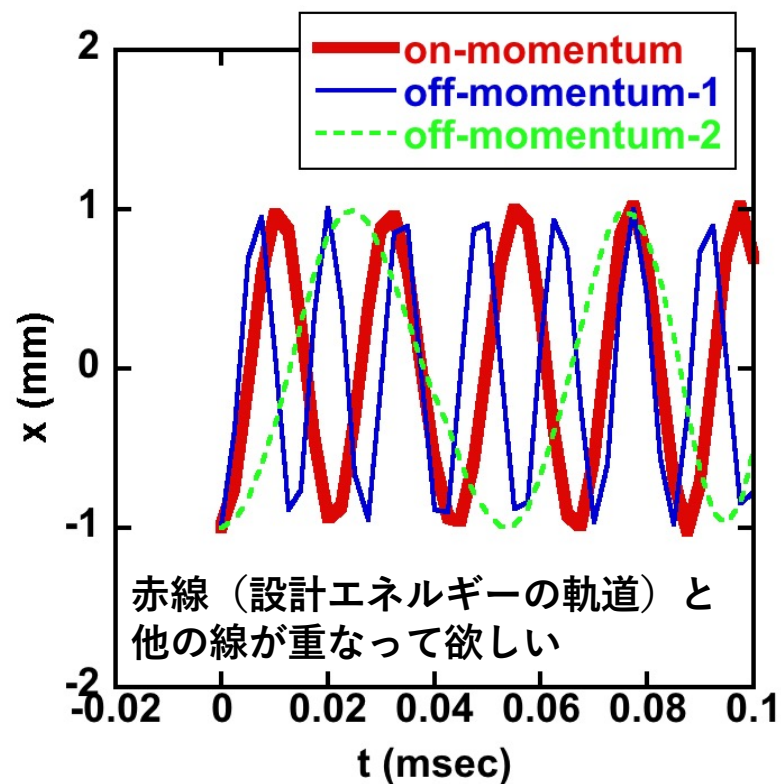
なぜ六極磁石が必要か(1/2)

相対論領域の場合

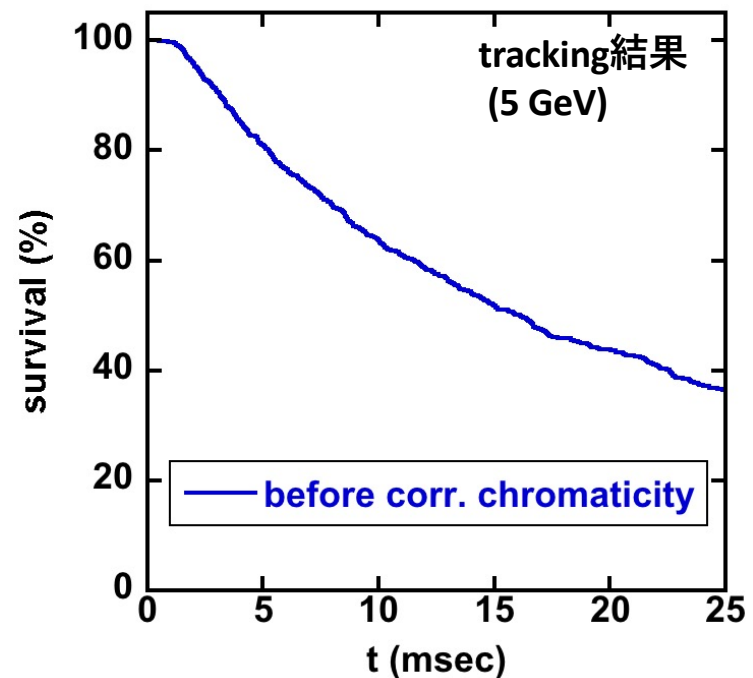
ビームの焦点距離が
エネルギーの違いによって
変わる（色収差）。



ビーム軌道例（色収差補正前）



色収差を補正しない場合の ビームの生存率（例）



なぜ六極磁石が必要か(2/2)

相対論領域の場合

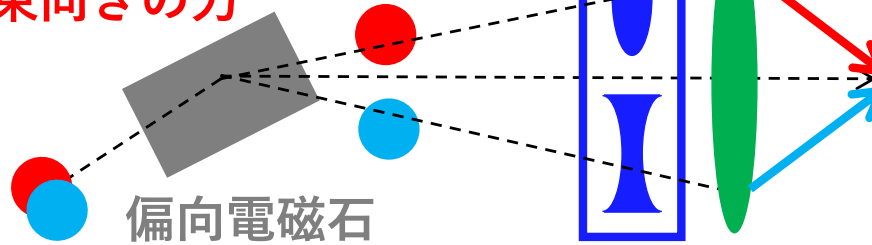
色収差補正：

エネルギーの違いを利用して偏向電磁石で軌道を分けて

六極磁場で焦点距離を補正する。

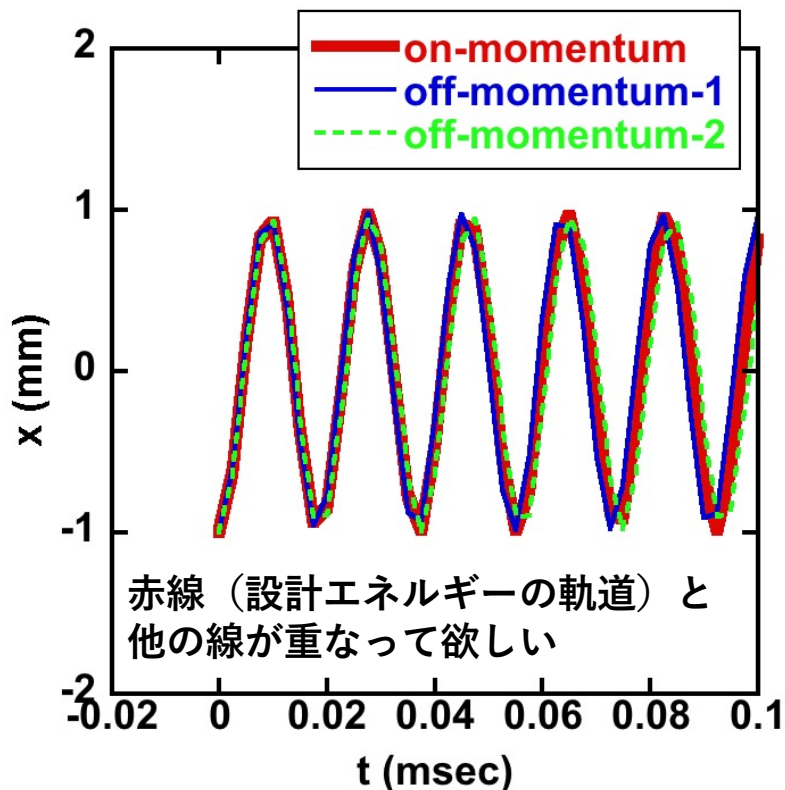
六極磁場：

高エネルギーのビームには
収束向きの力

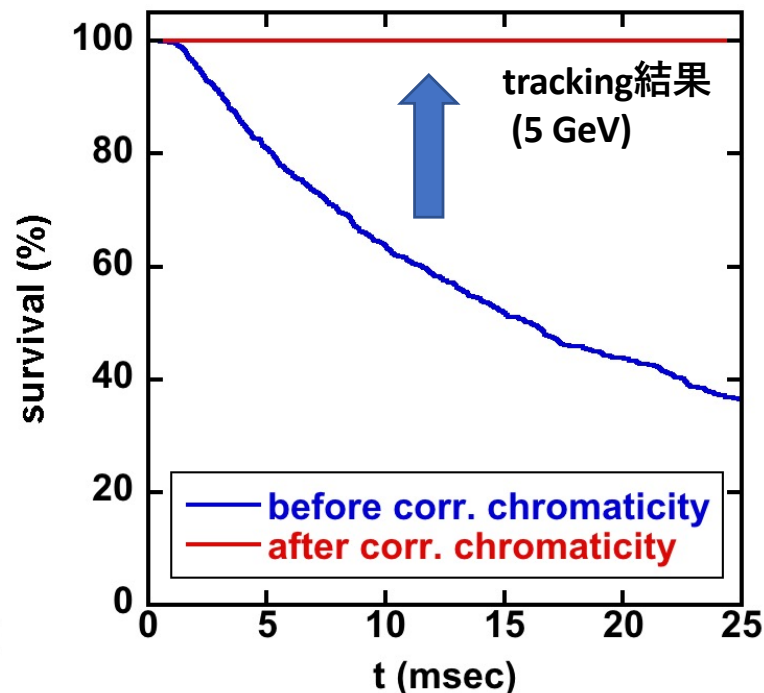


低エネルギーのビームには発散向きの力

ビーム軌道例 (色収差補正後)



色収差を補正した場合の
ビームの生存率 (例)



PFの六極磁石



六極磁場

$$B_y = \frac{B''}{2} (x^2 - y^2)$$

$$B_x = -B''xy$$

クロマティシティ補正の式

相対論領域の場合

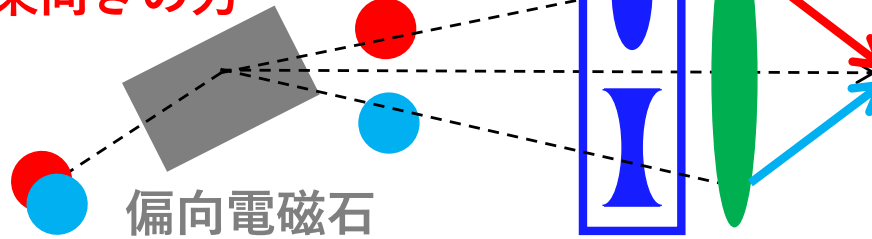
色収差補正：

エネルギーの違いを利用して偏向電磁石で軌道を分けて

六極磁場で焦点距離を補正する。

六極磁場：

高エネルギーのビームには収束向きの力



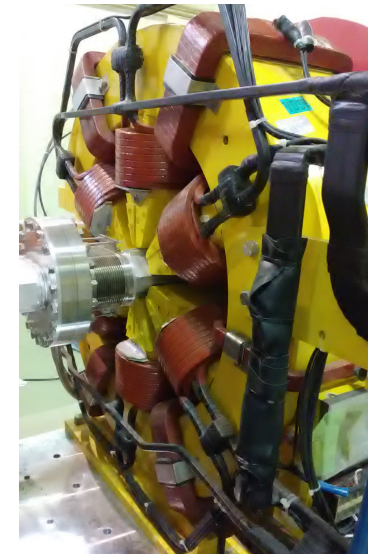
偏向電磁石

低エネルギーのビームには発散向きの力

六極磁石

$$\begin{aligned} \text{"natural chromaticity"} + \frac{1}{4\pi} \int_0^c ds \, k(s) \beta(s) D_x(s) \\ = \text{"required chromaticity"} \end{aligned}$$

PFの六極磁石



六極磁場

$$B_y = \frac{B''}{2} (x^2 - y^2)$$

$$B_x = -B'' xy$$

前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ **なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか**
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

六極磁場が有る時のベータトロン振動の式

六極磁場：

$$B_y = \frac{B''}{2}(x^2 - y^2)$$
$$B_x = -B''xy$$

ベータトロン振動の式：

$$x'' + K(s)x = -k(s) \frac{x^2 - y^2}{2}$$
$$y'' - K(s)y = +k(s)xy$$
$$k = \frac{B''}{B\rho}$$

六極磁場係数

ハミルトニアン：

$$H(x, x', y, y'; s) = H_0(x, x', y, y'; s) + \frac{k(s)}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

↑
無摂動時の
ハミルトニアン

↑
六極磁場が
作るポテンシャル

六極磁場が誘起する諸現象

(Q_x, Q_y) : チューン
 δ : 運動量偏差

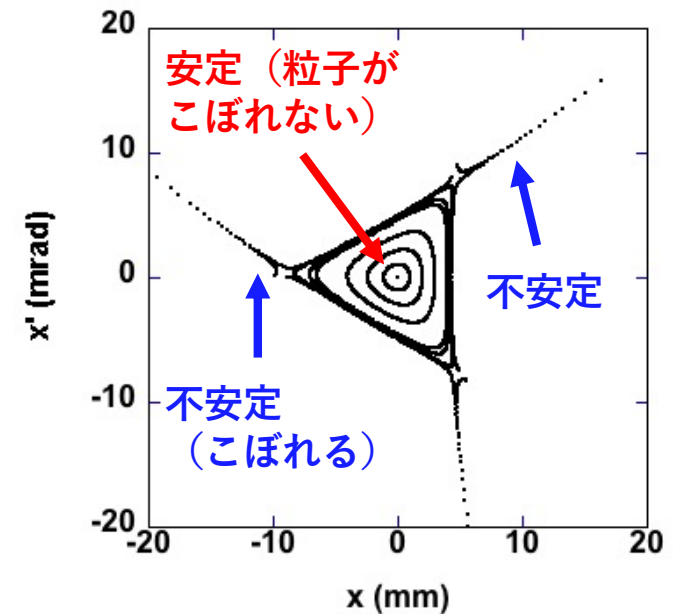
六極磁場
 に対して
 1次の式

- 1 1次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_0 \delta$)
- 2 非線形共鳴 ($Q_x \sim \text{int.}, 3Q_x = \text{int.}, Q_x \pm 2Q_y \sim \text{int.}$)
- 3 2次の分散関数 ($\Delta x = D_1 \delta^2$)
 H. Tanaka et al., NIMA 431 (1999), 396-408.
- 4 振幅依存center shift
 Y.Shoji, M.Takao, and T.Nakamura, PRSTAB 17 064001 (2014).

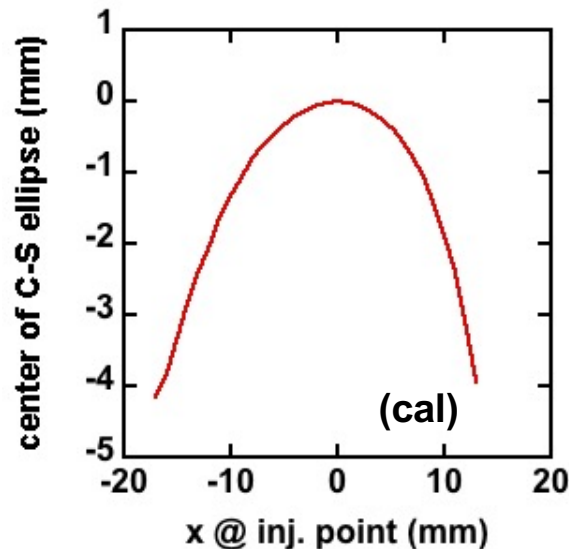
六極磁場
 に対して
 2次の式

- 5 振幅依存チューンシフト
 K.Soutome and H.Tanaka, PRAB 20, 064001 (2017).
- 6 2次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_1 \delta^2$)
 M. Takao, PRE 72, 046502 (2005).

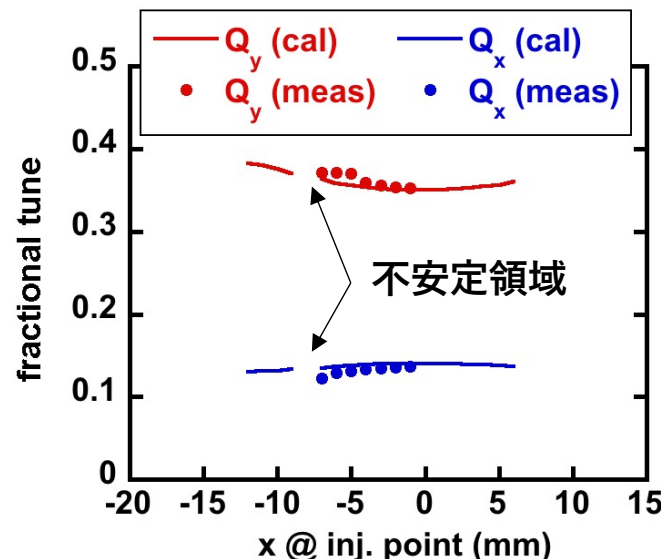
3次共鳴の例



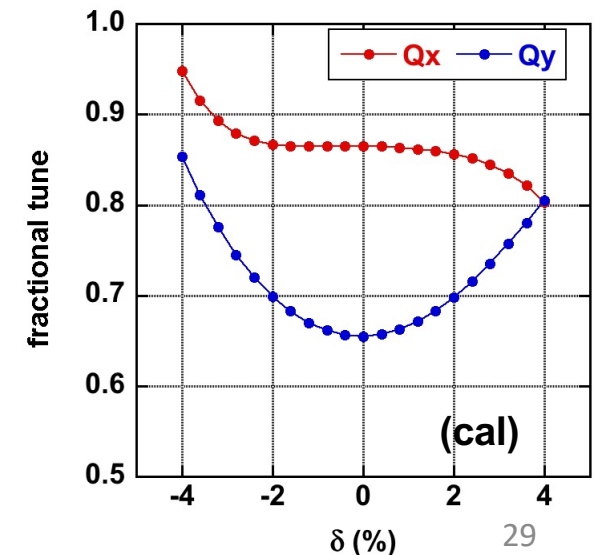
振幅依存center shift



振幅依存チューン(x)



振幅依存チューン(δ)



前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ **非線形共鳴について**
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

六極磁場が誘起する共鳴の式(1/6)

六極磁場がある時のベータatron振動に関するハミルトニアン

$$H(x, x', y, y'; s) = H_0(x, x', y, y'; s) + V(x, y; s)$$

無摂動時のハミルトニアン

六極磁場が作るポテンシャル

$$V(x, y; s) = \frac{k(s)}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

1. $x = \sqrt{\varepsilon\beta} \cos \psi$ の ψ を角変数として (x, x') を作用・角変数 (ψ, I) に正準変換する。

$$F_1(x, \psi; s) = -\frac{\tan \psi + \alpha}{2\beta} x^2$$

$$x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \psi}$$

$$H(\psi_x, J_x, \psi_y, J_y; s) = \frac{J_x}{\beta_x} + \frac{J_y}{\beta_y} + V(\psi_x, J_x, \psi_y, J_y; s)$$

六極磁場が誘起する共鳴の式(2/6)

2. $\psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta}$ は独立変数 s に対して線形に増加する関数ではないので扱いにくい。

→ ψ を「独立変数 s に対して線形に増加する関数 ϕ 」と「その差分 ϕ_0 」に分解して、 ϕ を新しい角変数にする。新しい作用変数を $I = J$ とする。

$$F_2(\psi, I; s) = \left[\psi - \left(\int_0^s \frac{ds_1}{\beta} - \frac{2\pi Q_0}{C_0} s \right) \right] I$$

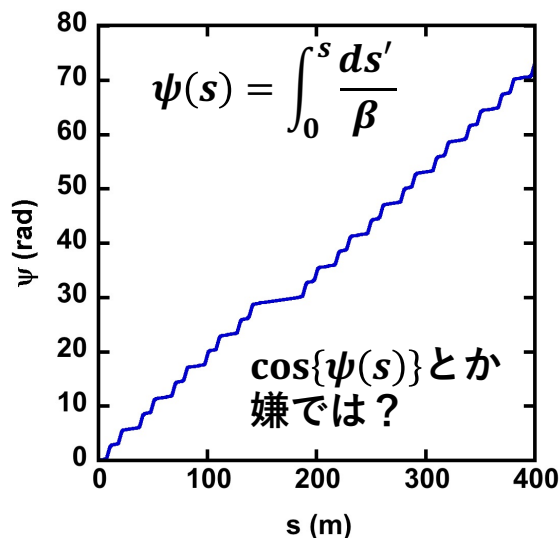
Q_0	: Bare tune
$C_0 = 2\pi R$	: リングの周長

$$J = \frac{\partial F_2}{\partial \psi}$$

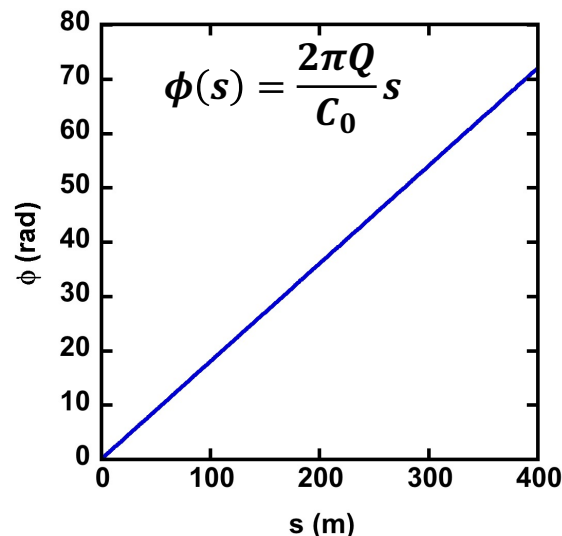
$$\phi = \frac{\partial F_2}{\partial I}$$

$$H(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; s) = \frac{Q_{x0} I_x}{R} + \frac{Q_{y0} I_y}{R} + V(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; s)$$

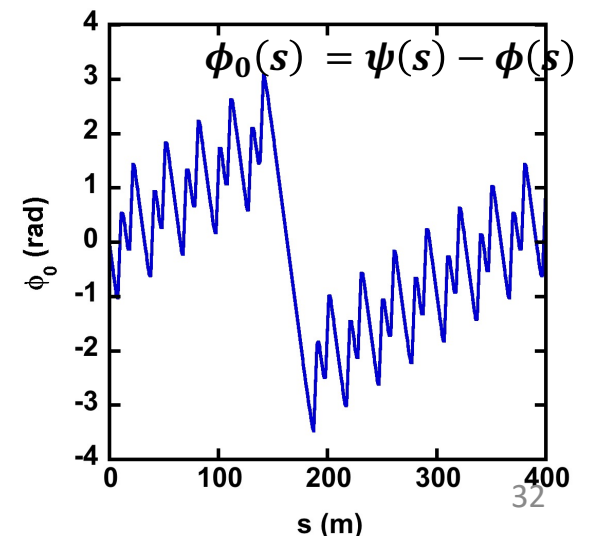
古い角変数



新しい角変数



flutter



六極磁場が誘起する共鳴の式(3/6)

3. リングの周長は各施設で違うので、独立変数 s は使いにくい。
→ 独立変数を θ にしてリング1周を $0 \leq \theta < 2\pi$ で表す（スケール変換）。

$$H(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta) = Q_{x0}I_x + Q_{y0}I_y + U(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta)$$

$$U(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta) = RV(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta)$$

4. ポテンシャルを

- ・ 作用変数だけの関数
- ・ 角変数だけの関数
- ・ 独立変数だけの関数

（ β 関数、 ϕ_0 、off-momentumを考える場合は分散関数が該当）
に分離する。

$$U(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta) = f(I_x, I_y)g(\phi_x, \phi_y)h(\theta)$$

5. 独立変数だけの関数を θ でフーリエ級数展開する。

$$h(\theta) = a_0 + \sum a_k \cos(k\theta)$$

六極磁場が誘起する共鳴の式(4/6)

6. ポテンシャルが「**角変数に関する三角関数**」と「**独立変数に関する三角関数**」の積になるので、積和の公式を使って角変数と独立変数をカップルさせる。

六極磁場が作るポテンシャル

$$\begin{aligned} U(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta) = & I_x^{3/2} \sum_n \mathbf{u}_{3,0,n} \cos(3\phi_x - n\theta) \\ & + I_x^{3/2} \sum_n \mathbf{u}_{1,0,n,1} \cos(\phi_x - n\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_n \mathbf{u}_{1,2,n} \cos(\phi_x + 2\phi_y - n\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_n \mathbf{u}_{1,-2,n} \cos(\phi_x - 2\phi_y - n\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_n \mathbf{u}_{1,0,n,2} \cos(\phi_x - n\theta) \end{aligned}$$

六極磁場が誘起する共鳴の式(5/6)

6. ポテンシャルが「角変数に関する三角関数」と「独立変数に関する三角関数」の積に書けるので、積和の公式を使って角変数と独立変数をカップルさせる。

六極磁石が作るポテンシャルの振幅

$$u_{3,0,k} = \frac{R}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \cos\{3\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,0,k,1} = \frac{R}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,\pm 2,k} = -\frac{R}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \cos\{\phi_{x0}(\theta) \pm 2\phi_{y0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,0,k,2} = -\frac{R_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

六極磁場が誘起する共鳴の式(6/6)

例えば

$$H(\phi_x, I_x; \theta) = Q_{x0}I_x + I_x^{3/2}u_{3,0,n} \cos(3\phi_x - n\theta)$$

について、正準方程式

$$\frac{dI_x}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_x} = -3I_x^{3/2}u_{3,0,n} \sin(3\phi_x - n\theta)$$

から

$$\frac{d}{d\theta}(3\phi_x - n\theta) = 3Q_x - n = 0$$

を満たすとき、 $\sin(3\phi_x - n\theta) = \text{int.}$ になるので、 $I_x \propto \theta$ で増加する

→ $3Q_x - n = 0$ を共鳴条件とみなせる。

同様に、六極磁場がある時は $Q_x = n$ 、 $Q_x \pm 2Q_y = n$ が共鳴条件となる。

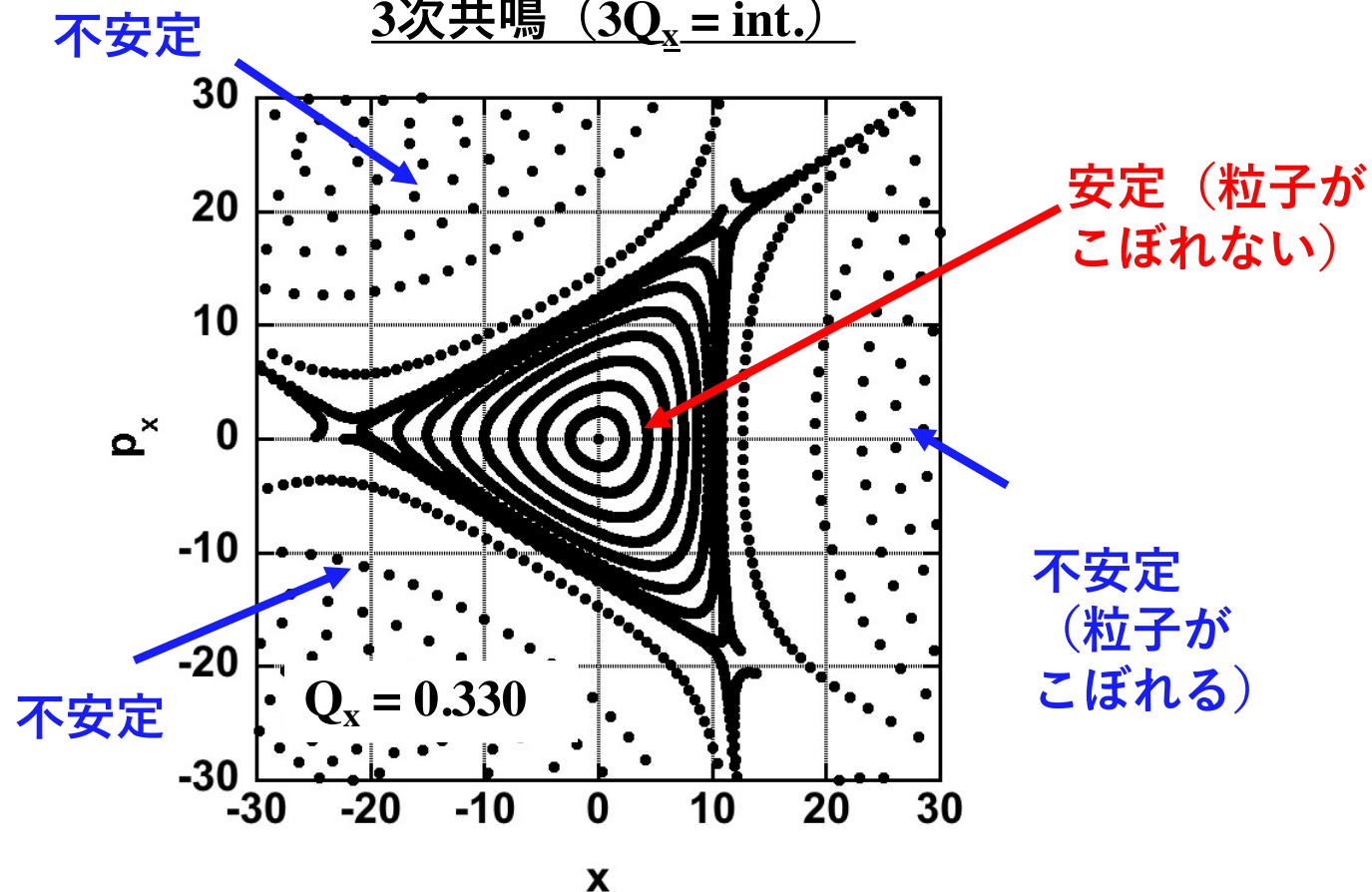
六極磁場がある時の運動：非線形共鳴(1/3)

$$H = H_0 + \frac{k}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

$$x = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x} \cos \psi_x$$

$$x^3 \propto \cos^3 \psi_x = \frac{1}{4} \{ \cos(3\psi_x) + 3 \cos \psi_x \}$$

3次共鳴 ($3Q_x = \text{int.}$)



六極磁場がある時の運動: 非線形共鳴 (2/3)

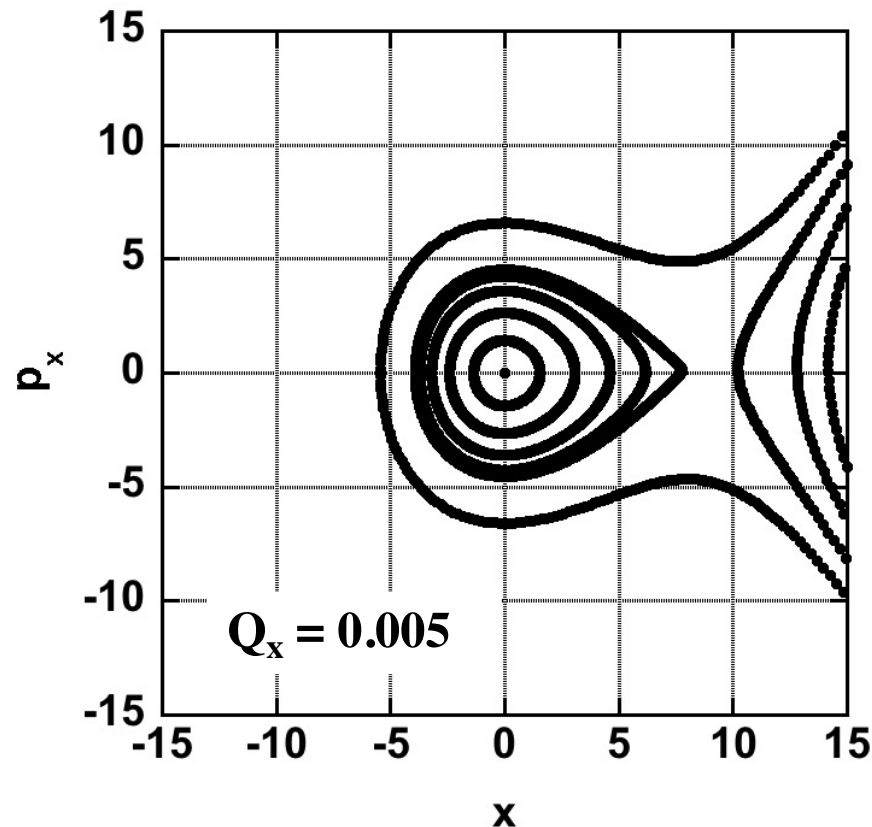
$$H = H_0 + \frac{k}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

$$x^3 \propto \cos^3 \psi_x = \frac{1}{4} \{ \cos(3\psi_x) + 3 \cos \psi_x \}$$

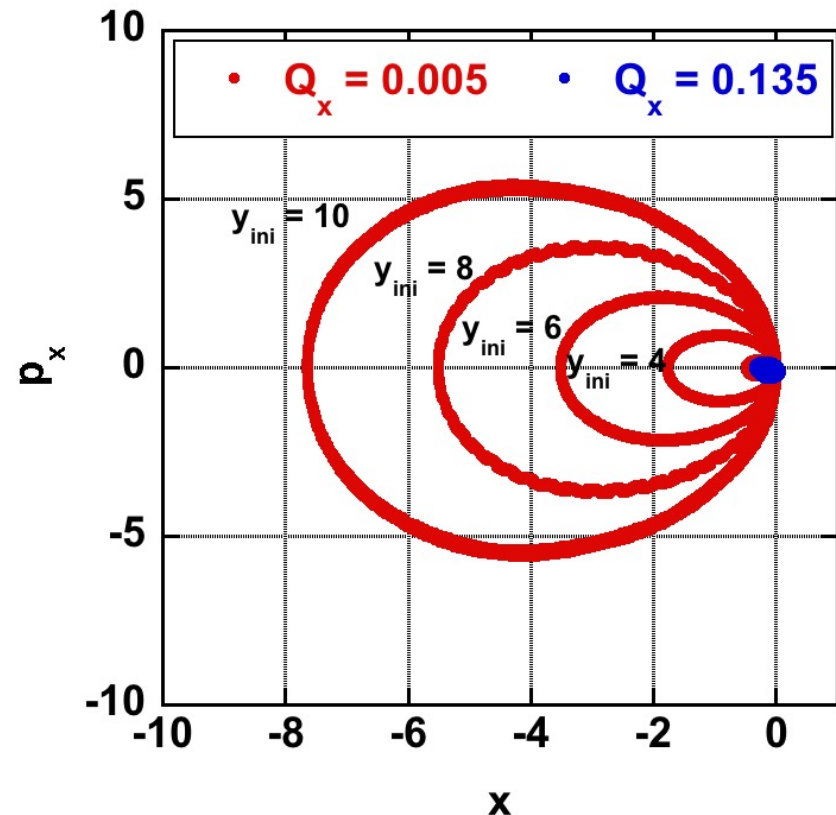
$$xy^2 \propto \cos \psi_x \times \frac{\varepsilon_y \beta_y}{2} \{ \cos(2\psi_y) + 1 \}$$

整数共鳴 ($Q_x = \text{int.}$)

整数共鳴 ($Q_x = \text{int.}$)



Yとは関係ない



Yが大きいほど影響が大きい

六極磁場がある時の運動: 非線形共鳴(3/3)

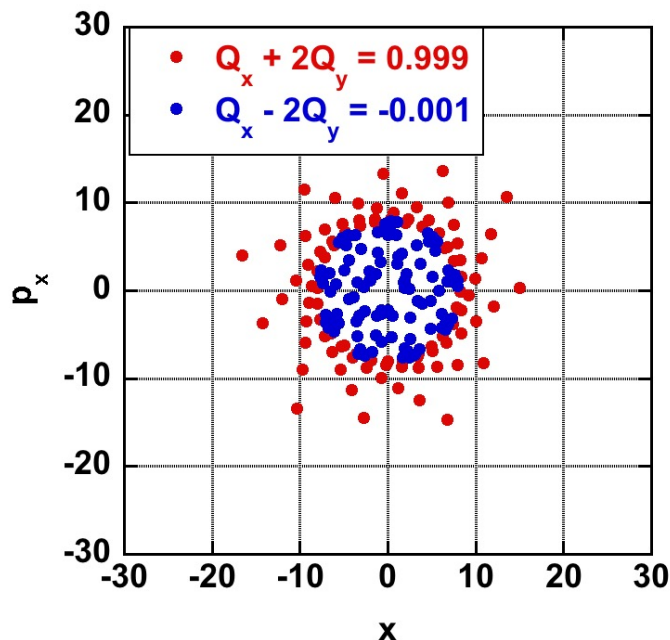
$$H = H_0 + \frac{k}{6}(x^3 - 3xy^2)$$

$$xy^2 \propto \{\cos \psi_x \cos(2\psi_y) + \cos \psi_x\}$$

$$\cos \psi_x \cos(2\psi_y) = \frac{1}{2} \{\cos(\psi_x + 2\psi_y) + \cos(\psi_x - 2\psi_y)\}$$

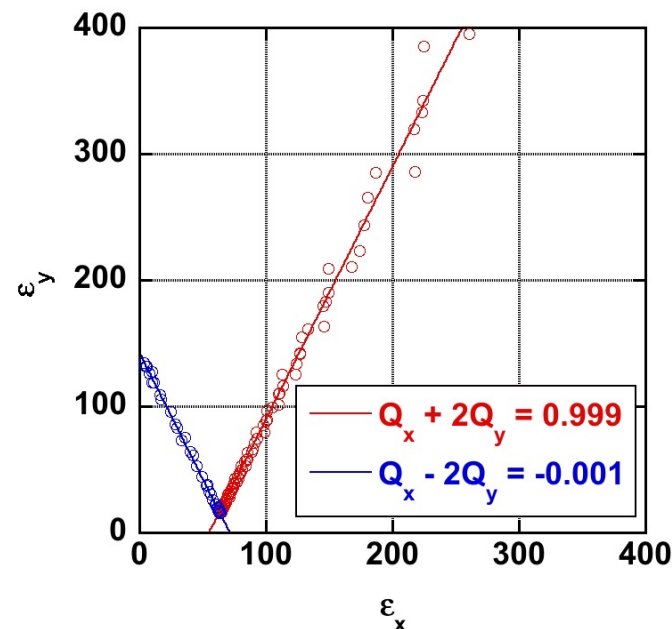
結合共鳴 ($Q_x \pm 2Q_y = \text{int.}$)

X方向粒子分布



結合共鳴が起きると
エミッタンスのやりとりを行う

エミッタンス



$Q_x \pm 2Q_y = \text{int.}$ の場合、
 $2\varepsilon_x \mp \varepsilon_y = \text{int.}$ がconstant of motionになる。

共鳴を補正するとは

共鳴を誘起しているポテンシャルの**振幅**が小さくなるように六極磁場(k)を決定すれば良い

$$u_{3,0,k} = \frac{R}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \cos\{3\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,0,k,1} = \frac{R}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,\pm 2,k} = -\frac{R}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \cos\{\phi_{x0}(\theta) \pm 2\phi_{y0}(\theta) + k\theta\}$$

$$u_{1,0,k,2} = -\frac{R_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, k(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\}$$

前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

六極磁場が誘起する諸現象

六極磁場
に対して
1次の式

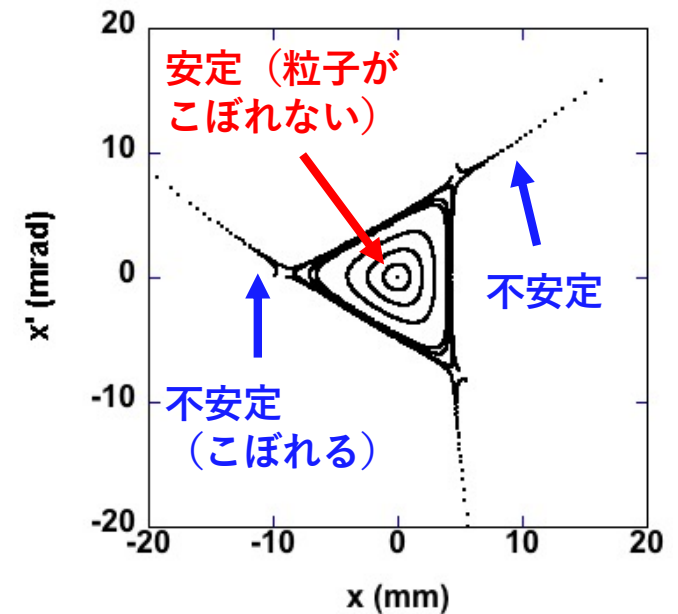
- 1 1次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_0 \delta$)
- 2 非線形共鳴 ($Q_x \sim \text{int.}, 3Q_x = \text{int.}, Q_x \pm 2Q_y \sim \text{int.}$)
- 3 2次の分散関数 ($\Delta x = D_1 \delta^2$)
H. Tanaka et al., NIMA 431 (1999), 396-408.
- 4 振幅依存center shift
Y.Shoji, M.Takao, and T.Nakamura, PRSTAB 17 064001 (2014).

六極磁場
に対して
2次の式

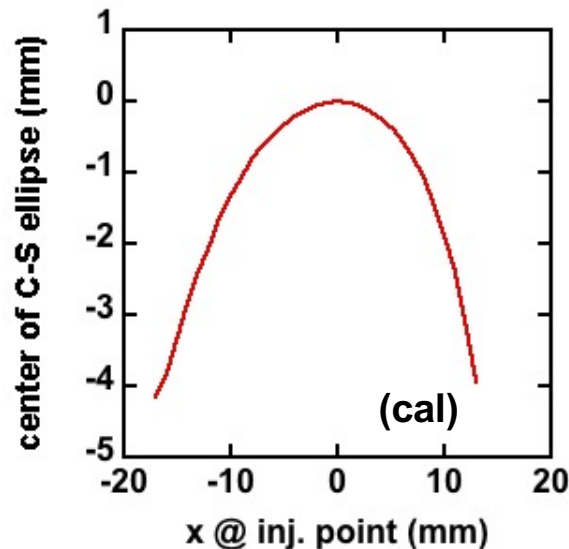
- 5 振幅依存チューンシフト
K.Soutome and H.Tanaka, PRAB 20, 064001 (2017).
- 6 2次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_1 \delta^2$)
M. Takao, PRE 72, 046502 (2005).

(Q_x, Q_y) : チューン
 δ : 運動量偏差

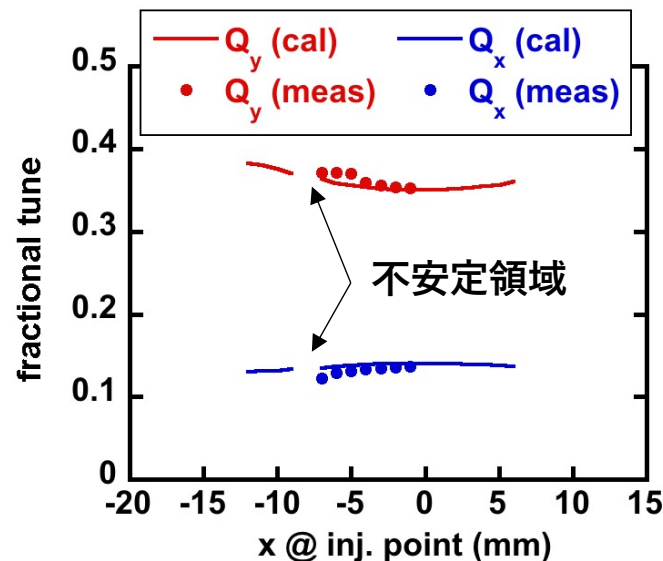
3次共鳴の例



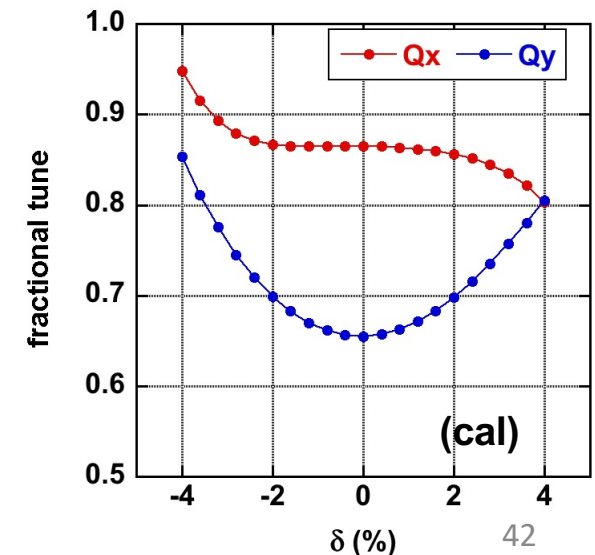
振幅依存center shift



振幅依存チューン(x)

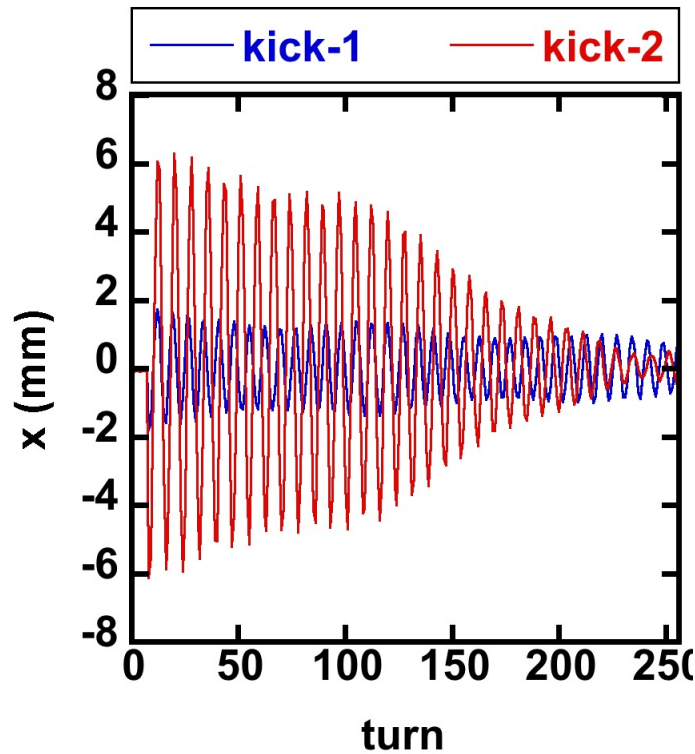


振幅依存チューン(δ)

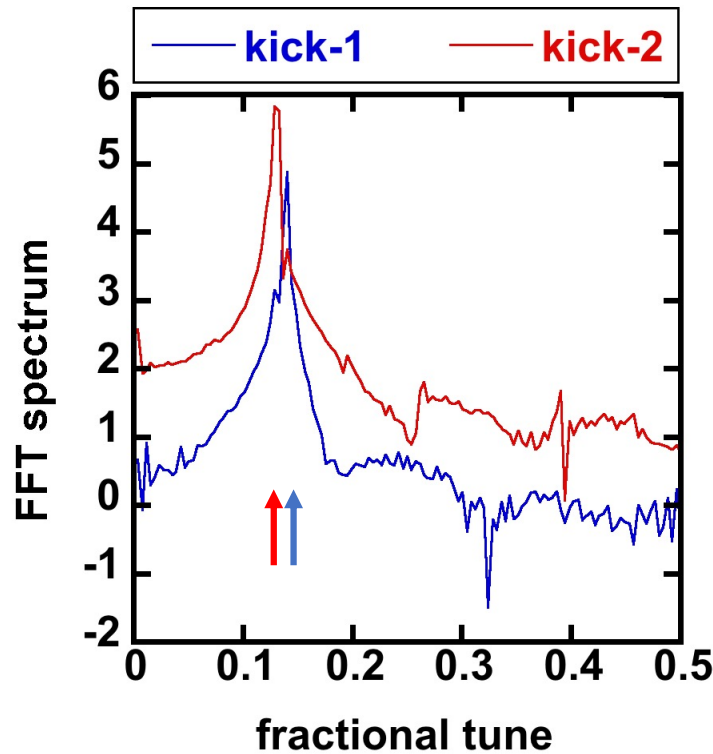


振幅依存チューンについて

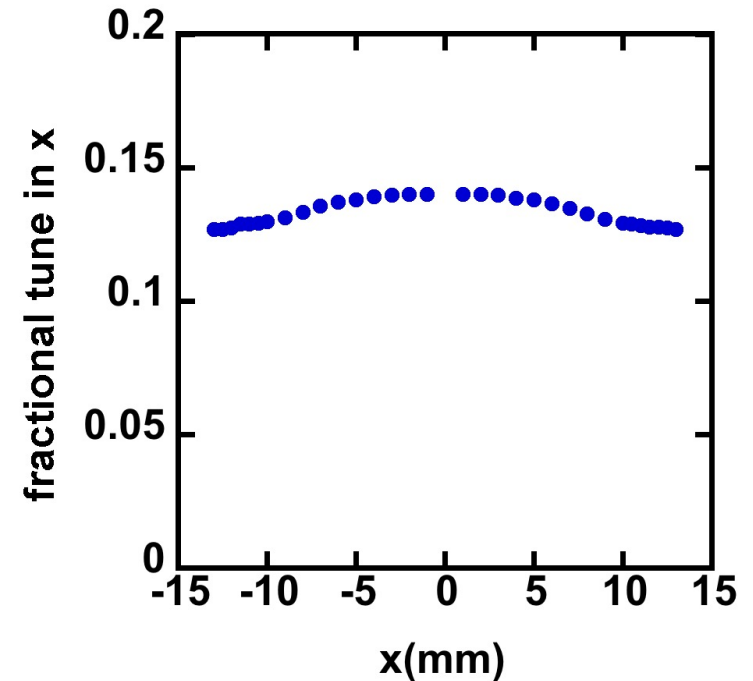
(測定) キッカー電磁石で
ビームを蹴った時の
turn-by-turn BPMの信号



(測定) Turn-by-turn BPM
の信号をFFTにかけた時の
スペクトル



(測定) キッカー電磁石の
蹴り角を変えながら
チューンをプロット



小振幅：設計チューンに近い
大振幅：設計チューンからずれる
＝共鳴にかかりやすくなるので
補正が必要になる

I : 作用変数
 Q_0 : Bare tune

最低

I_x (arv)

存チューンについて

ハミルトニアン $H = H_0 + \frac{k}{6}(x^3 - 3xy^2)$

「振動しない項」と「振動する項」がある。

「振動しない項」をゼロにすると

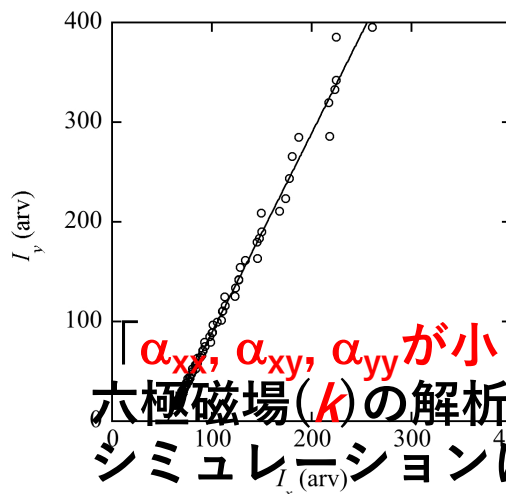
振幅依存チューンが出る。

K.Soutome and H.Tanaka, PRAB 20, 064001 (2017).

$$\alpha_{xx} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{3/2}(s_1) \beta_x^{3/2}(s_2) \\ \times \left[\frac{\cos\{3(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])\}}{\sin(3\pi Q_{x0})} + 3 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})} \right]$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{32\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{1/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_1) \beta_y(s_2) \\ \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] \\ + \frac{1}{16\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2) \beta_x^{3/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_2) \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})}$$

$$\alpha_{yy} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{1/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_1) \beta_y(s_2) \\ \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] \\ + 4 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})}$$



振幅依存チューンを補正するとは

るように
ば良い

$\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yy}$ が小さくなるような
大極磁場 (k) の解析値」を
シミュレーションに入力、
シミュレーション結果の
 $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yy}$ と解析結果と一致した。

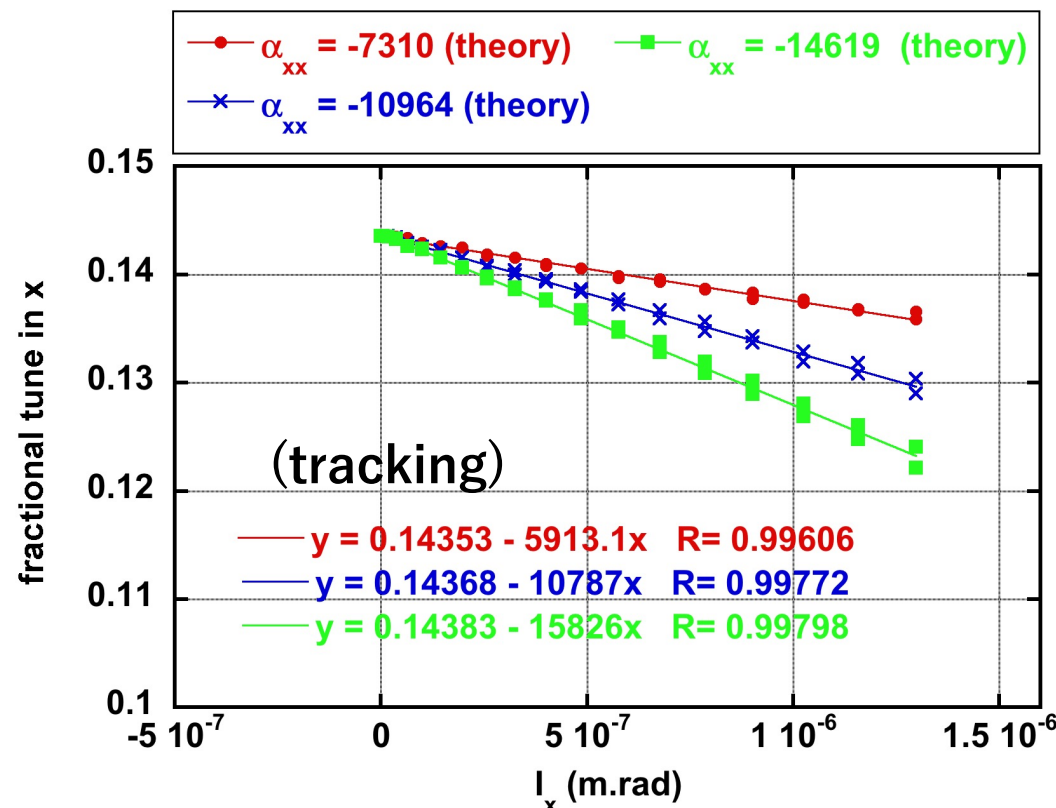
= 解析式を使って補正できる

$$\alpha_{xx} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{3/2}(s_1) \beta_x^{3/2}(s_2) \times \left[\frac{\cos\{3(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])\}}{\sin(3\pi Q_{x0})} + 3 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})} \right]$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{32\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{1/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_1) \beta_y(s_2) \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] + \frac{1}{16\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2) \beta_x^{3/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_2) \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})}$$

$$\alpha_{yy} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 k(s_1)k(s_2) \beta_x^{1/2}(s_1) \beta_x^{1/2}(s_2) \beta_y(s_1) \beta_y(s_2) \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] + 4 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})}$$

振幅依存チューンの補正 (計算)



前半の概要：

1 非線形オプティクス設計とは

- ・ ビーム安定領域とは何か
- ・ なぜビーム安定領域ができるのか
- ・ なぜビーム安定領域を広げないといけないのか

2 六極磁場が誘起する諸現象

- ・ なぜ六極磁場が必要なのか
- ・ なぜ六極磁場がビーム安定領域を狭めるのか
- ・ 非線形共鳴について
- ・ 振幅依存チューンについて
- ・ 非線形分散関数と非線形クロマティシティについて

六極磁場が誘起する諸現象

六極磁場
に対して
1次の式

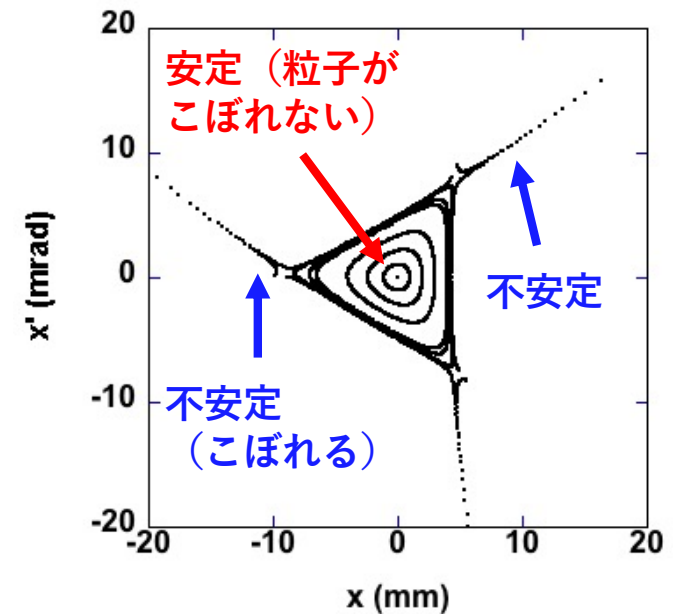
- 1 1次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_0 \delta$)
- 2 非線形共鳴 ($Q_x \sim \text{int.}, 3Q_x = \text{int.}, Q_x \pm 2Q_y \sim \text{int.}$)
- 3 2次の分散関数 ($\Delta x = D_1 \delta^2$)
H. Tanaka et al., NIMA 431 (1999), 396-408.
- 4 振幅依存center shift
Y.Shoji, M.Takao, and T.Nakamura, PRSTAB 17 064001 (2014).

六極磁場
に対して
2次の式

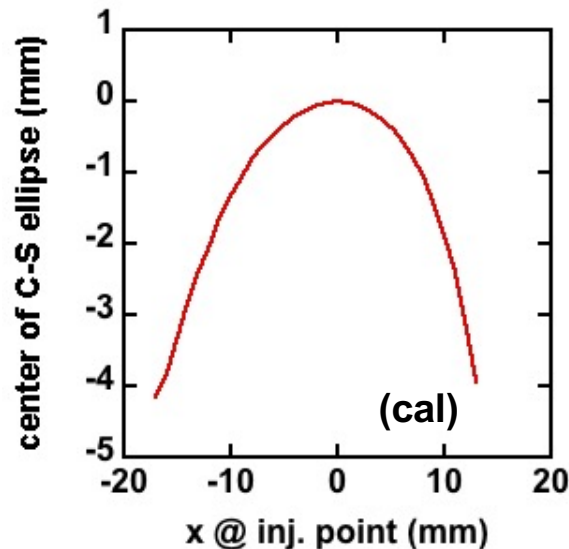
- 5 振幅依存チューンシフト
K.Soutome and H.Tanaka, PRAB 20, 064001 (2017).
- 6 2次のクロマティシティ ($\Delta Q = \xi_1 \delta^2$)
M. Takao, PRE 72, 046502 (2005).

(Q_x, Q_y) : チューン
 δ : 運動量偏差

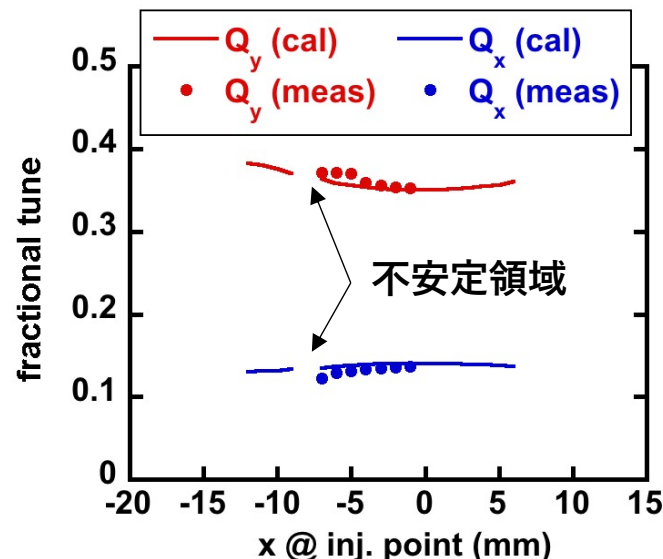
3次共鳴の例



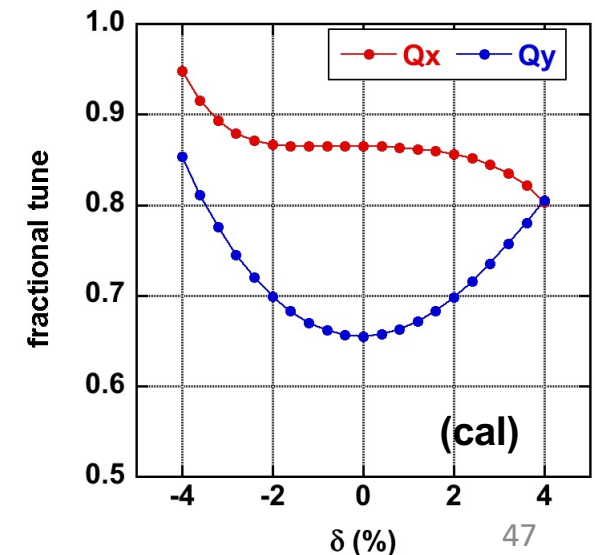
振幅依存center shift



振幅依存チューン(x)



振幅依存チューン(δ)



非線形分散関数と非線形クロマティシティの制御について

非線形クロマティシティ： $\Delta Q = \xi_0 \delta + \xi_1 \delta^2 + \dots$

非線形分散関数： $\Delta x = D_0 \delta + D_1 \delta^2 + \dots$

赤は六極磁場を含む

$$\xi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \beta G_1 d\phi \quad G_1 \propto k D_0$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4\pi} \int \beta G_2 d\phi + \frac{1}{4\pi \sin(2\pi Q)} \int \beta_1^2 G_1(\phi_1) d\phi_1 \int \beta_2^2 G_1(\phi_2) d\phi_2 \cos(2\pi Q - 2\phi_1 - 2\phi_2)$$

$$G_2 \propto k D_1(k)$$

H.Tanaka et al., NIMA 431 (1999), 396-408.

$$D''_1 + \left(K_x + \frac{1}{\rho^2}\right) D_1 = -\frac{1}{2} k D_0^2 + K_x D_0 - \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{2} D_0'^2 + K_x D_0^2\right) + \frac{2D_0}{\rho^2} - \frac{D_0^2}{\rho^3}$$

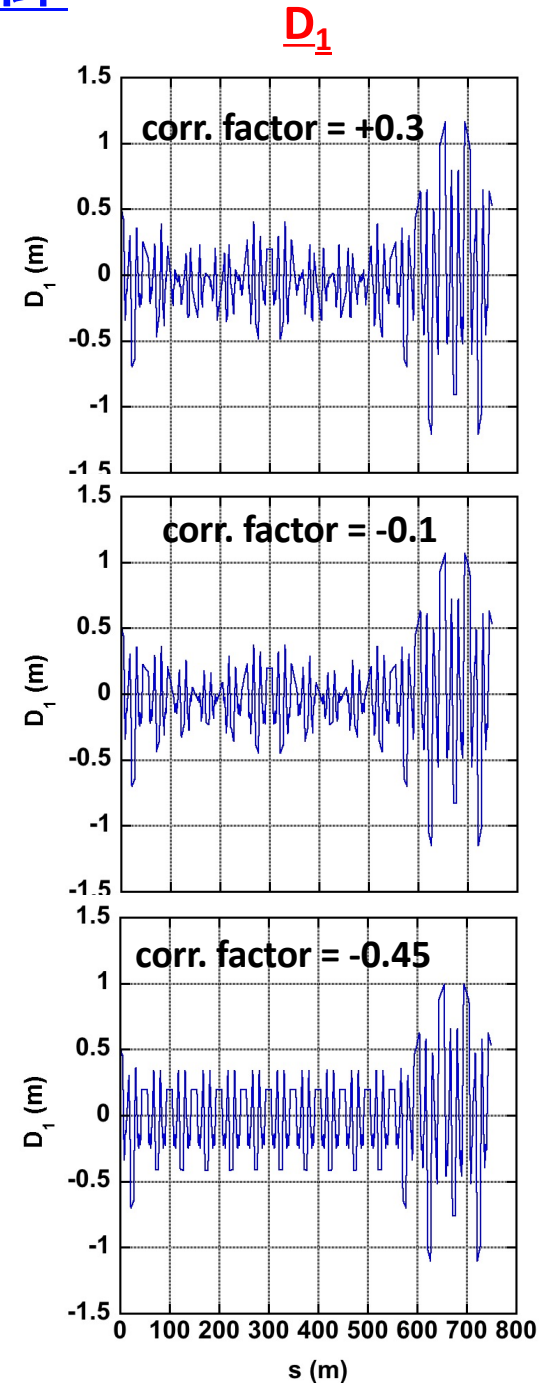
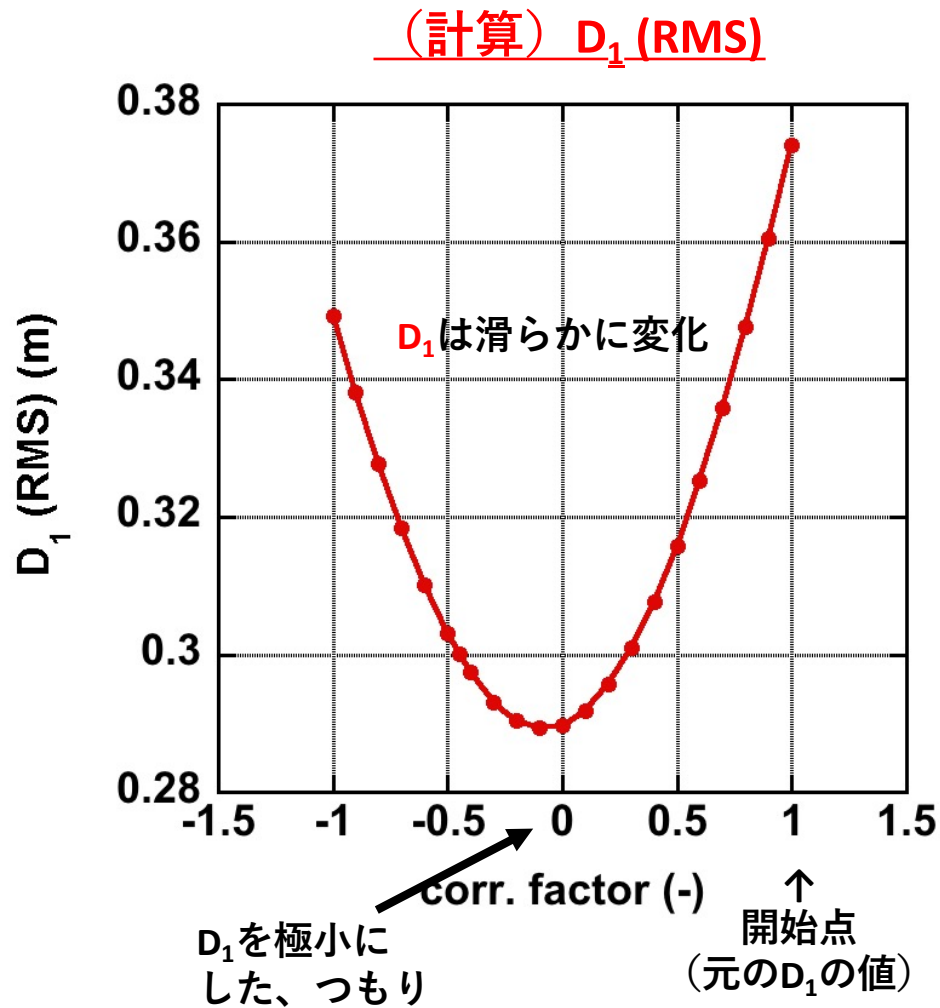
・ D_1 は k について1次の式。 CODの式と同じだと思えば、補正は簡単。

・ ξ_1 は k について2次の式。

「 D_1 を含む項」と「 D_1 を含まない項」の大きさのバランスで決まる。

→ D_1 の大きさを六極磁場 (k)で制御することで ξ_1 を制御できる。

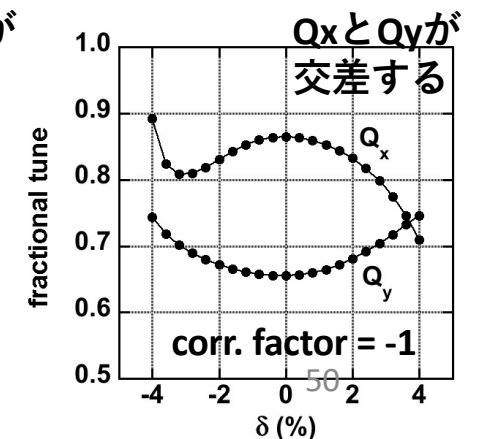
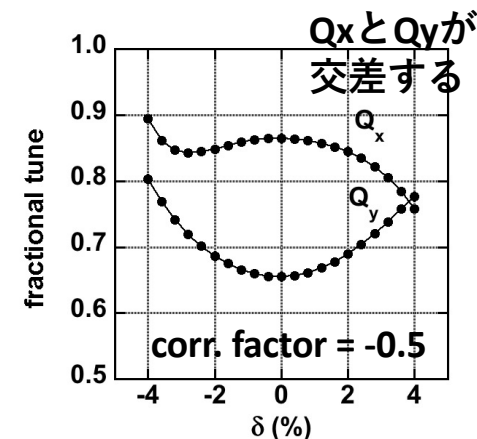
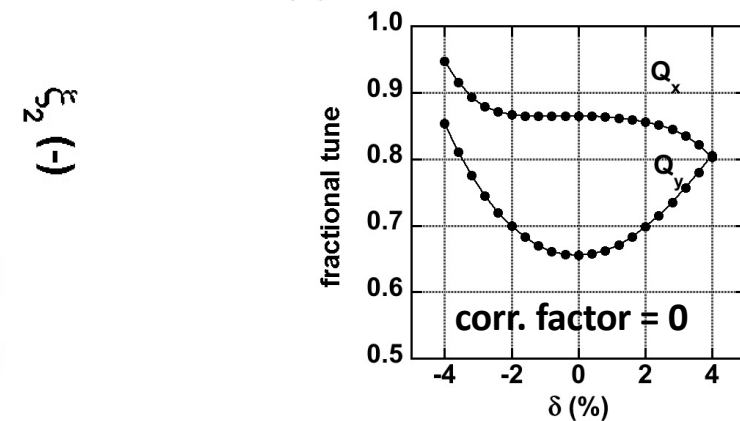
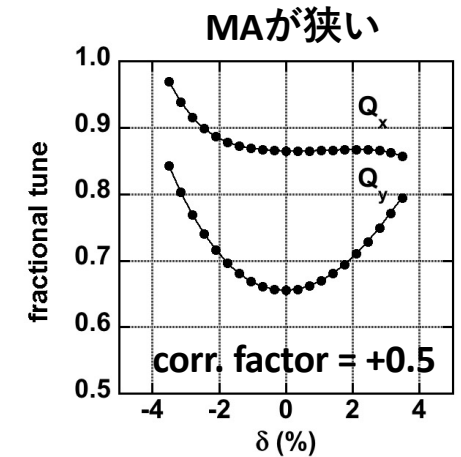
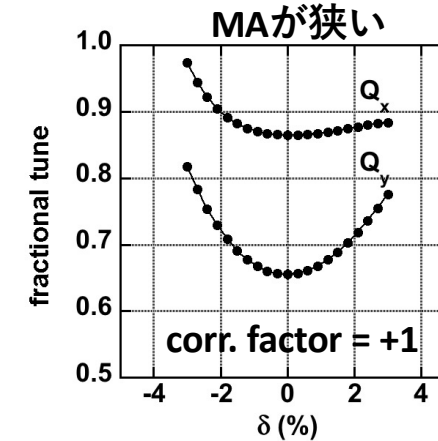
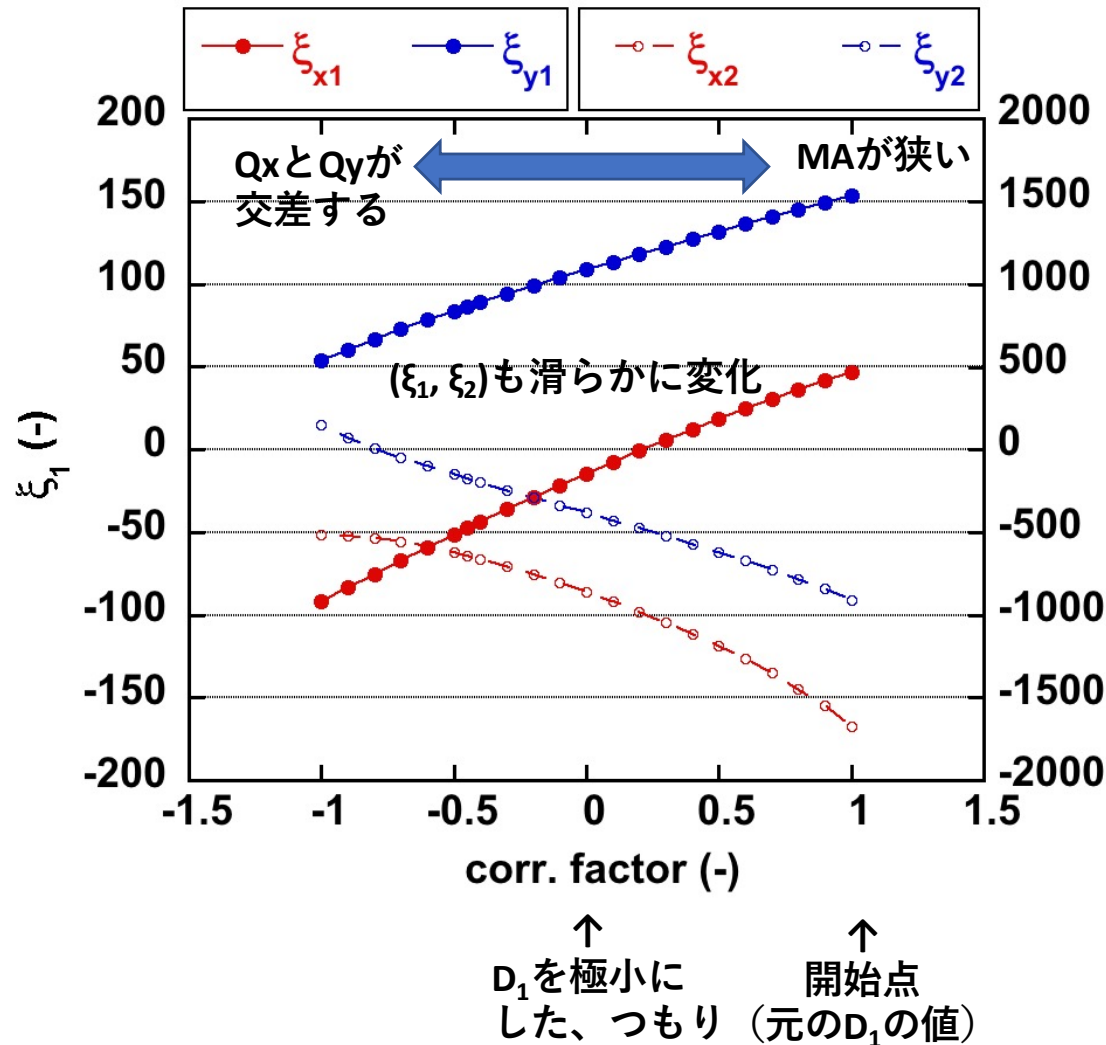
六極磁場による D_1 の制御



D_1 の制御による ξ_1 の制御

Tune vs. δ

(計算) ξ_1 と ξ_2



後半の概要:

- 1 非線形オプティクス補正の方法について
- 2 非線形共鳴と振幅依存チューンを補正したら
入射効率が良くなった話(まずはお話のベースとして)
- 3 更に非線形共鳴と振幅依存チューンを補正したら
入射効率が悪化した話(振幅依存center shiftの補正について)
- 4 更にスキュー六極磁場が励起する非線形共鳴を
ノーマル六極磁場で回避して入射効率が良くなった話
- 5 極低エミッタンス化に向けてのストラテジー