

## 2. ラティスと線形オプティクス

### － 設計と運転への適用 －

高エネルギー加速器研究機構

東 直

# 目 次

## ラティスと線形オプティクス – 設計と運転への適用 –

|                                                    |      |
|----------------------------------------------------|------|
| 1 はじめに .....                                       | 2-1  |
| 2 電子の運動 .....                                      | 2-2  |
| 2.1 リング型放射光加速器の機器構成 .....                          | 2-2  |
| 2.2 特殊相対論 .....                                    | 2-3  |
| 2.3 偏向磁場と電子の曲率半径 .....                             | 2-4  |
| 2.4 座標系 .....                                      | 2-4  |
| 2.5 電子の軌道方程式 .....                                 | 2-4  |
| 2.6 ハミルトニアンと転送行列 .....                             | 2-6  |
| 2.7 シンプレクティック .....                                | 2-7  |
| 2.8 Twiss Parameter .....                          | 2-7  |
| 2.9 横方向振動の厳密解: ベータトロン振動 .....                      | 2-8  |
| 2.10 クーラン・シュナイダー不変量 .....                          | 2-11 |
| 2.11 誤差を考慮した軌道方程式 .....                            | 2-11 |
| 2.12 分散 (Dispersion) .....                         | 2-12 |
| 2.13 Momentum Compaction Factor .....              | 2-13 |
| 2.14 運動量差による Tune-Shift と Chromaticity (色収差) ..... | 2-13 |
| 2.15 縦方向の微小振動 .....                                | 2-15 |
| 2.16 放射積分 .....                                    | 2-17 |
| 2.17 放射減衰 .....                                    | 2-17 |
| 2.18 放射励起 .....                                    | 2-20 |
| 2.19 放射減衰と放射励起のつり合い .....                          | 2-22 |
| 3 Lattice・Optics の設計 .....                         | 2-24 |
| 3.1 FODO .....                                     | 2-24 |
| 3.2 Double Bend Achromat (DBA) .....               | 2-26 |
| 3.3 MBA .....                                      | 2-27 |
| あとがき .....                                         | 2-29 |
| 参考文献 .....                                         | 2-29 |

# ラティスと線形オプティクス - 設計と運転への適用 -

## 1 はじめに

今年度の OHO は“放射光源加速器の基礎”をテーマに据える、ということで、本稿では電子ビームの運動・軌道を記述する**光学系 (optics)**の基礎について説明する。またこれらを踏まえ、光源加速器で採用される代表的な磁石配列 (ラティス) についていくつか紹介をする。

放射光源加速器は周回した電子ビームから放出される放射光をユーザーに使ってもらう施設である。放射光源加速器としてその性能を評価する場合には、得られる光の波長 (エネルギー) や安定度、偏光や時分割観察が可能か、など様々あるが、最も重要なものの 1 つが“いかに明るいか”である。

明るさを示す性能指数はいくつかあり、光子数を  $N$  としたとき、**輝度  $\mathcal{B}$  (Brightness or Brilliance)** は、

$$\mathcal{B} = \frac{d^6 N}{dx dy dx' dy' dt d\omega / \omega} \quad [\text{photons/sec/mm}^2/\text{mrad}^2/0.1 \text{ \%b.w.}] \quad (1-1)$$

で表される。ここで“0.1 %b.w.”は注目している波長を中心とした 0.1 % のバンド幅という意味で、 $x, y$  は第 2 章で説明するように、ビームの進行方向に対して垂直な平面を考えたときの水平を  $x$ 、垂直を  $y$  と取るようなデカルト座標である。また、**光束密度  $\mathcal{D}$  (Flux Density)** は、

$$\mathcal{D} = \int \int \mathcal{B} dx dy \quad [\text{photons/sec/mrad}^2/0.1 \text{ \%b.w.}], \quad (1-2)$$

**全光束  $\mathcal{F}$  (Flux)** はさらに、

$$\mathcal{F} = \int \int \mathcal{D} dx' dy' \quad (1-3)$$

$$= \int \int \int \int \mathcal{B} dx dy dx' dy' \quad [\text{photons/sec}/0.1 \text{ \%b.w.}], \quad (1-4)$$

で表される。光のビームサイズ  $\sigma_r$  と発散角  $\sigma'_r$  には光

のエミッタンス  $\varepsilon_r$  と呼ばれる量を使って、

$$\varepsilon_r = \sigma_r \sigma_{r'} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (1-5)$$

という関係が成り立ち、放射光源加速器に設置されているアンジュレータと呼ばれる挿入光源では、アンジュレータ長  $L$  と光の波長  $\lambda$  を用いて、

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\frac{\lambda}{2L}} \quad (1-6)$$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{2\lambda L}}{4\pi} \quad (1-7)$$

が成立する。光軸上で最大強度を持つ光束密度  $\mathcal{D}$  が、

$$\mathcal{D} = \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx' dy'} \quad (1-8)$$

$$= \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx' dy'} \Big|_{x', y'=0} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2\sigma_{r'}^2}\right) \quad (1-9)$$

のような角度分布をしていると仮定すると、これを全立体角で積分すれば、

$$\mathcal{F} = 2\pi\sigma_{r'}^2 \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx' dy'} \Big|_{x', y'=0} \quad (1-10)$$

と、全光束  $\mathcal{F}$  を求めることができる。

ここまでは光のビームサイズと発散角のみについて考えてきたが、実際にはその光を放出する電子ビームにもそのビームサイズと発散角には有限のサイズ ( $x$  方向であれば  $\sigma_x, \sigma_{x'}$ ) があり、電子ビームと光のビームサイズと発散角の畳み込み (convolution) をそれぞれ考えると、電子ビームから放出される光のサイズと発散角は、

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{x'}^2} \quad (1-11)$$

$$\Sigma'_{x'} = \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{r'}^2} \quad (1-12)$$

となる ( $y$  方向も同様)。全光束  $\mathcal{F}$  は電子のビームサイズや発散角には依存しないことを使うと、実効光束密度  $\mathcal{D}_{eff}$  は、

$$\mathcal{D}_{eff} = \frac{\mathcal{F}}{2\pi\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \quad (1-13)$$

$$= \frac{\sigma_{r'}^2}{\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \frac{d^2 \mathcal{F}}{dx' dy'} \Big|_{x', y'=0} \quad (1-14)$$

と書ける。同様に、実効輝度  $\mathcal{B}_{eff}$  は、

$$\mathcal{B}_{eff} = \frac{\mathcal{D}_{eff}}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} \quad (1-15)$$

$$= \frac{\sigma_{r'}^2}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \left. \frac{d^2\mathcal{F}}{dx'dy'} \right|_{x',y'=0} \quad (1-16)$$

$$= \frac{\mathcal{F}}{(2\pi)^2\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \quad (1-17)$$

となる。これらより、実効輝度  $\mathcal{B}_{eff}$  や実効光束密度  $\mathcal{D}_{eff}$  を高くする (明るくする) ためには、電子ビームのビームサイズや発散角を小さくする必要があることがわかる。一方で  $\Sigma_x$  や  $\Sigma_{x'}$  は光のビームサイズ、発散角との 2 乗和であるので、まずはその値を目指して電子ビームを小さくすべきであるが、光と同等近くになればなるほど、低減の効果が抑制されることもわかる。

電子ビームが放出する光が占める位相空間の中で、光そのものの位相空間が占める割合を空間コヒーレント比といい、 $x$  方向であれば、

$$p_x = \frac{\sigma_r\sigma_{r'}}{\Sigma_x\Sigma_{x'}} \quad (1-18)$$

と書ける。空間コヒーレントな光束をコヒーレントフラックス  $\mathcal{F}_c$  といい、

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{B}_{eff} (2\pi\sigma_r\sigma_{r'})^2 \quad (1-19)$$

$$= \frac{\sigma_r\sigma_{r'}}{\Sigma_x\Sigma_{x'}} \frac{\sigma_r\sigma_{r'}}{\Sigma_y\Sigma_{y'}} \mathcal{F} \quad (1-20)$$

$$= p_x p_y \mathcal{F} \quad (1-21)$$

で求めることができる。高コヒーレントな放射光は例えばイメージングなどにおいて特に重要な指標となっている。

リング型放射光源加速器の 1 つの目標が、**回折限界光源 (Diffraction-Limited Storage Ring: DLSR)** への到達である。回折限界光源では電子ビームサイズ及び発散角が光と同程度まで小さくなっており、これまでに見てきたように、高輝度で高コヒーレントな放射光の生成が可能となる。式 (1-5 - 1-7) で見たように、DLSR かどうかは波長に依存し、比較的長波長領域では既に回折限界に達成している放射光源加速器もあったが、今現在、これまでよりも短波長な X 線領域での回折限界の達成が強く推進されている。

ここでは導入として、リング型放射光源加速器の性能指数として輝度や光束密度、エミッタンスについて説明してきた。特にこのエミッタンスについて、第 2 章、第 3 章でより詳しく説明する。第 2 章では、そもそもリン

グ型放射光源加速器で電子がどのような軌道で運動しているのか、そしてエミッタンスなどの重要な指標がどう定量的に表されるかについて説明する。第 3 章では、これまでに検討、建設されたリング型放射光源加速器で採用された設計について紹介し、どのように低エミッタンス化がなされてきたのかを追う。

## 2 電子の運動

本章ではリング型放射光源における電子の運動について、特に平衡エミッタンスなど重要な性能指数について理解できるよう、説明をおこなう。ちなみに今年の OHO のテーマがリング型放射光源であるため、“荷電粒子の運動”とせず“電子の運動”とあえて限定した書き方になっている<sup>\*1</sup>。

### 2.1 リング型放射光加速器の機器構成

本章は数式が多く登場し、色々とイメージが湧きづらいところもあるのではないかと多少危惧し、まず本節で、リング型放射光加速器における機器構成について、簡単に紹介したいと思う。Fig.1に KEK にある 2.5 GeV のリング型放射光加速器の機器構成・配置を示した。本章では電子を制御するために必要な磁石と、周回して失ったエネルギーを補うための高周波加速空洞 (図中で RF と示したところ) が重要な登場人物達である。Fig.1では挿入光源やビームポジションモニター (BPM) についてもそれぞれ ID, PM で示されているが、詳しい説明は別稿に譲ることとする。

一般に“リング”と聞くときれいな真円を想像しそうではあるが、PF-ring は卵型をしている。加速器の設計者が意図する“設計軌道”は偏向磁石 (図中青色) で曲げられることで、その軌道を形作る<sup>\*2</sup>。よく見ると図の真上と真下は直線部となっている。一般にはこういった直線部に挿入光源 (アンジュレータやウィグラー) や高周波加速空洞が設置される。また左と右は綺麗な弧を描いているのがわかる。こういった部分を**アーク部**と呼ぶ。PF-ring は 1 周およそ 187 m である。このリング 1 周の長さを**周長**と呼び、本稿では  $C$  というシンボルを使うこととする。

<sup>\*1</sup> かつて PF-ring では電子の反粒子である陽電子を周回させていたこともあった [1]。

<sup>\*2</sup> 正確には“曲がる”の定義もしなくてはいけない気がするが、厳密な記述は後々与えたい。

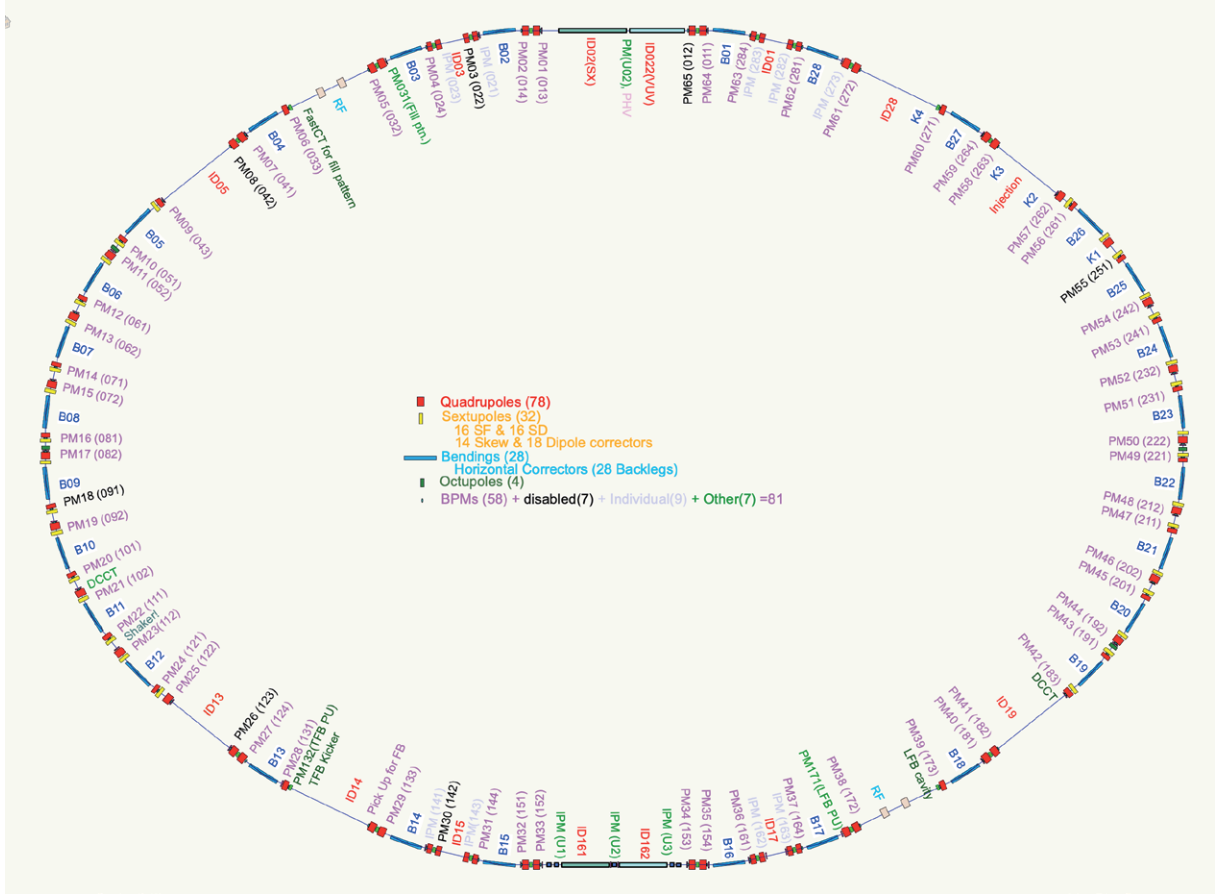


Figure 1 PF-ring における電磁石などの機器構成・配置.

## 2.2 特殊相対論

既に皆さんご存知の通り、加速器で扱うような（荷電）粒子は自身の質量よりもずっと高く加速されることがほとんどであり、相対的効果が顕著に現れる。と言っても、本稿の範囲では一般相対論は必要なく、特殊相対論の知識があれば問題ない。今回 OHO が取り上げる光源加速器は電子を周回させて放射光を取り出す。電子の質量は、

$$m_e c^2 \sim 511 \text{keV} \quad (2-1)$$

であり、光速  $c \sim 3 \times 10^8 \text{m/s}$  に対する電子の相対速度  $\beta_r$  は電子の速度を  $v$  とすると単に、

$$\beta_r = \frac{v}{c} \quad (2-2)$$

で表され、この  $\beta_r$  を使ってローレンツ因子  $\gamma_r$  が、

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_r^2}} \quad (2-3)$$

と書ける<sup>\*3</sup>。  $\gamma_r$  を使うと相対論的な運動量  $p$  は、

$$p = m_e \gamma_r v \quad (2-4)$$

$$= m_e \gamma_r c \beta_r \quad (2-5)$$

で表され、これを用いると電子の総エネルギー  $E$  は、

$$E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} \quad (2-6)$$

$$= m_e \gamma_r c^2 \quad (2-7)$$

と書ける。例えば PF-ring を周回する電子エネルギーは 2.5 GeV であるが、式 (2-6) と電子の静止質量  $m_e c^2$  が 511 keV であることを思い出せば、

$$E \sim pc \quad (2-8)$$

が成立している。従って、GeV クラスの電子加速器を扱う際には  $E$  も  $p$  も特に分けずに考えていいのだが、

<sup>\*3</sup> 本稿では複数の  $\beta, \gamma$  が短時間に、もしくは同時に現れるため、シンボルの意味を明確にするために相対論に関わるシンボルには相対論 (Relativity) の “r” を添え字として付与することとした

KEK 入射器 (Linac) や cERL のように段々とエネルギーを上げていく場合や低エネルギー領域での議論を行うときには、この差を意識する必要が出てくる。

### 2.3 偏向磁場と電子の曲率半径

ここから具体的に、加速器内 (磁場中) での電子の運動について考えていこう。まず、Fig.2のように、電子が一樣磁場中で同じ半径でぐるぐると回転している姿を想像してみよう。電子の運動を記述する運動方程式は運動量  $p$  と電子に働く外力  $F$  を使って、

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (2-9)$$

であるから、先の相対論の表記を用いれば、垂直一樣磁場  $B$  と電子の電荷  $-e$  を使って、

$$m_e \gamma_r \frac{d^2 r}{dt^2} = m_e \gamma_r \frac{v^2}{r} - evB \quad (2-10)$$

となる。ここで右辺の第 1 項は遠心力、第 2 項はローレンツ力である。電子が放射光を放出せず、一定のエネルギーで同じ半径  $\rho$  でぐるぐる安定して回っていると仮定し、第 1 項と第 2 項が釣り合っているとすると、 $r = \rho$  として、

$$m_e \gamma_r \frac{v^2}{\rho} = evB \quad (2-11)$$

が成立し、両辺を  $v$  で割って、式 (2-4) を思い出せば、

$$p = eB\rho \quad (2-12)$$

となる。この  $\rho$  を曲率半径という。これを  $p[\text{GeV}/c]$ ,  $B[\text{T}]$ ,  $\rho[\text{m}]$  という単位を用いると、

$$p[\text{GeV}/c] \sim 0.3B[\text{T}]\rho[\text{m}] \quad (2-13)$$

が成り立つ。

ここで述べたような一樣磁場の働きをするのが、偏向磁石である。PF-ring のような一般的なリング型放射光加速器では、Fig.2のようにリング全体を同じ一樣磁場が占めているわけではなく、Fig.1のように曲げるところに偏向磁石が分散して置かれている。昨今では省電力の観点から従来一般的だった電磁石ではなく永久磁石を用いた偏向磁石の例が世界的に増えてきている。KEK にある PF-ring も PF-AR も偏向電磁石を利用しており、特に PF-AR では現在、従来の 6.5 GeV 運転だけでなく 5 GeV 運転も採用しているため、こういった “energy switching” の観点からは永久磁石の利用実現には困難が伴う。

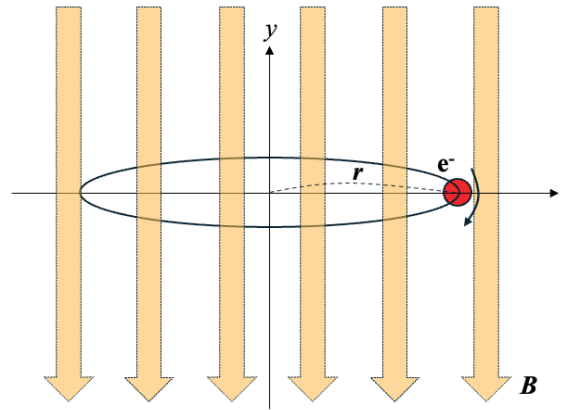


Figure 2 垂直一樣磁場中で運動する電子。

### 2.4 座標系

前節で垂直方向を  $y$  とし、半径を  $r$  とした座標系を考えたが、次節に移る前に加速器で一般に採用される座標系について説明する。一般的に加速器では Fig.3のように、ビームの進行方向に  $s$  という座標を取り、それに直交するような  $x-y$  平面を取る。 $s$  はその加速器の基準エネルギー  $E_0$  (もしくは基準運動量  $p_0$ ) を持つ粒子 (ビーム) が基準軌道 (設計軌道) を取るように設定される。この  $s$  方向を加速器では縦方向 (longitudinal) といい、後で見るように、特にエネルギーと関わるような座標である。一方  $x, y$  は横方向 (transverse) と呼ばれ、磁石によって設計軌道の周りを振動しながら安定的に周回する様子を記述する際に重要な座標となる。一般に  $x$  は水平方向で、外側を正と取るように設定され、 $y$  は垂直方向で、地表側が負となるように取られる。が、これらは加速器毎でも定義が異なっていたり、教科書でも異なることが多々あるので注意が必要である。また、放射光源では放射光利用者と加速器側の間でも定義が異なっていたりする場合があるので、よくよくコミュニケーションを取る必要がある。

### 2.5 電子の軌道方程式

前節では一樣磁場中で電子は  $\rho$  という曲率半径を持ち、周回するという話をしたが、垂直方向 ( $y$  方向) については触れなかった。水平・垂直方向を同時に安定した軌道内に抑え込むのには 4 極磁石が使われる。4 極磁石が持つ水平磁場成分  $B_x$ 、垂直磁場成分  $B_y$  は  $a > 0$  の係

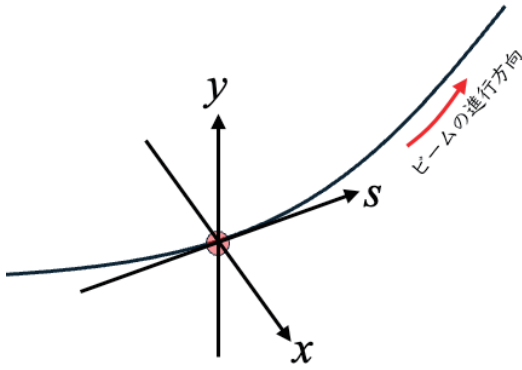


Figure 3 加速器で一般的に採用される座標系.

数を用いて,

$$B_x = ay \quad (2-14)$$

$$B_y = ax \quad (2-15)$$

というように, 中心位置から離れれば離れるほど強くなるような磁場を持つように設計されている. 4 極磁石には Focus (F) と Defocus (D) があり, 一般的には電子の水平方向の運動が Focus 方向であれば Focus という\*4. 先の式は F の時に適用されるもので, D の時はそれぞれマイナスが付く.

$x$  方向の運動を考えるため, 先の一様磁場  $B$  に対して 4 極磁場成分  $ax$  (F) が追加されたような状況を考えよう. まず式 (2-10) について, 時間  $t$  から設計軌道座標  $s$  への変数変換を考える.  $s = vt$  より,

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds} \quad (2-16)$$

より, 式 (2-10) は

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{r} - \frac{B}{B\rho} \quad (2-17)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{eB}{p} \quad (2-18)$$

と書き換えられる. 座標  $r$  を, 偏向磁石磁場  $B$  で作られる曲率半径  $\rho$  の基準軌道とそこからの変位  $x$  を使っ

て  $r = \rho + x$  とすると, 式 (2-17) は,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{\rho + x} - \frac{B}{B\rho} \quad (2-19)$$

$$\sim \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho^2} - \frac{eB}{p} \quad (2-20)$$

$$= -\frac{x}{\rho^2} \quad (2-21)$$

となる. ここで  $x \ll \rho$  とした. 式 (2-20) で  $B \rightarrow B + ax$  とすると,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho^2} - \frac{e}{p}(B + ax) \quad (2-22)$$

$$= -\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{a}{B\rho}\right)x \quad (2-23)$$

となる. 偏向磁石の寄与がない  $y$  方向も同様に計算し,  $x$  と  $y$  を並べると,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho^2} + k_1(s)\right)x = 0 \quad (2-24)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - k_1(s)y = 0 \quad (2-25)$$

と書け, まとめると,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (2-26)$$

と書ける. ここで,

$$k_1(s) = \frac{a}{B\rho} \quad (2-27)$$

$$= \frac{ea}{p_0} \quad (2-28)$$

であり, リングを周回する電子の基準運動量で規格化された 4 極磁場の勾配係数である. またここで  $k_1$  が  $s$  の関数であることを明示したが, 偏向磁石と同様に 4 極磁石もリングに分散して設置されており, また偏向磁石の磁場は同じ値であることが多いが, 4 極磁石においては様々な値を取るのが一般的である.

ここでは大局的に見るために, 式 (2-24) を,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + k^2 x = 0 \quad (2-29)$$

と置いてみよう. つまり  $k_1(s)$  の  $s$  依存性を無視して, とりあえず定数として考えてみる. この式は一般的な調和振動子で成立するものであり,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos ks & \frac{1}{k} \sin ks \\ -k \sin ks & \cos ks \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

\*4 4 極磁石が電磁石であれば, 流す電流の向きを反転させることで F と D を変えることができる

と解くことができる．ここで  $k = \nu/R$  とし， $2\pi R$  でリング 1 周の周長と考えると， $\nu$  は電子がリングを 1 周する間に振動する回数と一致することがわかる．これは後の  $k_1(s)$  の  $s$  依存性を復活させた厳密な議論でも同様で，そこではベータatron振動数もしくはチューンと呼ぶ．

## 2.6 ハミルトニアンと転送行列

式 (2-24), (2-25) を生成するハミルトニアンとして，

$$H_x = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}K_x(s)x^2 \quad (2-31)$$

$$H_y = \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}K_y(s)y^2 \quad (2-32)$$

を考える．ここで，

$$K_x = \frac{1}{\rho^2} + k_1(s) \quad (2-33)$$

$$K_y = -k_1(s) \quad (2-34)$$

である．さらに，

$$H = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-36)$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

と置くと，

$$\frac{d}{dt}X = S_2 H X \quad (2-38)$$

という形で，式 (2-24), (2-25) を再導出することができる．

一般に，ある区間で  $K(s)$  が定数であるとすれば，先の式 (2-29) のように簡単に解くことができ，

$$X = T X_0 \quad (2-39)$$

$$= e^{S_2 H_2} X_0 \quad (2-40)$$

は式 (2-38) の解となる．この解は  $X_0$  で  $K$  が定数の，式 (2-31) もしくは式 (2-32) が成立している区間を通じた場合  $X$  となる，ということを意味している． $X_0$  から  $X$  という位相座標に転送するため， $T$  は転送行列と

呼ばれる．この  $T = e^{S_2 H_2}$  を展開すると，

$$e^{S_2 H_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_2 H)^n}{n!} \quad (2-41)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix}^n \quad (2-42)$$

$$= I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{K} s)^{2n}}{(2n)!} \quad (2-43)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \\ -\sqrt{K} & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{K} s)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K} s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K} s) & \cos(\sqrt{K} s) \end{pmatrix} \quad (2-44)$$

となる．ここで，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{K} s)^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{K} s) \quad (2-45)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{K} s)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(\sqrt{K} s) \quad (2-46)$$

$$(S_2 H)^{2m} = (-K)^m I \quad (2-47)$$

$$(S_2 H)^{2m+1} = (-K)^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix} \quad (2-48)$$

を利用した．

式 (2-44) について， $K = k^2$  と置けば，式 (2-30) と同じ形になることがわかる．これが 4 極磁石 (Focus) の場合の転送行列で，

$$T_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K} s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K} s) & \cos(\sqrt{K} s) \end{pmatrix} \quad (2-49)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K} s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K} s) \\ -\sqrt{K} \sinh(\sqrt{K} s) & \cosh(\sqrt{K} s) \end{pmatrix} \quad (2-50)$$

となる．また  $K < 0$  のとき，つまり 4 極磁石が Defocus

の場合,

$$T_x = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sinh(\sqrt{K}s) & \cosh(\sqrt{K}s) \end{pmatrix} \quad (2-51)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix} \quad (2-52)$$

となる.

ここで  $K \rightarrow 0$  の極限を取れば, 何もない空間 (ドリフトスペース) の転送行列が求められ,

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-53)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-54)$$

となる.

次に偏向磁石の場合を考える, つまり  $K_x = 1/\rho^2$ ,  $K_y \rightarrow 0$  のとき,

$$T_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2-55)$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-56)$$

となる.

## 2.7 シンプレクティック

上記転送行列について,  $s = \varepsilon$  だけ進めるような無限小転送行列

$$T_\varepsilon = I + S_2 H_x(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad (2-57)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -K\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (2-58)$$

を考えると,

$$T_\varepsilon^T S_2 T_\varepsilon = S_2 + O(\varepsilon^2) \quad (2-59)$$

が成立する. このような性質を持つ行列を“シンプレクティックである”といい, シンプレクティックな行列同士の積もシンプレクティックとなる<sup>\*5</sup>. また, 式 (2-59) より, シンプレクティック条件は転送行列の行列式が 1 であることと等価である.

<sup>\*5</sup> 例えば  $T = T_2 T_1$  という転送行列について, それぞれ  $T_1, T_2$  が式 (2-59) を満たすと考えればわかる.

## 2.8 Twiss Parameter

リングのある点  $s$  から 1 周し, 元の点  $s$  に戻るような転送行列  $T(s)$  を考えると, 1 周後, さらに点  $s$  から 1 周するような転送行列  $T(s+C)$  は,

$$T(s) = T(s+C) \quad (2-60)$$

であり, シンプレクティックである. ここで  $C$  は周長である. この点  $s$  からリングを 1 周して点  $s$  に戻るような転送行列  $T(s)$  を

$$T(s) = I \cos(2\pi\nu) + J(s) \sin(2\pi\nu) \quad (2-61)$$

$$J(s) = \begin{pmatrix} \alpha_T(s) & \beta_T(s) \\ -\gamma_T(s) & -\alpha_T(s) \end{pmatrix} \quad (2-62)$$

と, とりあえず置いてみる<sup>\*6</sup>.  $T(s)$  がシンプレクティックであることを課すと,  $\det(T(s)) = 1$  となるため,

$$\beta_T(s)\gamma_T(s) - \alpha_T^2(s) = 1 \quad (2-63)$$

が成立する. これを使えば,  $J^2(s) = -I$  から,

$$T^n(s) = I \cos(n \cdot 2\pi\nu) + J(s) \sin(n \cdot 2\pi\nu) \quad (2-64)$$

とわかる. つまり点  $s$  について何周電子を周回させても, 位相が進むだけで, リングの点  $s$  に固有な値,  $\alpha_T(s), \beta_T(s), \gamma_T(s)$  は変わらない. この  $\alpha_T(s), \beta_T(s), \gamma_T(s)$  を Twiss Parameter という.

先と同様に, ある点 1 から点  $2+C$  までの転送を Fig.4 のように考えると,

$$T_2(s)T_{21} = T_{21}T_1(s) \quad (2-65)$$

であるから,

$$T_2(s) = T_{21}T_1(s)T_{21}^{-1} \quad (2-66)$$

が成立する.  $T(s)$  中の  $I(s)$  成分は“透明”なので, ある点  $s$  から  $L$  離れた位置にある  $J(s+L)$  は点  $s$  の  $J(s)$  と, 点 1 から 2 への転送行列  $T_{21}$ ,

$$T_{21} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2-67)$$

<sup>\*6</sup> 添字の  $T$  は後に示すように Twiss Parameter の  $T$  である.

を使って,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \alpha_T(s+L) & \beta_T(s+L) \\ -\gamma_T(s+L) & -\alpha_T(s+L) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \\
 & \quad \cdot \begin{pmatrix} \alpha_T(s) & \beta_T(s) \\ -\gamma_T(s) & -\alpha_T(s) \end{pmatrix} \\
 & \quad \cdot \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2-68)
 \end{aligned}$$

と書け, 整理すると,

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \beta_T \\ \alpha_T \\ \gamma_T \end{pmatrix}_{s+L} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & 1+m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \\
 & \quad \cdot \begin{pmatrix} \beta_T \\ \alpha_T \\ \gamma_T \end{pmatrix}_s \quad (2-69)
 \end{aligned}$$

とも表現できる. ここで  $T_{21}$  もシンプレクティックであり,  $\det(T_{21}) = 1$  であることを使っている. この  $T_{21}$  には先に紹介したような各 element の転送行列 (式 (2-49) - (2-56)) を適用することができる. 例えば, ドリフトスペースであれば,  $x, y$  とも,

$$T_{21} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2-70)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-71)$$

となるので,

$$\beta_T(s+L) = \beta_T(s) - 2L\alpha_T(s) + L^2\gamma_T(s) \quad (2-72)$$

$$\alpha_T(s+L) = -L\alpha_T(s) \quad (2-73)$$

$$\gamma_T(s+L) = \gamma_T(s) \quad (2-74)$$

となる.

## 2.9 横方向振動の厳密解: ベータトロン振動

2.5節では, 式 (2-24), (2-25),

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left( \frac{1}{\rho^2} + k_1(s) \right) x = 0 \quad (2-75)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - k_1(s)y = 0 \quad (2-76)$$

の  $k_1(s)$  を  $s$  に依存しない定数として見ることで, ごく一般的な調和振動子の形に落ち着く, ということを見

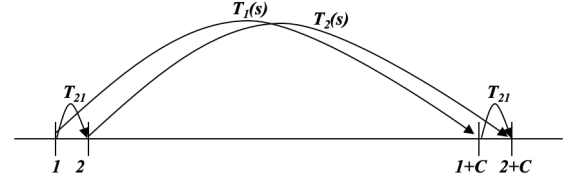


Figure 4 点 1 から点 2+C までの転送

た. 本節では式 (2-75), (2-76) の  $s$  依存性から逃げずに, 厳密に解こうと思う.

まずは式 (2-75), (2-76) をまとめて,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = 0 \quad (2-77)$$

とおく.  $K(s)$  はリングの構成で決まるので,

$$K(s+C) = K(s) \quad (2-78)$$

という周期性を持つ. このようなとき, 式 (2-77) を **Hill の方程式** という.  $y(s)$  が式 (2-77) の解であるとき,  $K(s+C) = K(s)$  の関係を使えば  $y(s+C)$  も式 (2-77) の解であることがわかる. 独立な 2 つの解  $y_1(s)$  と  $y_2(s)$  があるとき,

$$y(s) = ay_1(s) + by_2(s) \quad (2-79)$$

も解となり,

$$y'(s) = ay_1'(s) + by_2'(s) \quad (2-80)$$

$$y(0) = ay_1(0) + by_2(0) \quad (2-81)$$

$$y'(0) = ay_1'(0) + by_2'(0) \quad (2-82)$$

も成立する. 従って, ある行列  $A$  を使うと,

$$\begin{pmatrix} y_1(s+C) \\ y_2(s+C) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \quad (2-83)$$

が成り立つことがわかる.  $A$  の固有値を  $e^{a_1}, e^{a_2}$ , その時の固有ベクトルを  $v_1, v_2$  とし,

$$D = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix} \quad (2-84)$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \quad (2-85)$$

とすると,

$$AV = DV \quad (2-86)$$

$$V^{-1}AV = D \quad (2-87)$$

$$V^{-1}A = DV^{-1} \quad (2-88)$$

であることを使うと,

$$\begin{pmatrix} y_1(s+C) \\ y_2(s+C) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \quad (2-89)$$

$$V^{-1} \begin{pmatrix} y_1(s+C) \\ y_2(s+C) \end{pmatrix} = V^{-1} A \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \quad (2-90)$$

$$= DV^{-1} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} \quad (2-91)$$

が成立し,

$$y(s+C) = e^a y(s) \quad (2-92)$$

という解が存在するということがわかる.

ここで,

$$Z(s) = e^{-as/C} y(s) \quad (2-93)$$

なるものを考えると, 式 (2-92) を使えば,

$$Z(s+C) = e^{-a(s+C)/C} y(s+C) \quad (2-94)$$

$$= e^{-as/C} e^{-a} y(s+C) \quad (2-95)$$

$$= e^{-as/C} y(s) \quad (2-96)$$

$$= Z(s) \quad (2-97)$$

となることがわかる. つまり,

$$y(s) = e^{as/C} Z(s) \quad (2-98)$$

が式 (2-77) の解となり,  $Z(s+C) = Z(s)$  という周期性を持つことがわかる. これを **Floquet の定理 (フロケーの定理)** という.

ここで 2.8 節で紹介したリングのある点  $s$  から 1 周する転送行列  $T(s)$  について思い出してみる. 長々と  $y(s)$  というものについて考えてきたが, 元を正せばこれは式 (2-77) の解であり, つまり位置座標である<sup>\*7</sup>. 従って,  $y(s)$  は 1 周の転送行列  $T(s)$  を使って,

$$y(s+C) = T(s)y(s) \quad (2-99)$$

がもちろん成立する. ここで式 (2-83) - (2-92) までの展開を振りかえれば, 式 (2-83) の行列  $A$  に対応するのは  $T(s)$  である. そこで式 (2-61), (2-62) を使って固有方程式  $\det(T(s) - \lambda I) = 0$  から固有値  $\lambda$  を求めると,

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i2\pi\nu} \quad (2-100)$$

となる. 従って, 式 (2-92), (2-98) の  $a$  に式 (2-100) を代入すると,

$$y_{1,2}(s+C) = e^{\pm i2\pi\nu} y_{1,2}(s) \quad (2-101)$$

$$y_{1,2}(s) = e^{\pm i2\pi\nu s/C} Z_{1,2}(s) \quad (2-102)$$

が得られる. ここで,

$$Z(s) = |Z(s)| e^{i\phi(s)} = \omega(s) e^{i\phi(s)} \quad (2-103)$$

と置くと,

$$y_{1,2}(s) = \omega(s) e^{\pm i\psi(s)} \quad (2-104)$$

$$\psi(s) = 2\pi\nu \frac{s}{C} + \phi(s) \quad (2-105)$$

となる. また,

$$\omega(s+C) = \omega(s) \quad (2-106)$$

$$\phi(s+C) = \phi(s) + 2\pi(\nu + n) \quad (2-107)$$

が満たされており,

$$\Delta\psi = \psi(s+C) - \psi(s) \quad (2-108)$$

$$= 2\pi(2\nu + n) \quad (2-109)$$

となる.

式 (2-104) を式 (2-77) に代入すると  $e^{i\psi}$  は消え,

$$\omega'' \pm 2i\omega'\psi' - \omega\psi'^2 \pm i\omega\psi'' + K\omega = 0 \quad (2-110)$$

となる. ここで実数部と虚数部に分けてそれぞれが 0 になると考えると,

$$2\omega'\psi' + \omega\psi'' = 0 \quad (2-111)$$

$$\omega'' - \omega\psi'^2 + K\omega = 0 \quad (2-112)$$

となる. 式 (2-111) について,

$$2\omega'\psi' + \omega\psi'' = \frac{(\psi'\omega^2)'}{\omega} \quad (2-113)$$

$$= 0 \quad (2-114)$$

より,

$$\psi'\omega^2 = \text{Const.} \quad (2-115)$$

となり, 式 (2-104) の  $\omega$  にはその大きさに不定性が許されているので,

$$\psi'\omega^2 = 1 \quad (2-116)$$

と置く.

<sup>\*7</sup> ここで  $y(s)$  を使ったがためにややこしくなったが,  $y(s)$  は垂直方向位置だけを指しているのではなく, 水平の  $x$ , 垂直の  $y$  の両方を代弁している関数である.

今、リングのある点  $s$  の  $(x, x')$  が,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (2-117)$$

であったとし、1 周後、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (2-118)$$

となったと考える。これまでの議論から  $\mathbf{x}_0$  は、

$$\mathbf{x}_0 = Y_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2-119)$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2-120)$$

と置け、

$$\mathbf{x}_1 = T(s)\mathbf{x}_0 \quad (2-121)$$

$$= T(s) \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2-122)$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2-123)$$

$$= Y_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2-124)$$

が成立する。式 (2-119), (2-124) から、

$$Y_0^{-1}\mathbf{x}_0 = Y_1^{-1}\mathbf{x}_1 \quad (2-125)$$

が成立していることがわかり、

$$\mathbf{x}_1 = Y_1 Y_0^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (2-126)$$

となる。式 (2-104) を使うと、紙面に収まらないので途中式は省くが、

$$Y_1 Y_0^{-1} \quad (2-127)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} y_1(s+C) & y_2(s+C) \\ y'_1(s+C) & y'_2(s+C) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{1}{y_1(s)y'_2 - y_2(s)y'_1} \begin{pmatrix} y'_2(s) & -y_2(s) \\ -y'_1(s) & y_1(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(s+C) & y_2(s+C) \\ y'_1(s+C) & y'_2(s+C) \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{i}{2\omega^2\psi'(s)} \begin{pmatrix} y'_2(s) & -y_2(s) \\ -y'_1(s) & y_1(s) \end{pmatrix} \quad (2-128) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi - \omega\omega' \sin \Delta\psi & \omega^2 \sin \Delta\psi \\ -\frac{1+(\omega\omega')^2}{\omega^2} \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi + \omega\omega' \sin \Delta\psi \end{pmatrix} \quad (2-129) \end{aligned}$$

となる。途中で式 (2-116) の関係を使った。式 (2-121) より、

$$T(s) = Y_1 Y_0^{-1} \quad (2-130)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \Delta\psi - \omega\omega' \sin \Delta\psi & \omega^2 \sin \Delta\psi \\ -\frac{1+(\omega\omega')^2}{\omega^2} \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi + \omega\omega' \sin \Delta\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu) + \alpha_T(s) \sin(2\pi\nu) & \beta_T(s) \sin(2\pi\nu) \\ -\gamma_T(s) \sin(2\pi\nu) & \cos(2\pi\nu) - \alpha_T(s) \sin(2\pi\nu) \end{pmatrix} \quad (2-131) \end{aligned}$$

となるため、各節を比較することで、

$$\omega^2 = \beta_T > 0 \quad (2-132)$$

$$\omega\omega' = -\alpha_T \quad (2-133)$$

$$\Delta\psi = 2\pi(\nu + \ell) \quad (2-134)$$

となる。式 (2-132) より、

$$\omega = \sqrt{\beta_T} \quad (2-135)$$

が、式 (2-132) と (2-133) より、

$$\beta'_T = -2\alpha_T \quad (2-136)$$

が、式 (2-116), (2-132) から、

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta_T(s')} + \psi_0 \quad (2-137)$$

が導かれる。また式 (2-104) を使って最終的な解の形を実数部を取って整理すると、

$$y(s) = \text{Re}(ay_1(s) + by_2(s)) \quad (2-138)$$

$$= \text{Re}\left(a\omega(s)e^{i\psi(s)} + b\omega(s)e^{-i\psi(s)}\right) \quad (2-139)$$

$$= \text{Re}\left((a+b)\omega(s)\cos\psi(s) + i(a-b)\omega(s)\sin\psi(s)\right) \quad (2-140)$$

$$= (a+b)\sqrt{\beta_T(s)}\cos\psi(s) \quad (2-141)$$

となる. 同様に  $y'(s)$  についても計算すると,

$$\begin{aligned}
y'(s) &= \text{Re}(ay'_1(s) + by'_2(s)) \quad (2-142) \\
&= \text{Re}\left(aw'(s)e^{i\psi(s)} + iaw(s)e^{i\psi(s)}\psi'(s) \right. \\
&\quad \left. + bw'(s)e^{-i\psi(s)} - ibw(s)e^{-i\psi(s)}\psi'(s)\right) \\
&= \text{Re}\left[\{(a+b)\omega'(s)\cos\psi(s) \right. \\
&\quad \left. -(a+b)\omega(s)\psi'(s)\sin\psi(s) \right. \\
&\quad \left. + i\{(a-b)\omega'(s)\sin\psi(s) \right. \\
&\quad \left. +(a-b)\omega(s)\psi'(s)\cos\psi(s)\}\right] \\
&= (a+b)\{\omega'(s)\cos\psi(s) - \omega(s)\psi'(s)\sin\psi(s)\} \\
&= (a+b)\left(-\frac{\alpha_T(s)}{\sqrt{\beta_T(s)}}\cos\psi(s) \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\beta_T(s)}\omega(s)\psi'(s)\sin\psi(s)\right) \\
&= -\frac{a+b}{\sqrt{\beta_T(s)}}(\alpha_T(s)\cos\psi(s) - \sin\psi(s)) \\
&= -\frac{a+b}{\sqrt{\beta_T(s)}}(\alpha_T(s)\cos\psi(s) - \sin\psi(s)) \\
&= -(a+b)\sqrt{\gamma_T(s)}\sin\left(\psi(s) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\alpha_T(s)}\right)\right) \quad (2-143)
\end{aligned}$$

となる. ここで  $a+b=A$  と置き, また初期位相を付与すると, 最終的な形として,

$$y(s) = A\sqrt{\beta_T(s)}\cos(\psi(s) + \psi_0) \quad (2-144)$$

$$y'(s) = -\frac{A}{\sqrt{\beta_T(s)}}(\alpha_T(s)\cos(\psi(s) + \psi_0) - \sin(\psi(s) + \psi_0)) \quad (2-145)$$

$$= -A\sqrt{\gamma_T(s)}\sin(\psi(s) + \psi_0) \quad (2-146)$$

となる.

## 2.10 クーラン・シュナイダー不変量

前節の  $A$  という量について考えるために,

$$W(s) = X^T(s)S_2^T J(s)X(s) \quad (2-147)$$

$$= \gamma_T x^2 + 2\alpha_T x x' + \beta_T x'^2 \quad (2-148)$$

という量を考える. 式 (2-148) に先の式 (2-144), (2-145) を代入すると,

$$W(s) = \gamma_T(s)A^2\beta_T(s)\cos^2(\psi(s) + \psi_0) \quad (2-149)$$

$$\begin{aligned}
&-2A^2\alpha_T(s)\cos(\psi(s) + \psi_0) \\
&\cdot (\alpha_T(s)\cos(\psi(s) + \psi_0) + \sin(\psi(s) + \psi_0)) \\
&+ A^2(\alpha_T(s)\cos(\psi(s) + \psi_0) + \sin(\psi(s) + \psi_0))^2 \\
&= A^2 \quad (2-150)
\end{aligned}$$

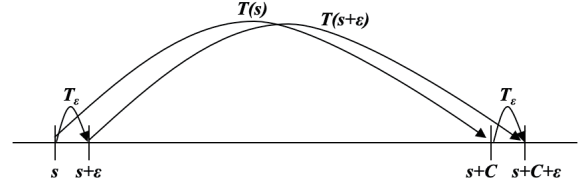


Figure 5  $T(s), T_\epsilon, T(s+\epsilon)$  の関係.

となり,  $s$  の依存性は消える. つまりこの  $W(s)$  はリングのどこの点においても保存される. これを **Courant-Snyder Invariant** (クーラン・シュナイダー不変量, 以後 **CS 不変量**) と呼ぶ. これは水平方向 ( $x$ ), 垂直方向 ( $y$ ) のそれぞれで保存される量であり, 一般にエミッタンス ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ) と呼ばれ, ベータatron振動の振幅を特徴付ける量となる.

$W(s)$  が保存することは, 以下からもわかる. リングのある点  $s$  から微小量  $\epsilon$  進んだ 1 周分の転送行列  $T(s+\epsilon)$  を Fig.5 のようにして考えると,

$$T(s+\epsilon)T_\epsilon = T_\epsilon T(s) \quad (2-151)$$

が成立する. ここで,  $J$  は  $T(s)$  同様に,

$$J(s+\epsilon) = T_\epsilon J(s)T_\epsilon^{-1} \quad (2-152)$$

が成立する. これを使うと, 点  $s$  から微小量  $\epsilon$  進んだ先の  $W(s+\epsilon)$  が,

$$W(s+\epsilon) = X^T(s+\epsilon)S_2^T J(s+\epsilon)X(s+\epsilon) \quad (2-153)$$

$$= X^T(s)T_\epsilon^T S_2^T T_\epsilon J(s)T_\epsilon^{-1}T_\epsilon X(s) \quad (2-154)$$

$$= X(s)S_2^T J(s)X(s) \quad (2-155)$$

$$= W(s) \quad (2-156)$$

と微小転送する前と一致するということがわかる.

## 2.11 誤差を考慮した軌道方程式

ここまで, 式 (2-24) で表される軌道方程式の解として, ベータatron振動の解の形を求めた. ここで, 軌道方程式に誤差が与える影響について考えてみよう. 基準運動量  $p_0$ , 偏向磁石磁場  $B$  がそれぞれ  $p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p$ ,  $B \rightarrow B + \Delta B$  とすると, 式 (2-26) は,

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{K(s)}{1 + \Delta p/p_0}x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta B}{B} \quad (2-157)$$

と書き換えられ, 右辺に非斉次項が発生する. 右辺が 0 であった場合の解がベータatron振動であり, その解

を  $x_\beta$  とする。右辺の運動量誤差に対応する特解を  $x_\epsilon$ 、誤差磁場に対応する特解を  $x_{COD}$  とすると、式 (2-157) の一般解は、

$$x = x_\beta + x_\epsilon + x_{COD} \quad (2-158)$$

与えられる。

$x_{COD}$  の“COD”は **Closed Orbit Distortion (閉軌道歪み)** という意味で、誤差磁場がない理想的なリング 1 周の閉軌道に対し、誤差磁場の影響で成立した新たな閉軌道のことである。実際に誤差磁場の影響でリングの COD は設計からずれるが、補正電磁石により修正され、設計軌道に近づく。また、リング型放射光加速器では放射光の利用者がビームライン下流で観測する放射光の位置を調整するため、積極的に補正電磁石を利用し、設計軌道からずれた COD に設定することもある。本稿では以降  $x_{COD} = 0$  として話を進める。

$x_\epsilon$  については次節でより詳しく説明するが、 $x_\epsilon = \eta \Delta p / p$  と表され、一般に電子ビームのサイズ  $\sigma_x$  は先のベータatron振動と合わせて、

$$\sigma_x = \sqrt{\epsilon_x \beta_{Tx} + \left( \eta \frac{\Delta p}{p} \right)^2} \quad (2-159)$$

で表される。 $\eta$  については次節で説明するが、上式より、ビームサイズの大きさには様々なパラメータが寄与することがわかると思う。第 1 章で触れたように、輝度を上げるにはこの電子ビームのビームサイズを低減することが必要となる。

## 2.12 分散 (Dispersion)

リングを周回している電子が基準運動量  $p_0$  からずれた運動量、

$$p = p_0 + \Delta p \quad (2-160)$$

を持って、偏向磁石を通過する場合を考えよう。式 (2-13) から運動量  $p$  のずれによって異なる曲率半径を持ち、偏向磁石に  $x = 0, x' = 0$  で入射したとしても、出口で  $x$  と  $x'$  が 0 以外の値を持つことは容易に想像がつく。運動方程式 (2-22) の  $p$  に対し、式 (2-160) を代入すると、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} \quad (2-161)$$

と求まる。ここでは偏向磁石の寄与のみがあるため、 $K(s) = 1/\rho^2$  である。

$\Delta p/p = 0$  の場合、式 (2-161) は

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0 \quad (2-162)$$

と調和振動子のシンプルな斉次微分方程式の形になり、斉次解は、

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} \quad (2-163)$$

となり、 $x'$  についても、

$$x' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} \quad (2-164)$$

となる。一方、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (2-165)$$

の特殊解  $x_p$  についてもすぐに、

$$x_p = \rho \frac{\Delta p}{p} \quad (2-166)$$

が見つかる。従って一般解は、

$$x = A \cos \frac{s}{\rho} + B \sin \frac{s}{\rho} + \rho \frac{\Delta p}{p} \quad (2-167)$$

$$x' = -\frac{A}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} + \frac{B}{\rho} \cos \frac{s}{\rho} \quad (2-168)$$

となる。ここで  $s = 0$  で  $x = x_0, x' = x'_0$  であることを使うと、

$$A = x_0 - \rho \frac{\Delta p}{p} \quad (2-169)$$

$$B = \rho x'_0 \quad (2-170)$$

と求められるので、これを式 (2-167)、(2-168) に代入して整理すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} & \rho (1 - \cos \frac{s}{\rho}) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} & \sin \frac{s}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_0 \quad (2-171)$$

と、求まる。ここで、この運動量のずれで決まる基準軌道からのずれ  $x_\epsilon$  とその角度  $x'_\epsilon$  を、新たに導入する分

散関数 (Dispersion Function)  $\eta(s), \eta'(s)$  を使って,

$$x_\epsilon = \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (2-172)$$

$$x'_\epsilon = \eta' \frac{\Delta p}{p} \quad (2-173)$$

と定義すると, 式 (2-171) について,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2-174)$$

と書き換えることができる. 試しに  $\eta_0 = 0, \eta'_0 = 0$  から式 (2-171) を使って  $\eta_1, \eta'_1$  を計算すると,

$$\eta_1 = \rho(1 - \cos \theta) \quad (2-175)$$

$$\eta'_1 = \sin \theta \quad (2-176)$$

となり,  $\eta = 0, \eta' = 0$  の始状態から分散と分散の微分が 0 以外の値を持つことがわかる. ここで偏向磁石の長さを  $\ell$  として  $\theta = \ell/\rho$  という関係を使った.

これまで偏向磁石におけるケースを考えてきたが, 4 極磁石の場合式 (2-161) の右辺, 非斉次項は偏向磁石がないため 0 になる. 従って, 4 極磁石の場合の分散関数の転送行列は, Focus のときであれば式 (2-49) と同値なる. つまり偏向磁石と異なり, 0 から分散を生む効果はないが, 分散が 0 以外であった場合, 分散に対する効果が発生する.

### 2.13 Momentum Compaction Factor

前節で見たように, 基準運動量からずれた電子は基準軌道からずれた軌道を新たな閉軌道として周回する. ここではその新たな周回軌道の量について考える.

この運動量差から来る周回軌道長の差  $\Delta C$  を, 新たに定義する **Momentum Compaction Factor**  $\alpha_m$  を使って,

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_m \frac{\Delta p}{p} \quad (2-177)$$

と表現することとする<sup>\*8</sup>. ここである 1 つの偏向磁石での軌道差について考えてみる (Fig.6).

運動量  $p = p_0 + \Delta p$  を持った電子が偏向磁石内で取

る軌道長  $d\ell$  は,

$$d\ell = \sqrt{(d\ell')^2 + (x'd\ell')^2} \quad (2-178)$$

$$= \sqrt{\{(\rho + x)d\theta\}^2 + (1 + x'^2)} \quad (2-179)$$

$$= \sqrt{(\rho + x)^2(1 + x'^2)} \cdot d\theta \quad (2-180)$$

$$\sim (\rho + x)d\theta \quad (2-181)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \rho d\theta \quad (2-182)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) ds \quad (2-183)$$

と計算できる. ここで第 3 式から第 4 式に移る際,  $\Delta p/p$  の 2 次以降を無視した. 基準軌道との軌道差は,

$$d\ell - ds = \frac{x}{\rho} ds \quad (2-184)$$

と計算できるので, リング 1 周分の軌道差  $\Delta C$  は,

$$\Delta C = \oint \frac{x}{\rho} ds \quad (2-185)$$

$$= \frac{\Delta p}{p} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (2-186)$$

と求められる. ここで式 (2-186) を見てわかるように, 積分の中には  $1/\rho(s)$  があるため, 単純な 4 極磁石などは  $\Delta C$  に寄与しない. これらより, 式 (2-177) の定義から  $\alpha_m$  は,

$$\alpha_m = \frac{\Delta C/C}{\Delta p/p} \quad (2-187)$$

$$= \frac{1}{C} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (2-188)$$

と求められる.

### 2.14 運動量差による Tune-Shift と Chromaticity(色収差)

前節では運動量にずれがある場合の軌道差について議論したが, 本節ではベータatron振動でも議論したチューン  $\nu$  への影響について考え, その影響を補正する方法について紹介する.

まずは運動量にずれがあるときにチューン  $\nu = \mu/2\pi$  がどれだけずれるのかを見積もる. このチューンのずれのことを **tune-shift** といい, 本節で触れる運動量差以外にも様々な要因がある.

Focus の 4 極磁石の転送行列は式 (2-49) で示したよ

<sup>\*8</sup> 他の  $\alpha$  と差別化するため,  $m$  の添字を付与した.

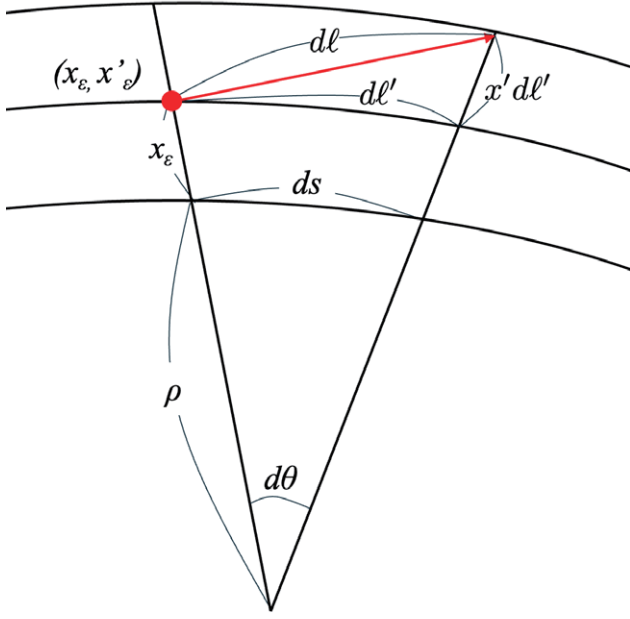


Figure 6 運動量  $p = p_0 + \Delta p$  を持った電子が偏向磁石内で取る軌道。

うに、

$$T_f = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix} \quad (2-189)$$

であるが、ここで4極磁石の磁極長を  $L$  とし、 $LK$  を維持したまま  $L \rightarrow 0$  の極限を考えると<sup>\*9</sup>、

$$T_f|_{L \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \quad (2-190)$$

となる。ここで  $KL = k$  とした。ちなみにこの操作を **Thin Lens 近似** と呼び、簡易的な見積り有的时候によく使われる。Defocus の場合は、

$$T_d|_{L \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad (2-191)$$

となり、 $T_{21}$  成分の符号が反転する形となる。

ある点である4極成分  $k$  が追加で発生した時、元の1周分の転送行列  $T_0$  は、先のような長さ無限小の thin lens な4極成分による転送行列  $T_k$  の修正を受けて新

たな1周分の転送行列  $T'$  となり、

$$T' = T_k T_0 \quad (2-192)$$

が成立する。行列をあらわに書くと、

$$\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_T \sin \mu & \beta_T \sin \mu \\ -\gamma_T \sin \mu & \cos \mu - \alpha_T \sin \mu \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_{T0} \sin \mu_0 & \beta_{T0} \sin \mu_0 \\ -\gamma_{T0} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_{T0} \sin \mu_0 \end{pmatrix} \quad (2-193)$$

となり、チューン  $\mu$  がオリジナルの  $\mu_0$  からどれくらい変わるかを見積もる。 $T$  の固有方程式<sup>\*10</sup>を式 (2-193) に適用すると、

$$\cos \mu = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) \quad (2-194)$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos \mu_0 - k \beta_{T0} \sin \mu_0) \quad (2-195)$$

となる。ここでチューンの変化  $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$  について、チューンシフト量  $\Delta\mu$  は小さいとして、式 (2-195) を展開して  $\Delta\mu$  の1次までを計算すると、

$$\Delta\mu = \frac{k \beta_{T0}}{4\pi} \quad (2-196)$$

が導かれる。ここで  $k = KL$  だったことを思い出し、 $k = \Delta K ds$  と置き換えて積分形にすると、

$$\Delta\mu = \frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta_{T0}(s) ds \quad (2-197)$$

となる。

運動量が大い方向にずれる時、つまり  $p = p_0 + \Delta p$  で  $\Delta p > 0$  の時、4極磁石の収束力は相対的に弱くなったように見える。つまり、

$$K \rightarrow \frac{K}{1 + \Delta p/p} \quad (2-198)$$

$$\sim K - K \frac{\Delta p}{p} \quad (2-199)$$

となり、余剰な収束力  $\Delta K$  は、

$$\Delta K = -K \frac{\Delta p}{p} \quad (2-200)$$

となる。これを式 (2-197) に代入すると、

$$\Delta\mu = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta K \beta_{T0}(s) ds \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (2-201)$$

<sup>\*9</sup> つまり focusing power の総量は変わらないが、focusing 作用がある1点に凝縮されているようなイメージである。

<sup>\*10</sup> その解は式 (2-100) であった。

となる。この tune-shift を運動量幅  $\Delta p/p$  で割った量,

$$\xi = \frac{\Delta\nu}{\Delta p/p} \quad (2-202)$$

を **Chromaticity** (色収差) と呼び、リング 1 周分,

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \oint K_1(s) \beta_{T0}(s) ds \quad (2-203)$$

を **Natural Chromaticity** と呼ぶ<sup>\*11</sup>。式 (2-201) が  $x$  方向に収束力が付与された場合の chromaticity であり、 $y$  方向については収束力が発散力に置き換わるので、方向を明示して列挙すれば、

$$\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \oint K_1(s) \beta_{T0}(s) ds \quad (2-204)$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint K_1(s) \beta_{T0}(s) ds \quad (2-205)$$

となる。

リング型加速器には整数や半整数など、振動が共鳴して振幅が増幅、ビームロスに陥る tune が存在する。安定的な tune の動作点を決めたとしても、有限の  $\Delta p/p$  を持つ電子がこの色収差による tune-shift で不安定領域に突入してしまつては実際の安定した運転は不可能となる。そこで偏向磁石、4 極磁石に次ぎ、6 極磁石を、この色収差の補正のために導入する。

6 極磁石の磁場強度は、

$$B_x = 2a_3xy \quad (2-206)$$

$$B_y = a_3(x^2 - y^2) \quad (2-207)$$

となるように設計、製作される。このような磁場があるときの  $\xi$  への寄与を考える。偏向磁石と 4 極磁石がある場合における運動方程式 (2-23) からの類推から、水平方向は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a_3}{B\rho}(x^2 - y^2) \quad (2-208)$$

$$= -\lambda(x^2 - y^2) \quad (2-209)$$

という 6 極磁石の運動方程式が成り立つ。ここで、

$$\lambda = \frac{a_3}{2B\rho} \quad (2-210)$$

として新たに  $\lambda$  を導入した。 $y$  方向も同様に、

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 2\lambda xy \quad (2-211)$$

が成立する。

ここで、6 極磁石が分散  $\eta$  がある場所に設置されていると仮定すると、理想的には  $\eta_y = 0$  であることも使って、

$$x = x_\varepsilon + x_\beta = \eta_x \frac{\Delta p}{p} + x_\beta \quad (2-212)$$

$$y = y_\varepsilon + y_\beta = y_\beta \quad (2-213)$$

となる。さらに  $x_\beta = y_\beta = 0$  の時、

$$\frac{d^2\eta_x}{ds^2} = -\lambda\eta_x^2 \frac{\Delta p}{p} \quad (2-214)$$

が成立する。式 (2-212), (2-213) を式 (2-209), (2-211) に代入し、式 (2-214) の関係を使って、 $x_\beta, y_\beta$  の 1 次までを整理すると、

$$\frac{d^2x_\beta}{ds^2} = -2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p} x_\beta \quad (2-215)$$

$$\frac{d^2y_\beta}{ds^2} = 2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p} y_\beta \quad (2-216)$$

が導かれる。つまり 6 極磁石を分散のあるところに設置した場合、式 (2-200) の形で書くと、

$$\Delta K_x = 2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p} \quad (2-217)$$

$$\Delta K_y = -2\lambda\eta_x \frac{\Delta p}{p} \quad (2-218)$$

という収束力が得られる、ということを意味する。これを符号に注意して式 (2-204), (2-205) に組み込むと、

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \oint (2\lambda(s)\eta_x(s) - K_1(s)) \beta_{Tx}(s) ds \quad (2-219)$$

$$\xi_y = \frac{1}{4\pi} \oint (K_1(s) - 2\lambda(s)\eta_x(s)) \beta_{Ty}(s) ds \quad (2-220)$$

となり、chromaticity を制御することが可能となる。式 (2-219), (2-220) にあるように、6 極磁石による  $\xi$  の補正量は 6 極磁場の強さ  $\lambda$ 、水平方向の分散  $\eta_x$ 、それぞれの  $\beta_T$  に比例するので、まずは分散が大ききところに 6 極磁石を設置するのが効果的である。また、それぞれ補正したい  $\xi$  の  $\beta_T$  が比較的大きいところに設置すれば  $\lambda$  を相対的に小さくすることができる。一般に  $\xi_x$  と  $\xi_y$  の 2 つをそれぞれ任意に制御したいので、独立して  $\lambda$  を制御できる 6 極磁石が 2 family 以上必要となる。

## 2.15 縦方向の微小振動

これまでは横方向、つまり  $x$  と  $y$  の方向にまつわる運動について説明してきたが、ここでは縦方向、つまり  $s$

<sup>\*11</sup> 後述する 6 極磁石による補正前の値、という意味である。

方向、もしくは時間方向に関する運動について簡単にまとめる．特にここでは安定した点近傍の微小振動に限定して説明を行う．

リングを周回する電子は偏向磁石や挿入光源などで放射光を放出して、エネルギー  $U$  を失う．このエネルギーを補完するためにリングには高周波空洞 (RF 空洞) が設置されている．RF 空洞は sin-like な振動電場を持っており、エネルギー収支 0 の同期した電子は、

$$eV_0 = e\hat{V} \sin \phi_0 \quad (2-221)$$

のエネルギーを RF 空洞からもらう．ここで  $\hat{V}$  は振動電場 (電圧) の最大振幅である．この  $\phi_0$  を同期位相 (synchronous phase) と呼ぶ．非同期な電子は、

$$eV = e\hat{V} \sin \phi \quad (2-222)$$

という量のエネルギーをもらう．

電子の運動量が基準運動量  $p_0$  よりも大きいとき、式 (2-177) より  $\alpha_m > 0$  を仮定すると、電子は“基準粒子”よりも長い距離を走ることになる．放射光源として稼働するリング型加速器のエネルギーは前述の通り、相対論的極限にいたので電子の速度は光速  $c$  と見なしてよく、RF 空洞への到着時間が遅くなることになる．そうすると、Fig.7を見てわかるように、基準粒子よりも低いエネルギーを受け取ることになり、エネルギーもしくはは到着タイミングの位相は安定点を中心に振動する．エネルギーが低い場合はこの逆である．これを**位相安定性**と呼び、リング型加速器において縦方向に安定して電子を貯蔵できる重要なメカニズムである．また、この同期位相を中心に縦方向振動していることを**シンクロトロン振動**と呼ぶ．

定性的であった上記説明をもう少し定量的に説明してみる．基準粒子とのエネルギー差を  $\epsilon$  とすると、エネルギー収支の時間変化は、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{eV(\tau) - U(\epsilon)}{T_0} \quad (2-223)$$

となる．ここで  $\tau$  は Fig.7にあるように通常時刻  $t$  の逆符号で基準時間に対して到着時間が早いほど正に大きくなり、RF 空洞の角振動数  $\omega_{rf}$  を使うと  $\phi_0 = \omega_{rf}\tau_0$  である．また放射エネルギー  $U$  を  $\epsilon$  の関数であることを明示した． $T_0$  は基準粒子の周回時間であり、 $T_0 = C/c$  である．

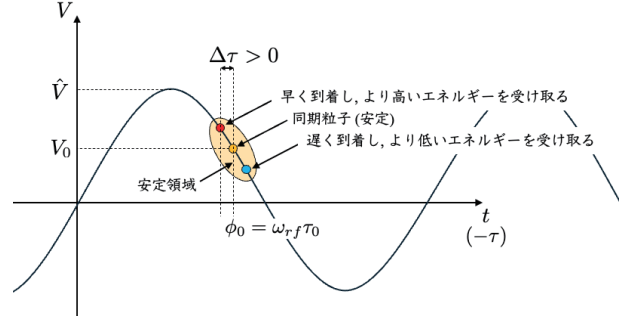


Figure 7 RF 空洞に電子が到達するタイミングの関係．

基準粒子のエネルギー収支について考えれば、式 (2-223) の分子は、

$$eV(0) - U(0) = 0 \quad (2-224)$$

となる．ここで、

$$eV(\tau) = eV(0) + e\dot{V}\tau \quad (2-225)$$

$$U(\epsilon) = U(0) + \frac{dU}{d\epsilon}\epsilon \quad (2-226)$$

と置くと、式 (2-223) は、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e\dot{V}\tau - \frac{dU}{d\epsilon}\epsilon}{T_0} \quad (2-227)$$

と変形できる．また、式 (2-177) より、

$$\frac{dt}{T_0} = \alpha_m \frac{\Delta p}{p} \quad (2-228)$$

であり、 $\Delta t = -\Delta\tau$  とすれば、最終的に、

$$\frac{d\tau}{dt} = -\alpha_m \frac{\epsilon}{E_0} \quad (2-229)$$

が成立する．式 (2-227), (2-229) から、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + 2\alpha_\epsilon \frac{d\tau}{dt} + \Omega^2\tau = 0 \quad (2-230)$$

が導出される．ここで  $\alpha_\epsilon$  はシンクロトロン振動 (縦方向) の減衰定数、 $\Omega$  はシンクロトロン周波数と呼ばれ、

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \quad (2-231)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\alpha_m e\dot{V}}{E_0 T_0}} \quad (2-232)$$

である．式 (2-230) の解を  $\tau(t) = e^{\lambda t}$  と置くと、

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_\epsilon \pm \sqrt{\alpha_\epsilon^2 - \Omega^2} \quad (2-233)$$

となるが、一般に  $\alpha_m \ll \Omega$  であることから、

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_\epsilon \pm i\Omega \quad (2-234)$$

となり、最終的に、

$$\tau(t) = Ae^{-\alpha_\epsilon t} \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (2-235)$$

となる。  $e^{-\alpha_\epsilon t}$  の項はシンクロトロン振動の振幅が徐々に小さくなっていく (damp していく) ことを示しており、  $\cos(\Omega t - \theta_0)$  の項はシンクロトロン振動そのもので、まさに  $\Omega$  がその振動数であることを示している。式 (2-231) より、  $dU/d\epsilon = 0$  の場合、  $\alpha_\epsilon = 0$  となり振幅の減衰効果はなくなり、永遠に同じ振幅でシンクロトロン振動が続くことを意味する。

## 2.16 放射積分

この後で具体的な表式を求める平衡エミッタンスなど、放射光源リングの性能を議論する際に、放射積分と呼ばれる量、

$$I_1 = \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds \quad (2-236)$$

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (2-237)$$

$$I_3 = \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds \quad (2-238)$$

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds \quad (2-239)$$

$$I_5 = \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds \quad (2-240)$$

$$(2-241)$$

を使うといくつかの量の表現が楽になる。ここで  $H$  は、

$$H = (\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2) \quad (2-242)$$

である。これら放射積分を使うと、先に導出した Momentum Compaction Factor  $\alpha_m$  は、

$$\alpha_m = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds \quad (2-243)$$

$$= \frac{I_1}{C} \quad (2-244)$$

と書ける。

## 2.17 放射減衰

2.15節では  $dU/d\epsilon > 0$  であるときに、シンクロトロン振動の振幅が指数的に減少していくことを垣間見た。本節では縦方向だけでなく横方向を含めた、振動の減衰について説明を行う。

### 2.17.1 放射パワーと放射エネルギー

基準エネルギー  $E_0$  を持つ電子が偏向磁石の垂直磁場  $B_0$  下 (曲率半径  $\rho$ ) で曲げられたときに放出する放射光パワー  $P_0$  は、

$$P_0 = \frac{2e^4}{3m_e c^2} \left( \frac{E_0}{m_e c^2} \right)^2 B_0^2 \quad (2-245)$$

$$= \frac{2e^2 r_e c^3}{3(m_e c^2)^3} E_0^2 B_0^2 \quad (2-246)$$

で与えられる [2]。ここで  $r_e$  は電子の古典半径、

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \sim 2.82 \times 10^{-15} \text{m} \quad (2-247)$$

である また、基準運動量  $p_0$  が  $p_0 = eB_0\rho$  と書けることを使って、

$$P_0 = \frac{2r_e c}{3(m_e c^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho} \quad (2-248)$$

と書き換えることができる。

この“基準電子”がリング1周する際に放出するエネルギー  $U_0$  は  $P_0$  を周回時間  $T_0$  の範囲で積分することで得られる。すなわち、

$$U_0 = \int_0^{T_0} P_0 dt \quad (2-249)$$

$$= \oint P_0 \frac{ds}{c} \quad (2-250)$$

$$= \frac{2r_e E_0^4}{3(m_e c^2)^3} \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (2-251)$$

で計算できる。ここで放射積分  $I_2$  を使うと、式 (2-237) より、

$$U_0 = \frac{2r_e E_0^4}{3(m_e c^2)^3} I_2 \quad (2-252)$$

と表すことができる。

### 2.17.2 シンクロトロン振動の減衰

2.15節で説明したように、RF 空洞による加速と周回軌道差の関係から、微小振動しているときの微分方程式は式 (2-230) で表現される。シンクロトロン振動の減衰時間  $1/\tau_\epsilon$  はシンクロトロン振動の減衰定数  $\alpha_\epsilon$  の逆数として、

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \quad (2-253)$$

で与えられ、 $dU/d\epsilon$  が計算できればその具体的な値を求めることができる。

これを求めるため、 $P_0$  の表式 (2-246) 中の  $E_0$  と  $B_0$  がリング周回中に変化することを考慮し、

$$U = \int_0^T P dt \quad (2-254)$$

$$= \oint P \frac{dl}{c} \quad (2-255)$$

$$= \frac{2e^2 r_e c^2}{(m_e c^2)^3} \oint E^2 B^2 dl \quad (2-256)$$

と書くことができる。ここで  $dl$  は基準エネルギー  $E_0$  から  $\epsilon$  ずれたエネルギーを持つ電子の軌道長で、式 (2-183) を書き換えて、

$$dl = \left(1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0}\right) ds \quad (2-257)$$

となる。また  $\delta x = \eta_x \epsilon / E_0$  ずれた軌道における磁場  $B$  は  $B$  を水平方向に  $\epsilon/E$  の 1 次まで展開して、

$$B = B_{0y} + \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\epsilon}{E_0} \quad (2-258)$$

と求まる。これらを用いて、 $E_0 \rightarrow E_0 + \epsilon$ ,  $B_0 \rightarrow B_0 + (dB_y/dx)(\eta_x \epsilon / E_0)$ ,  $dl \rightarrow (1 + (\eta_x / \rho_0)(\epsilon / E_0)) ds$  の 3 つの効果を式 (2-255) に反映させると、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c} \oint P \left( E_0 + \epsilon, B_0 + \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\epsilon}{E_0} \right) \left( 1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left( P_0 + \frac{\partial P}{\partial E_0} \epsilon + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \eta_x \frac{\epsilon}{E_0} \right) \left( 1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} \frac{\epsilon}{E_0} \right) ds \\ &= U_0 + \frac{\epsilon}{c} \oint \left( \frac{\partial P}{\partial E_0} + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0 E_0} \right) ds \quad (2-259) \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\epsilon} &= \frac{1}{c} \oint \left( \frac{\partial P}{\partial E_0} + \frac{\partial P}{\partial B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0 E_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left( \frac{2P_0}{E_0} + \frac{2P_0}{B_0} \frac{dB_y}{dx} \frac{\eta_x}{E_0} + P_0 \frac{\eta_x}{\rho_0} \right) ds \\ &= \frac{1}{cE_0} \oint P_0 \left\{ 2 + \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \\ &= \frac{2r_e \gamma_r^3}{3} \oint \left\{ \frac{2}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \quad (2-260) \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} \oint \left\{ \frac{2}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{1}{\rho_0} + 2\rho_0 K_1 \right) \eta_x \right\} ds \quad (2-261)$$

となる。ここで式 (2-237), (2-239) より放射積分  $I_2$  と  $I_4$  を使うと、

$$\frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} (2I_2 + I_4) \quad (2-262)$$

$$= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_\epsilon \quad (2-263)$$

となる。ここで、

$$J_\epsilon = 2 + \frac{I_4}{I_2} \quad (2-264)$$

はシンクロトロン振動の **Damping Partition Number (減衰分配係数)** と呼ばれる。

### 2.17.3 水平ベータトロン振動の減衰

横方向 (水平, 垂直) のベータトロン振動の減衰は、i) RF 空洞における加速によって生じる発散角の減少と、ii) 放射光放出によって減少したエネルギー分が分散を通してベータトロン振動に変化を与えることにより説明される。このベータトロン振動の減衰とは、つまりベータトロン振動の振幅の減衰のことであり、式 (2-144) - (2-146) で表されるように、CS 不変量  $W$  の減衰の様子、つまり  $dW/dt$  を求めることが目的となる。以下、各寄与について説明した後に、最終的な水平ベータトロン振動の減衰時間  $\tau_x$  を見積もることとする。

#### i) RF 空洞による効果

まずは RF 空洞でエネルギーを与えられる場面を考えてみよう (Fig.8)。リングを周回する際に失ったエネルギーを補うために RF 空洞で  $\epsilon$  のエネルギーをもらおうと仮定すると、 $x'$  は縦方向分のエネルギーが増えるため、通過前を  $x'_{s-}$ 、通過後を  $x'_{s+}$  とすると、

$$x'_{s+} = \frac{p_x}{p_s + \epsilon} \quad (2-265)$$

$$= \frac{p_x}{p_s (1 + \epsilon/p_s)} \quad (2-266)$$

$$\sim \frac{p_x}{p_s (1 + \epsilon/E)} \quad (2-267)$$

$$= x'_{s-} \frac{1}{1 + \epsilon/E} \quad (2-268)$$

$$\sim x'_{s-} \left( 1 - \frac{\epsilon}{E} \right) \quad (2-269)$$

となり変化分は  $\Delta x' = -x'\epsilon/E$  となる．ここで CS 不変量の変化  $\Delta W$  を考えると、

$$\Delta W_{d1} = W' - W \quad (2-270)$$

$$= (\gamma_T x^2 + 2\alpha_T x(x' + \Delta x') + \beta_T (x' + \Delta x')^2) - (\gamma_T x^2 + 2\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \quad (2-271)$$

$$= 2\alpha_T x \Delta x' + 2\beta_T x' \Delta x' + \beta (\Delta x')^2 \quad (2-272)$$

$$\sim 2\alpha_T x \Delta x' + 2\beta_T x' \Delta x' \quad (2-273)$$

$$= -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E} \quad (2-274)$$

となる．ここでベータatron振動の表式 (2-144) - (2-146) に立ち返って、位相に対する平均を取ることを考える．例えば、

$$\langle x^2 \rangle = \langle W \beta_T \cos^2(\psi(s) + \psi_0) \rangle \quad (2-275)$$

$$= W \beta_T \left\langle \frac{\cos(2(\psi(s) + \psi_0)) + 1}{2} \right\rangle \quad (2-276)$$

$$= \frac{W \beta_T}{2} \quad (2-277)$$

となり、同様に、

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{W \gamma_T}{2} \quad (2-278)$$

$$\langle x x' \rangle = -\frac{W \alpha_T}{2} \quad (2-279)$$

となる．これを使うと、リング1周分の CS 不変量の変化量は、

$$\frac{\langle \Delta W_{d1} \rangle}{T_0} = -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E} \quad (2-280)$$

$$= -2 \left( -\frac{W \alpha_T^2}{2} + \frac{W \beta_T \gamma_T}{2} \right) \frac{\epsilon}{T_0 E} \quad (2-281)$$

$$= -\frac{W}{T_0} \frac{\epsilon}{E} \quad (2-282)$$

$$= -\frac{W}{T_0} \frac{U_0}{E} \quad (2-283)$$

となる．

## ii) 分散による効果

次に分散があるところで、電子が放射光を放出した場合について考えてみる．このとき、 $x$  及び  $x'$  は滑らかに変化するはずなので、ベータatron振動と分散の寄与の和は0、つまり、

$$x_\beta + x_\epsilon = 0 \quad (2-284)$$

$$x'_\beta + x'_\epsilon = 0 \quad (2-285)$$

$$(2-286)$$

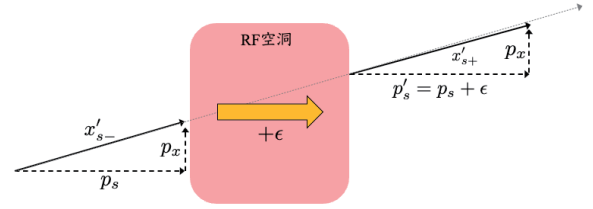


Figure 8 RF 空洞前後における  $x'$  の変化.

が成立する．従って、放射光放出による  $\epsilon$  のエネルギー変化はベータatron振動に転換され、

$$\Delta x_\beta = -\eta_x \frac{\epsilon}{E_0} \quad (2-287)$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta'_x \frac{\epsilon}{E_0} \quad (2-288)$$

となる．この影響で変化した CS 不変量  $W'$  は、

$$W' = \gamma_T \left( x - \eta_x \frac{\epsilon}{E} \right)^2 + 2\alpha_T \left( x - \eta_x \frac{\epsilon}{E} \right) \left( x' - \eta'_x \frac{\epsilon}{E} \right) + \beta_T \left( x' - \eta'_x \frac{\epsilon}{E} \right)^2 \quad (2-289)$$

$$\sim \gamma_T \left( x^2 - 2\eta_x \frac{\epsilon}{E} \right) + 2\alpha_T \left( x x' - \eta'_x x \frac{\epsilon}{E} - \eta_x x' \frac{\epsilon}{E} \right) + \beta_T \left( x'^2 - 2\eta'_x x' \frac{\epsilon}{E} \right) \quad (2-290)$$

となり、

$$\begin{aligned} \Delta W_{d2} &= -2\gamma_T \eta_x \frac{\epsilon}{E} - 2\alpha_T \frac{\epsilon}{E} (\eta'_x x + \eta_x x') - 2\beta_T \eta'_x x' \frac{\epsilon}{E} \\ &= -2\eta \frac{\epsilon}{E} (\gamma_T x + \alpha_T x') - 2\eta' \frac{\epsilon}{E} (\alpha_T x + \beta_T x') \end{aligned} \quad (2-291)$$

となる．ここで振幅  $x$  を持つ電子が放射光を出して変化するエネルギー  $\epsilon$  を考える．シンクロtron振動の減衰と同様に、放射パワー  $P$  について、軌道長と磁場が変わる効果を鑑みると、

$$\epsilon = -P \Delta t \quad (2-292)$$

$$= -P \frac{d\ell}{c} \quad (2-293)$$

$$= - \left( P_0 + \frac{\partial P}{\partial B} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c} \quad (2-294)$$

$$= -P_0 \left( 1 + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c} \quad (2-295)$$

となる。これを先の式 (2-291) に代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta W_{d2} &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(1 + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x\right) \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \\ &\quad \cdot \{\eta(\gamma_T x + \alpha_T x') + \eta'(\alpha_T x + \beta_T x')\} \\ &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{2}{\rho B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} x^2\right) \\ &\quad \cdot \{\eta(\gamma_T x + \alpha_T x') + \eta'(\alpha_T x + \beta_T x')\} \quad (2-296)\end{aligned}$$

となる。ここで先のベータトロン振動の平均の関係、式 (2-277) - (2-279) と、さらに、

$$\langle x \rangle = 0 \quad (2-297)$$

$$\langle x' \rangle = 0 \quad (2-298)$$

$$\langle x^3 \rangle = 0 \quad (2-299)$$

$$\langle x^2 x' \rangle = 0 \quad (2-300)$$

を使うと、

$$\begin{aligned}\Delta W_{d2} &= \frac{2P_0 ds}{cE_0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) \\ &\quad \{ \eta(\gamma_T x^2 + \alpha_T x x') + \eta'(\alpha_T x^2 + \beta_T x'^2) \} \\ &= \frac{P_0 ds}{cE_0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) W_\eta \quad (2-301)\end{aligned}$$

となる。これをリング 1 周分積分し、周回時間  $T_0$  で割ると、再び放射積分  $I_4$  を使い、

$$\frac{\Delta W_{d2}}{T_0} = \frac{1}{cT_0 E_0} \oint P_0 \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K_1\right) \eta W ds \quad (2-302)$$

$$= \frac{2r_e \gamma_r^3}{eT_0} I_4 W \quad (2-303)$$

となる。

### iii) 2 つの効果を合わせる

水平ベータトロン振動の振幅は  $\sqrt{W}$  に比例しており、減衰定数  $1/\tau_x$  は、

$$\frac{1}{\sqrt{W}} \frac{d\sqrt{W}}{dt} = \frac{1}{2W} \frac{dW}{dt} \quad (2-304)$$

で求められる。“減衰” 定数であることから、符号に気をつけて  $\Delta W_1$  と  $\Delta W_2$  を足し合わせると、

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{2W} \frac{dW_d}{dt} \quad (2-305)$$

$$= \frac{1}{2W} \frac{\Delta W_{d1} + \Delta W_{d2}}{T_0} \quad (2-306)$$

$$= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} (I_2 - I_4) \quad (2-307)$$

$$= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_x \quad (2-308)$$

となる。ここで、

$$J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} \quad (2-309)$$

は水平ベータトロン振動の Damping Partition Number である。

#### 2.17.4 垂直ベータトロン振動の減衰

前項の水平ベータトロン振動では水平分散  $\eta_x$  とその微分  $\eta'_x$  が 0 でないことからその効果を考慮する必要があったが、垂直方向の分散関数  $\eta_y$  及び  $\eta'_y$  は一般には 0 である<sup>\*12</sup>。従って、CS 不変量の変化量  $\Delta W$  は、

$$\Delta W = \Delta W_{d1} + \Delta W_{d2} \quad (2-310)$$

$$= \Delta W_{d1} \quad (2-311)$$

となり、減衰時間  $\tau_y$  は式 (2-307) から、

$$\frac{1}{\tau_y} = \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 \quad (2-312)$$

$$= \frac{r_e \gamma_r^3}{3T_0} I_2 J_y \quad (2-313)$$

となる。ここであえて  $y$  方向ベータトロン振動の Damping Partition Number を  $J_y = 1$  として明示した。

#### 2.18 放射励起

前節では放射光の放出と RF 空洞でのエネルギー補充の効果により、縦方向も横方向も振動振幅が減衰していくことを説明した。この放射減衰の効果によっていつかは振動振幅は 0 (横方向で言えばエミッタンスが 0) になりそうだが、実際には放射光放出による効果、“放射励起”によってある点でバランスを取り、0 にはならない。本節ではこの放射励起について簡単に説明を行

<sup>\*12</sup> 実際には磁石磁場の設計値からのズレや設置誤差などから  $\eta_y$  及び  $\eta'_y$  は有限の値を取りうる。

う。先の放射減衰と同様に、縦方向と横方向に分けて考えてみよう。

### 2.18.1 光子の放出

ここでは電子が放出する光子の放射パワーに分布があることを考えよう。計算がかなり込み入ってくるので、ここでは参考文献 [2, 3] などから得られた結果を引用する。

臨界角周波数,

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c\gamma_r^3}{\rho} \quad (2-314)$$

と、スペクトル関数,

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \quad (2-315)$$

を使うと、放射パワースペクトル  $P(\omega)$  は,

$$P(\omega) = \frac{P_0}{\omega_c} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (2-316)$$

と書ける。ここで  $K_{5/3}$  は変形ベッセル関数であり、 $P_0$  は,

$$P_0 = \int_0^{\infty} P(\omega) d\omega \quad (2-317)$$

である。また、放出光子数スペクトルは,

$$n(u) = \frac{P_0}{u_c^2} F\left(\frac{u}{u_c}\right) \quad (2-318)$$

で与えられる。ここで,

$$u_c = \hbar\omega_c \quad (2-319)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{\xi} S(\xi) \quad (2-320)$$

である。これを使うと全放出光子数は,

$$\mathcal{N} = \int_0^{\infty} n(u) du \quad (2-321)$$

で与えられ、式 (2-318) を代入し、積分を実行することで,

$$\mathcal{N} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_0}{u_c} \quad (2-322)$$

が得られる。また平均光子エネルギーは,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^{\infty} un(u) du \quad (2-323)$$

$$= \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c \quad (2-324)$$

となり、同様に平均二乗光子エネルギーは,

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^{\infty} u^2 n(u) du \quad (2-325)$$

$$= \frac{11}{27} u_c^2 \quad (2-326)$$

となる。ここで,

$$\mathcal{N} \langle u^2 \rangle = \int_0^{\infty} u^2 n(u) du \quad (2-327)$$

$$= C_u u_c P_0 \quad (2-328)$$

$$= \frac{\hbar c^2}{(m_e c^2)^3} \frac{3C_u C_\gamma}{4\pi} \frac{E^7}{\rho^3} \quad (2-329)$$

$$= \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar m_e c^4 \frac{\gamma_r^7}{\rho^3} \quad (2-330)$$

$$C_u = \frac{55}{24\sqrt{3}} \quad (2-331)$$

$$C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} \quad (2-332)$$

という量を後のために与えておく。

### 2.18.2 光子放出によるシンクロトロン振動の励起

ここでは光子エネルギーを  $u$  という定数であるとし、これが  $\mathcal{N}$  回放出されることを考える。2.15節で説明したように、元々,

$$\epsilon(t) = A_0 e^{i\Omega(t-t_0)} \quad (2-333)$$

という微小エネルギー振動があったとする。  $t_i$  でエネルギー  $u$  の光子を放出したとすると,

$$\epsilon(t) = A_0 e^{i\Omega(t-t_0)} - u e^{i\Omega(t-t_i)} \quad (2-334)$$

$$= A_1 e^{i\Omega(t-t_0)} \quad (2-335)$$

と置けば、元の振動振幅  $A_0$  と新たな振動振幅  $A_1$  の関係を調べることができ,

$$A_1^2 = A_0^2 + u^2 - 2A_0 u \cos \Omega(t_i - t_0) \quad (2-336)$$

となる。  $t_i$  に対して平均化処理を行うと,

$$\langle (\delta A)^2 \rangle = \langle A_1^2 - A_0^2 \rangle \quad (2-337)$$

$$= u^2 \quad (2-338)$$

となる。これが時間当たり  $\mathcal{N}$  回起きるので,

$$\left\langle \frac{d(A^2)}{dt} \right\rangle = \frac{d \langle A^2 \rangle}{dt} \quad (2-339)$$

$$= \mathcal{N} u^2 \quad (2-340)$$

となる。

### 2.18.3 ベータトロン振動の励起

先の放射減衰のときと同様に、水平ベータトロン振動の励起に対して2つの寄与がある。1つは放射減衰のときと同じ、放射光の放射によって電子がエネルギーを失った分、分散経路でベータトロン振動の振幅に変化が起こる効果、もう1つは放出した放射光が強く前方に放出した際に電子が反跳する効果である。結論としては前者の効果が後者に比べて一般には大きいので、このあとの議論では後者の効果を見捨てて進める。

#### 放射光放出による分散の効果

先の放射減衰の時と同様に、放射光の放出により、電子はその分エネルギーを失うが、 $x$  及び  $x'$  は滑らかに変化するはずなので、ここでも式 (2-284), (2-285) から式 (2-287), (2-288) が成立する。また、先と同様にこれを CS 不変量の式 (2-148) に代入し、 $\Delta W$  を計算すると、

$$\Delta W = -2(\alpha_T x x' + \beta_T x'^2) \frac{\epsilon}{E} + (\gamma_T \eta^2 + 2\alpha_T \eta \eta' + \beta_T \eta'^2) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2 \quad (2-341)$$

$$= \Delta W_{d2} + H(s) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2 \quad (2-342)$$

となり、ここでは  $(\epsilon/E_0)^2$  まで計算したが、放射減衰のところで計算した  $\Delta W_{d2}$  が再登場する。また  $H(s)$  は放射積分のところで式 (2-242) で定義したものである。ここで、励起分  $\Delta W_{ex}$  を分離して、

$$\Delta W_{ex} = H(s) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2 \quad (2-343)$$

とする。

シンクロトロン振動の励起と同様に、放射光子のエネルギー  $\epsilon$  に対する分布の積分とリング1周分の積分を行うと、リング1周する際の CS 不変量の励起分は、

$$\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} = \frac{1}{E_0^2} \oint ds \{ H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \} \quad (2-344)$$

$$(2-345)$$

と計算できる。また、式 (2-330) より、

$$\oint ds = cT_0 \quad (2-346)$$

$$\int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar m_e c^4 \frac{\gamma_r^7}{\rho^3} \quad (2-347)$$

であるから、

$$\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} = \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} \oint \frac{H(s)}{|\rho|^3} ds \quad (2-348)$$

$$= \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \quad (2-349)$$

となる。ここで、

$$C_q = \frac{3}{4} C_u \frac{\hbar}{m_e c} \quad (2-350)$$

$$= \frac{55}{32\sqrt{3}} \lambda_c \quad (2-351)$$

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{m_e c} \quad (2-352)$$

であり、 $C_q \sim \lambda_c$  となる。また、 $\Delta W_{ex}$  は  $\rho$  の符号に依らず常に  $> 0$  であるので  $|\rho|$  としている。

ここまでは水平のベータトロン振動の励起について考えてきたが、垂直方向に対する寄与は分散がないため、先程触れたように、光子放出による電子の反跳の効果のみとなる。ここでは簡便な説明に留めるためこの効果を0とするので、垂直方向の励起はないこととなる。

### 2.19 放射減衰と放射励起のつり合い

ここまでは放射減衰と放射励起による縦方向、横方向それぞれの量について議論してきた。本節ではこれらがある点でつり合い、リング型放射光加速器にとって重要な性能指数が導かれることを説明する。

#### 2.19.1 エネルギー幅

2.12節などでも説明したように、エネルギー幅、

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E}{E} \quad (2-353)$$

は軌道にも影響する、リング型加速器において重要な性能指数である。

2.18.2では、減衰についてはとりあえず無視していたが、実際には、

$$\epsilon(t) = \bar{\epsilon} e^{-(\alpha_\epsilon - i\Omega)t} \quad (2-354)$$

という減衰がある。これを2乗し、

$$\epsilon^2 = \bar{\epsilon}^2 e^{-2\alpha_\epsilon t} e^{i2\Omega t} \quad (2-355)$$

となり、平均化すると、

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = -2\alpha_\epsilon \langle A^2 \rangle \quad (2-356)$$

となる。これが先に求めた励起分とつり合うので、

$$\mathcal{N}u^2 = 2 \frac{\langle A^2 \rangle}{\tau_\epsilon} \quad (2-357)$$

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} \tau_\epsilon \mathcal{N}u^2 \quad (2-358)$$

となり、シンクロトロン振動におけるエネルギーの分散  $\sigma_\epsilon$  は、

$$\sigma_\epsilon^2 = \langle \epsilon^2 \rangle \quad (2-359)$$

$$= \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \quad (2-360)$$

$$= \frac{1}{4} \tau_\epsilon \mathcal{N}u^2 \quad (2-361)$$

となる。

ここまでは  $u$  を定数と見なして議論を展開してきたが、ここからは分布  $n(u)$  を考慮する。そうすると式 (2-340) は、

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = \int_0^\infty u^2 n(u) du \quad (2-362)$$

となり、平均二乗光子エネルギーの式 (2-325) を使えば、

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = \mathcal{N} \langle u^2 \rangle \quad (2-363)$$

となる。ここで右辺の光子放出に係る部分をリング 1 周で平均化し、

$$\frac{d\langle A^2 \rangle}{dt} = \langle \mathcal{N} \langle u^2 \rangle \rangle \quad (2-364)$$

$$= \frac{1}{C} \oint \mathcal{N} \langle u^2 \rangle ds \quad (2-365)$$

$$= \frac{3}{2} C_u \hbar c \gamma_r^3 \frac{\langle P_0 \rangle \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds} \quad (2-366)$$

となる。また、式 (2-252), (2-263), さらに  $\langle P_0 \rangle = U_0/T_0$  を使うと、

$$\tau_\epsilon = \frac{2T_0 E_0}{U_0 J_\epsilon} \quad (2-367)$$

$$= \frac{2E_0}{J_\epsilon \langle P_0 \rangle_s} \quad (2-368)$$

が成り立つ。式 (2-361) に式 (2-366), (2-368) を代入し、

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{3C_u \hbar m_e c^3 \gamma_r^4 I_3}{4J_\epsilon I_2} \quad (2-369)$$

となる。さらに、式 (2-369) を  $E_0^2$  で割ると、

$$\left( \frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right)^2 = C_q \gamma_r^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4} \quad (2-370)$$

となる。一般にエネルギー幅と言った場合、割合である  $\sigma_\epsilon/E$  を指す。

## 2.19.2 バンチ長

前項ではエネルギー幅  $\sigma_\epsilon/E_0$  について説明したが、エネルギー幅が有限であるということは、進行方向 ( $s$  方向) にも有限の長さを持っている、ということになる。これをバンチ長と呼ぶ<sup>\*13</sup>。ここでは平衡状態を考えるため  $dU/d\epsilon = 0$  とし、式 (2-227) は、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e\dot{V}\tau}{T_0} \quad (2-371)$$

となる。ここでシンクロトロン振動で扱った到着時間  $\tau$  について、

$$\theta = \frac{\Omega E_0}{\alpha_m} \tau \quad (2-372)$$

という変換を考える。これとシンクロトロン周波数の式 (2-232) を使うと、式 (2-371) から、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \Omega \theta \quad (2-373)$$

という関係が導ける。また、式 (2-229), (2-371) から、

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Omega \epsilon \quad (2-374)$$

という関係が導ける。これらから、 $\epsilon$  と  $\theta$  はそれぞれ、

$$\theta = A \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (2-375)$$

$$\epsilon = A \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (2-376)$$

という単振動の形に落ち着くことがわかり、結果として、

$$\sigma_\theta = \sigma_\epsilon \quad (2-377)$$

が成り立つことから、バンチ長  $\sigma_\tau$  は、

$$\sigma_\tau = \frac{\alpha_m}{\Omega} \frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \quad (2-378)$$

というように、既に式 (2-370) で得たエネルギー幅  $\sigma_\epsilon/E_0$  を使って計算することができる。これを見るとバンチ長は momentum compaction factor  $\alpha_m$  に比例していることがわかる。実際、いくつかのリング型放射光加速器では  $\alpha_m$  を小さくすることにより、バンチ長を短縮化し、時分割観察をより効果的に行う、といった取り組みが行われている [4]。

<sup>\*13</sup> バンチとは荷電粒子、ここでは電子の集合であるが、単粒子であっても、ある領域内を振動し占有しているのでバンチ長と呼ぶ。ここでの議論では集団効果は含まれていない。

### 2.19.3 平衡エミッタンス

これまでに求めた水平ベータatron振動の減衰量と励起量を使って、つり合っている点で成立しているCS 不変量  $W_{eq}$  について求めよう．式 (2-306) から、 $\Delta W_d/T_0 = -2W_{eq}/\tau_x$  という関係を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{ex}}{T_0} + \frac{\Delta W_d}{T_0} &= \frac{4}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 - \frac{2W_{eq}}{\tau_x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-379)$$

となる．これを水平の平衡エミッタンス  $\varepsilon_x = \langle W \rangle / 2$  について解くと、

$$\varepsilon_x = \frac{\langle W \rangle}{2} \quad (2-380)$$

$$= \frac{W_{eq}}{2} \quad (2-381)$$

$$= \tau_x \cdot \frac{1}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \quad (2-382)$$

$$= \frac{3T_0}{r_e \gamma_r^3 (I_2 - I_4)} \cdot \frac{1}{3} C_q \frac{r_e \gamma_r^5}{T_0} I_5 \quad (2-383)$$

$$= C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} \quad (2-384)$$

となる．

ここまでは水平方向の平衡エミッタンスについて求めてきた．次に垂直方向だが、前節の放射励起のところで述べたように、垂直方向は一般に分散関数が0であることから放射励起は大きくない．仮に0と置けば、放射減衰のみが効き、垂直方向の平衡エミッタンス  $\varepsilon_y$  は、

$$\varepsilon_y = 0 \quad (2-385)$$

となる．実際には磁場誤差や磁石のアライメントエラーにより有限の分散が垂直方向にも発生することで  $\varepsilon_y$  も有限の値を取るが、本稿では以降も  $\varepsilon_y = 0$  として話を進めることとする．

## 3 Lattice・Optics の設計

前章では磁石が作る磁場や RF 空洞の電場によってどう電子が運動するかを見てきた．その結果、水平方向の平衡エミッタンス  $\varepsilon_x$  が、

$$\varepsilon_x = C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} \quad (3-1)$$

$$= C_q \gamma_r^2 \frac{I_5}{I_2 J_x} \quad (3-2)$$

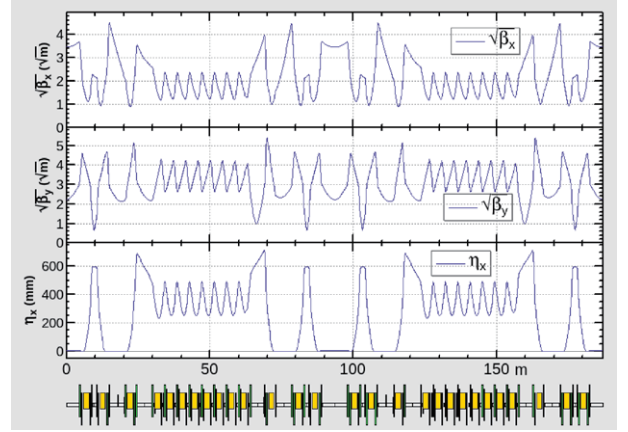


Figure 9 PF-ring の optics.

と表せることについて説明した．このうち、 $C_q$  は定数であり、我々には操作することができない． $\gamma_r$  はつまり  $E_0/m_e c^2$  でローレンツ因子であるが、得られる放射光のエネルギー帯もしくは波長帯はこれによっておおよそ決まるので、放射光源としてはまず最初に決まる値である．残りの放射積分  $I_2, I_4, I_5$  はこれまで見てきたように、加速器を構成する磁石の配列・強さによって決まる．従って我々が低エミッタンスな放射光源を設計する場合は、 $I_2, I_4, I_5$  が調整ノブとなりうる．この磁石の配列（どう並べるか）を **Lattice** (ラティス) と呼ぶ<sup>\*14</sup>．本章ではこの lattice の種別について例を挙げながら説明する．

### 3.1 FODO

まずは、最も基本的な lattice である FODO lattice について説明する．KEK にある放射光源、PF-ring と PF-AR はともに FODO を採用している．Fig.9に KEK PF-ring の optics を示す．Optics の計算には KEK で開発されている SAD[5] を使用した．分散  $\eta_x$  が0の領域を **Achromat** (アクトマツト) と呼び、挿入光源や RF 空洞が設置される．前章で見たようにビームサイズは式 (2-159) で表され、分散が0であればビームサイズは小さくなり、輝度は上がる．

Fig.9を見ると同じパターンが2つ続いて全体を構成

<sup>\*14</sup> 一方で Optics (オプティクス) はこの lattice から得られる  $\beta$  関数や分散関数のことを一般に呼ぶ．Lattice は磁石や真空ダクトなど物理的実体を伴い、改造にはコストがかかるが、磁石が例えば電磁石であり、それに対応する電磁石電源の容量が対応していれば、磁場を変更して optics を変更することが可能である．

Table 1 PF-ring の主要パラメータ.

|                                 |                                      |                        |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| エネルギー                           | $E_0$ [GeV]                          | 2.5                    |
| 周長                              | $C$ [m]                              | 187.035                |
| エネルギー損失                         | $U_0$ [MV/turn]                      | 0.399                  |
| Momentum Compaction Factor      | $\alpha_m$                           | $6.563 \times 10^{-3}$ |
| 減衰時間                            | $\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms] | 7.999, 7.815, 3.863    |
| 減衰分配係数                          | $J_x, J_y, J_\epsilon$               | 0.977, 1.000, 2.023    |
| Betatron Tune ( $x, y$ )        | $\nu_x, \nu_y$                       | 9.598, 5.279           |
| Natural Chromaticity ( $x, y$ ) | $\xi_x, \xi_y$                       | -13, -17               |
| 水平エミッタンス                        | $\varepsilon_x$ [nmrad]              | 35                     |
| エネルギー幅                          | $\sigma_\epsilon/E$                  | $7.288 \times 10^{-4}$ |
| 放射積分                            | $I_1$                                | 1.227                  |
|                                 | $I_2$                                | $7.258 \times 10^{-1}$ |
|                                 | $I_3$                                | $8.383 \times 10^{-2}$ |
|                                 | $I_4$                                | $1.638 \times 10^{-2}$ |
|                                 | $I_5$                                | $2.811 \times 10^{-3}$ |

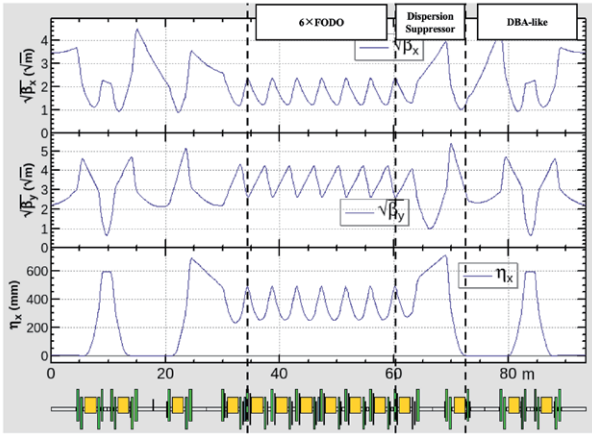


Figure 10 PF-ring の superperiod.

していることがわかる. この繰り返しのことを **Superperiod (スーパーピリオド)** と呼ぶ<sup>\*15</sup>.

この superperiod について拡大して詳しく見ていこう (Fig.10). Superperiod の中央を大きく占めているのは FODO と呼ばれるパターンの 6 つの繰り返しである. この繰り返しの単位を **Cell (セル)** という. この FODO に接続しているのが **Dispersion Suppressor** と呼ばれる部分で, FODO の端で有限の値で終わって

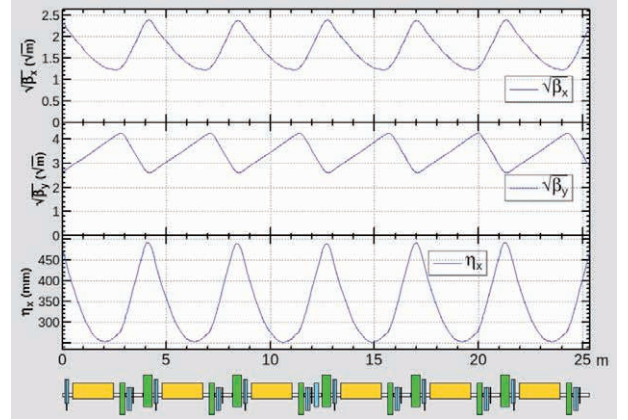


Figure 11 PF-ring の FODO cell が 6 つ並んでいる様子. 黄色が偏向磁石, 緑が 4 極磁石, 青が 6 極磁石で, 上に凸となっている 4 極が Focus, 下に凸となっているのが Defocus (6 極も同様).

いる分散を引き継ぎ, 0 にする役目を担っている. その直後に次節で説明する DBA-like な cell が 1 つ続いている.

FODO は 4 極磁石の focus “F” と defocus “D” がドリフトスペース “O” を挟んで順に並ぶ構成から FODO と呼ばれる. ここでは, あるいは一般的に偏向磁石 “B” も構成要素となり, PF-ring では FOBODO と並んでいる (Fig.11).

<sup>\*15</sup> ラフに見れば 4 回対称だが,  $\sqrt{\beta_y}$  を見てわかるようにやや対称性が崩れている.

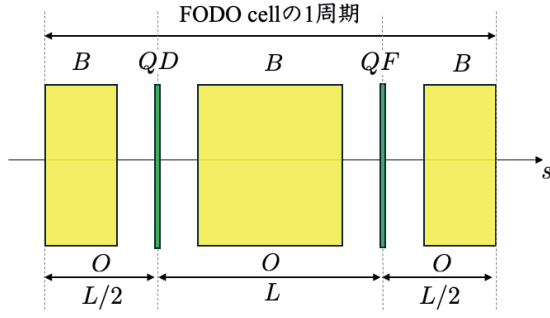


Figure 12 FODO の構成例.

Table 1に、PF-ring の主要なパラメータについてまとめた。

### 3.1.1 最小エミッタンス

ここでいくつか仮定を置くことで、FODO セルが取りうる最小エミッタンスの値を導きたいと思う。Fig.12のような構成で FODO cell が成立している場合、偏向磁石を除く各要素の転送行列の積が、

$$\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_T \sin \mu & \beta_T \sin \mu \\ -\gamma_T \sin \mu & \cos \mu - \alpha_T \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

と等しいことから、 $\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$  を求めることができる。また、偏向磁石（蹴り角  $\theta$ 、磁石長さ  $L_B$ ）の分散に対する効果を考慮し、 $\eta, \eta'$  が cell の端と端で同じ値を取ることから、 $\eta, \eta'$  を導出することができる。これにより放射積分  $I_5$  が計算でき、最終的なエミッタンスは、

$$\varepsilon = C_q \gamma_r^3 \theta^3 \frac{L}{L_B} \frac{1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\mu}{2}}{\sin^3 \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}} \quad (3-4)$$

と求められる。ここで、QF と QD の収束力の絶対値は同じと仮定した。これをチューン  $\mu$  で微分すると、

$$\mu \sim 145 \text{ deg.} \quad (3-5)$$

で極小点をとることがわかり、その値は、

$$\varepsilon_{min} \sim C_q \gamma_r^2 \theta^3 \frac{L}{L_B} \times 0.74 \quad (3-6)$$

となる。 $\varepsilon_{min}$  は  $\theta^3$  に比例しているため、偏向磁石による曲げ角はなるべく小さい方がよいことがわかる。

先の議論では、FODO cell のみを考慮していたが、一般に FODO cell を採用する ring では dispersion suppressor 部が必要であることについて言及した。Fig.10を見ると、FODO cell 以外の dispersion suppressor 部 + DBA-like cell の分散もある程度大きいこ

とがわかる。そこで、放射積分  $I_5$  について、各パートで計算すると、それぞれおよそ  $6.9 \times 10^{-4}$ 、 $3.7 \times 10^{-4}$  と計算されるが、リング 1 周で見ると、前者は 2 箇所、後者は 4 箇所あるため、平衡エミッタンス  $\varepsilon_x$  への寄与は同程度であることがわかる。

### 3.1.2 Chromaticity 補正のための 6 極磁場

先と同様の仮定をすることで、chromaticity の補正、ここでは chromaticity を 0 にするのに必要な 6 極の磁場強度  $K_2 = k_2 \ell$  が推定でき、結果だけ置くと、

$$K_2 = \pm \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}}{2L^2 \theta (1/\sin \mu \pm 1/2)} \quad (3-7)$$

となる、ただし  $\pm$  は  $+$  が SF、 $-$  が SD である。先の最小エミッタンスの議論では偏向磁石の曲げ角  $\theta$  は小さければ小さいほどいい、ということであったが、6 極磁石による chromaticity の補正を考える場合には  $\theta$  に反比例した 6 極磁場が必要になるということを示唆している。これは 6 極磁石製作の難易度に影響を与えたり、製作が可能な場合であっても 6 極磁石が持つ非線形磁場によって、特に入射ビームなど、大きな振幅を持った電子の tune-shift を大きくし、共鳴によるビームロスを引き起こす可能性がある。このような安定的に周回できる最大の振幅をダイナミック・アパーチャー (DA: Dynamic Aperture) と呼ぶ。これに対して、真空ダクトの内径など、物理的に許される最大の振幅をフィジカル・アパーチャー (PA: Physical Aperture) と呼ぶ。一般に DA は PA よりも大きくなるように設計されるが、後に説明するような、より先端的な lattice では DA を十分に確保するのが課題となっており、様々な工夫が施されている。

### 3.2 Double Bend Achromat (DBA)

DBA lattice は Chasman-Green Lattice とも言い、その名の通り、1 つの cell に偏向磁石が 2 つあり、cell の端が常に Achromat になる。つまり、FODO のときのような dispersion suppressor がなくなる。

Fig.13に、DBA の代表例として、日本の SPring-8 の optics (DBA cell 2 つ分) を示した [6]。分散は端にある 2 つの偏向磁石で立ち上がり、中央に設置された QF で分散が最大となっている。Table 2に SPring-8 の主要パラメータについてまとめた。ただし、ある optics の設定で計算した結果なので参考値としてほしい。

Table 2 SPring-8, DBA optics の主要パラメータ (参考値).

|                                 |                                      |                        |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| エネルギー                           | $E_0$ [GeV]                          | 8                      |
| 周長                              | $C$ [m]                              | 1435.948               |
| エネルギー損失                         | $U_0$ [MV/turn]                      | 9.227                  |
| Momentum Compaction Factor      | $\alpha_m$                           | $1.460 \times 10^{-4}$ |
| 減衰時間                            | $\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms] | 8.317, 8.309, 4.152    |
| 減衰分配係数                          | $J_x, J_y, J_\epsilon$               | 0.999, 1.000, 2.001    |
| Betatron Tune ( $x, y$ )        | $\nu_x, \nu_y$                       | 47.120, 15.220         |
| Natural Chromaticity ( $x, y$ ) | $\xi_x, \xi_y$                       | -107, -39              |
| 水平エミッタンス                        | $\varepsilon_x$ [nmrad]              | 7.0                    |
| エネルギー幅                          | $\sigma_\epsilon/E$                  | $1.094 \times 10^{-4}$ |
| 放射積分                            | $I_1$                                | $2.096 \times 10^{-1}$ |
|                                 | $I_2$                                | $1.600 \times 10^{-1}$ |
|                                 | $I_3$                                | $4.074 \times 10^{-3}$ |
|                                 | $I_4$                                | $1.359 \times 10^{-4}$ |
|                                 | $I_5$                                | $1.185 \times 10^{-5}$ |

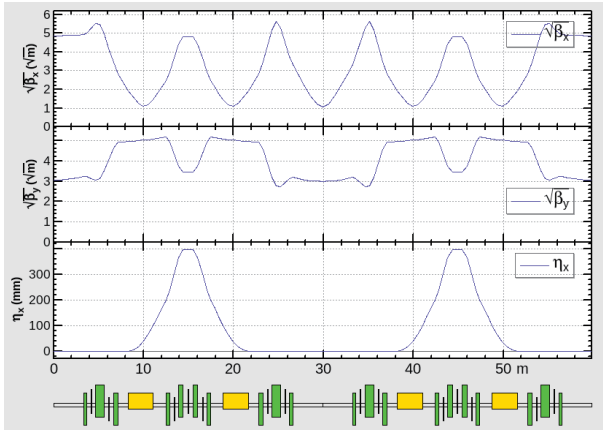


Figure 13 SPring-8 で 2002 年まで適用されていた optics (2×DBA-cell).

SPring-8 における DBA optics での運転は 2002 年までで、2003 年からは分散を漏らしてさらなる低エミッタンス化を図る DB optics が適用されている [6].

### 3.2.1 最小エミッタンス

DBA lattice では、偏向磁石入口で  $\eta = \eta' = 0$  という条件があるため、偏向磁石入口での Twiss parameter,  $\beta_{T0}, \alpha_{T0}, \gamma_{T0}$  と偏向磁石における転送行列を利用することによって、FODO のときよりも容易に  $\varepsilon_x$  が計算

でき、

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma_r^2}{J_x} \theta^3 \left( \frac{\beta_{T0}}{3L_B} - \frac{\alpha_{T0}}{4} + \frac{\gamma_{T0} L_B}{20} \right) \quad (3-8)$$

と求められる。ここで  $\alpha_{T0}, \beta_{T0}$  で微分し 0 と置くと、 $\varepsilon_x$  を最小にする Twiss parameter が得られる。これを代入することで、

$$\varepsilon_{x,min} = \frac{C_q \gamma_r^2}{4\sqrt{15}} \frac{\theta^3}{J_x} \quad (3-9)$$

が得られる。

### 3.3 MBA

これまでの FODO, DBA における議論からも、偏向磁石の蹴り角を小さくする、言い換えれば偏向磁石の数を増やすことによって低エミッタンス化が可能となることを見てきた。この流れをそのまま汲んだのが、Multi-bend Achromat Lattice (MBA) である。Fig.14に、スウェーデンにある MAX IV の MBA lattice 1 セル分の optics を、Table 3に MAX IV の主要パラメータを示す(ただし現行の lattice ではなく、2014 年に論文で紹介されたものになる [7])。MAX IV では 1 つの cell に 7 つの偏向磁石が使用されているが、Fig.14を見てわかるように、1 つの偏向磁石がいくつかの部分に分かれている。これは進行方向に磁場勾配を持つ **Longitudinal**

Table 3 MAX IV の主要パラメータ (2014 年報告 [7]).

|                                 |                                      |                         |
|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| エネルギー                           | $E_0$ [GeV]                          | 3                       |
| 周長                              | $C$ [m]                              | 528                     |
| エネルギー損失                         | $U_0$ [MV/turn]                      | 0.364                   |
| Momentum Compaction Factor      | $\alpha_m$                           | $3.060 \times 10^{-4}$  |
| 減衰時間                            | $\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms] | 15.724, 29.045, 25.195  |
| 減衰分配係数                          | $J_x, J_y, J_\epsilon$               | 1.8472, 1.000, 1.1528   |
| Betatron Tune ( $x, y$ )        | $\nu_x, \nu_y$                       | 42.200, 16.280          |
| Natural Chromaticity ( $x, y$ ) | $\xi_x, \xi_y$                       | -50, -51                |
| 水平エミッタンス                        | $\varepsilon_x$ [nmrad]              | 0.328                   |
| エネルギー幅                          | $\sigma_\epsilon/E$                  | $7.686 \times 10^{-4}$  |
| 放射積分                            | $I_1$                                | $1.616 \times 10^{-1}$  |
|                                 | $I_2$                                | $3.190 \times 10^{-1}$  |
|                                 | $I_3$                                | $1.645 \times 10^{-2}$  |
|                                 | $I_4$                                | $-2.703 \times 10^{-1}$ |
|                                 | $I_5$                                | $1.464 \times 10^{-5}$  |

**Gradient Bend** と呼ばれる設計で、つまり各部分固有の曲率半径  $\rho$  を持つ。これによって、 $\varepsilon_x$  に大きく放射積分  $I_5$  を抑制することが可能となる。また同時に偏向磁石には 4 極成分も付与し (**機能結合型偏向磁石 (Combined Bend)**),  $I_4$  の調整も可能となっている。Table 3 を見てわかるように、これまでの FODO や DBA とは異なり、 $I_4$  が負の値を持ち、従って減衰分配係数 (Damping Partion Number)  $J_x$  がおよそ 2 まで近付いている。これは放射積分  $I_4$  の式 (2-239),

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho k_1 \right) \eta_x ds \quad (3-10)$$

の “ $\rho k_1$ ” という、2 極成分と 4 極成分のカップリングが有限になった効果である。ここで  $k_1 < 0$ , つまり発散であれば、 $I_4$  は負となり、 $\varepsilon_x$  の低減に貢献する。

一方、分散を効果的に抑制できたことで、chromaticity 補正のための 6 極磁石への負担が大きくなる。結果として非線形磁場の効果が大きくなるため、DA の確保にさらなる注意を払う必要がある。

### 3.4 HMBA

DA の確保が比較的容易におこなえて、かつ低エミッタンス optics を実現できるのが Hybrid-MBA (HMBA) である。一例として、KEK の PF-ring 後継機として検討されていた KEK-LS 加速器の optics を Fig.15 に、主

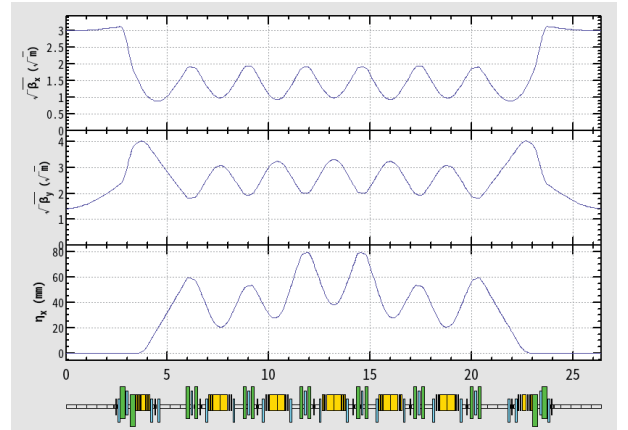


Figure 14 MAX IV の MBA cell optics[7].

要パラメータを Table 4 に示した (最終的 Conceptual Design Report (CDR) で採用されたものは分散を漏らし、水平エミッタンスのさらなる低減を実現している [8]).

HMBA は ESRF-EBS が世界に先駆けて実現した lattice で [9], MBA と比較して cell 両端の分散がある程度大きくなるように調整がなされている。これによって MBA では強くせざるを得なかった 6 極磁場を、分散が大きいところに 6 極磁石が設置することで、その磁場強度を緩和することが可能となる。また、6 極磁石が設置される分散ピーク間の位相 (tune) を 180 度に近

Table 4 KEK-LS の主要パラメータ.

|                                 |                                      |                         |
|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| エネルギー                           | $E_0$ [GeV]                          | 3                       |
| 周長                              | $C$ [m]                              | 565                     |
| エネルギー損失                         | $U_0$ [MV/turn]                      | 0.294                   |
| Momentum Compaction Factor      | $\alpha_m$                           | $1.995 \times 10^{-4}$  |
| 減衰時間                            | $\tau_x, \tau_y, \tau_\epsilon$ [ms] | 20.448, 38.444, 34.331  |
| 減衰分配係数                          | $J_x, J_y, J_\epsilon$               | 1.880, 1.000, 1.120     |
| Betatron Tune ( $x, y$ )        | $\nu_x, \nu_y$                       | 47.150, 17.220          |
| Natural Chromaticity ( $x, y$ ) | $\xi_x, \xi_y$                       | -62, -61                |
| 水平エミッタンス                        | $\varepsilon_x$ [nmrad]              | 0.153                   |
| エネルギー幅                          | $\sigma_\epsilon/E$                  | $7.323 \times 10^{-4}$  |
| 放射積分                            | $I_1$                                | $1.127 \times 10^{-1}$  |
|                                 | $I_2$                                | $2.579 \times 10^{-1}$  |
|                                 | $I_3$                                | $1.173 \times 10^{-2}$  |
|                                 | $I_4$                                | $-2.268 \times 10^{-1}$ |
|                                 | $I_5$                                | $5.632 \times 10^{-6}$  |

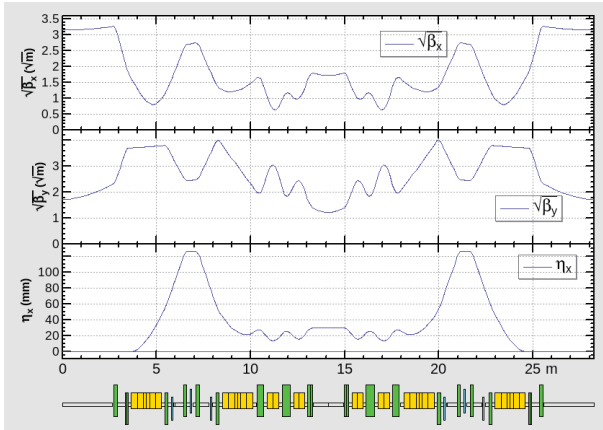


Figure 15 KEK-LS 計画検討時に提案された optics の一例.

づけ (その間の転送行列が  $-I$  となる), 6 極磁石の非線形効果を打ち消すような設計を導入している. これによって, MBA では難しかった DA の緩和をより楽に進めることが可能となっている.

MAX IV や ESRF-EBS 同様, KEK-LS でも longitudinal gradient bend や combined bend を採用し, より柔軟に低エミッタンス化できるような工夫がなされている.

## あとがき

本稿の執筆にあたり, 過去の偉大な OHO が大いに参考になった. [10] はこれまでも他の OHO で言及, 参考とされる名著であり, 本稿でも大いに参考にさせていただいた. [11] は [10] の単純な補足に留まらず, 複雑なシステムである加速器をハードウェアの面からも丁寧に説明された名著である.

単粒子力学については過去 OHO では何度も取り上げられている一方, lattice 設計, 特にリング型光源加速器を取り上げたものは少なく, 今回は [12] を大いに参考にした.

名著として有名な [3] であるが, これを解説された高雄勝先生の特別講義が KEK にて 2024 年度から開講されている. 資料は公開されていないので引用できず残念であるが, これもまた非常に参考となった.

ここに改めて偉大な先人たちに感謝を捧げたいと思います.

## 参考文献

- [1] 大沢哲, 三橋利行, 「放射光リングへの陽電子ビームの生成と入射及び蓄積の現状」, 放射光, Vol.2, No.4, pp.23 - 31, 放射光学会, (1989)
- [2] H. Wiedemann, “Synchrotron Radiation”, Springer Berlin, Heidelberg, (2003)

- [3] M. Sands, “The Physics of Electron Storage Rings: An Introduction”, Conf. Proc. C **6906161** (1969), 257-411 SLAC-R-121. <https://inspirehep.net/files/0f9249be89a808732c1451100b84d55a>
- [4] I. P. S. MARTIN et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams 14, 040705 (2011).
- [5] <https://acc-physics.kek.jp/SAD/>
- [6] 下崎義人, 佐々木茂樹, 早乙女光一, 木村洋昭, 鈴木基寛: SPring-8 通信, vol. 19, No.3, 244 (2014)
- [7] Tavares, P. F., Leemann, S. C., Sjöström, M. and Andersson, Å., The MAX IV storage ring project, J. Synchrotron Rad. 21, 862 - 877 (2014)
- [8] KEK 放射光 Conceptual Design Report (CDR) ver.1.1, [https://www2.kek.jp/imss/notice/assets/2017/05/22/KEKLS\\_CDR\\_170522.pdf](https://www2.kek.jp/imss/notice/assets/2017/05/22/KEKLS_CDR_170522.pdf)
- [9] ESRF Upgrade Programme Phase II (2015-2022) - Technical Design Study (“The Orange Book”), <https://www.esrf.fr/files/live/sites/www/files/about/upgrade/documentation/ESRF-orange-book.pdf>
- [10] 神谷幸秀, OHO1984
- [11] 原田健太郎, OHO2008
- [12] 大見和史, OHO1991