

非線形オプティクスの最適化

1. はじめに

非線形オプティクス最適化に関するテキストを書くことになった。ラティス設計・線形オプティクス設計・非線形オプティクス設計とあって紛らわしいので、最初にこのテキストでの定義について記しておく。

ラティス設計とは：ここでは指向性のある荷電粒子の集団をビームと定義する。荷電粒子なのでローレンツ力

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

に従う。 e と $\mathbf{v}$ は荷電粒子の電荷量と速度、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は荷電粒子にかかる電場と磁束密度である。

一般に、電場はビームの加速に使われ、磁束密度はビームの軌道制御に使われる。以下では磁束密度による軌道制御について考える。

加速器では一般に、ビームの軌道を曲げるために偏向磁石が、ビームの軌道を集束させるために四極磁石が、そしてビームの色収差（＝クロマティシティ）を補正するために六極磁石が使われる。「ビームを高品質に保つために、それぞれの磁石について、どれくらいの磁場強度で、どのような配置に並べるかを検討すること」をラティス設計と呼び、「磁石の並び」のことをラティスと呼ぶ。

線形オプティクス設計とは：ラティス＝磁石配置は変えないで、磁石の磁束密度のみを変える場合をオプティクス設計と呼ぶ。オプティクス設計の中でも、偏向磁石や四極磁石などは線形の磁束密度を生じる。これらの線形磁束密度の強度を調整して、ベータ関数・分散関数・チューンなどの最適化を行うことを線形オプティクス設計と呼ぶ。主に運転の基準点を決める作業と言える。

非線形オプティクス設計とは：例えば六極磁石は、非線形磁束密度を生じる。その非線形磁束密度を利用してビームの色収差（以下ではクロマティシティと呼ぶ）を補正する。一方で、その非線形磁束密度は、位相空間を「ビームの存在できる領域」と「ビームの存在できない領域」とに分け

る。ビームの存在できる安定領域が狭まると加速器の運転が困難になるため、クロマティシティを補正しながら同時にビームの存在できる安定領域を広げることが必要となる。このように非線形磁束密度を調整してビーム安定領域を広げることが非線形オプティクス設計と呼ぶ。

2. 振り子の運動

本題に入る前に振り子の運動を復習しておく。非線形磁石が誘起する諸現象を直感的に理解する一助になると思う。

振り子の運動方程式を

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin x \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad (3)$$

で与える (Fig.1 参照)。以下では $-\pi \leq x < \pi$ の領域のみを考える。式(2)の右辺を $x = 0$ の周りでテーラー展開すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{k}{6} x^3 + \dots \quad (4)$$

の形に書けるので、振り子の運動は調和振動に非線形力が強制力として加わった式と見なせる。

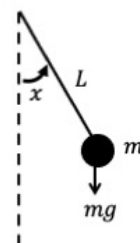


Fig.1 振り子

今、

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (5)$$

というパラメータを導入すると、式(2)は

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \sin x \quad (6)$$

と書ける。式(5)と(6)を使って振り子の運動の性質を復習する。

まず不動点を考える。

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad (8)$$

を同時に満たす (x, v) を不動点と呼ぶ。式(5)と(6)を使うと $-\pi \leq x < \pi$ の領域では

$$(x, v) = (0, 0) \quad (9)$$

$$(x, v) = (-\pi, 0) \quad (10)$$

が不動点となる。不動点の性質を考える前に、位相空間で振り子が描く軌道を考える。式(6)の両辺に v を掛けて

$$v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) \quad (11)$$

の関係を利用すると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = -\omega_0^2 \sin x \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

となり積分すると

$$\frac{1}{2} v^2 - \omega_0^2 \cos x = C \quad (13)$$

を得る。 C は積分定数である。今、 $t=0$ の時の (x, v) の初期値を $(0, v_0)$ で与えると (ただし $v_0 > 0$ とする)

$$C = \frac{1}{2} v_0^2 - \omega_0^2 \quad (14)$$

となるので、

$$\frac{1}{2} v^2 - \omega_0^2 \cos x = \frac{1}{2} v_0^2 - \omega_0^2 \quad (15)$$

を得る。式(15)は位相空間 (x, v) における振り子の軌道を表している。 $\omega_0=1$ にして (x, v) の初期値を変えながら式(15)を計算したものを Fig.2 に与える。

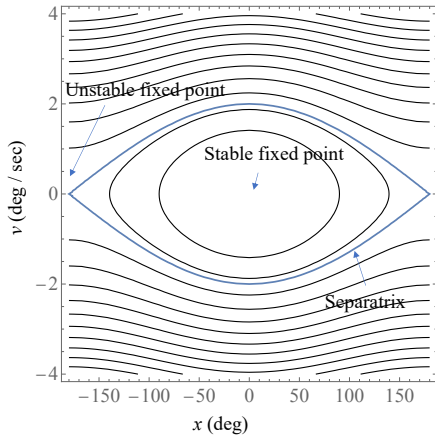


Fig.2 位相空間で見た振り子の軌道

不動点には安定不動点と不安定不動点がある。不動点から (x, v) を微小量変えた時に、微小量を保ったまま運動するのが安定不動点であり、 (x, v) が不動点から急激に離れるのが不安定不動点である。Fig.2 から式(9)が安定不動点、式(10)が不安定不動点であることがわかる。

不安定不動点を通る軌道をセパトリクスと呼ぶ。運動の性質から、セパトリクスの内側で

は振り子は振動運動、外側では回転運動することがわかる (Fig.3 参照)。式(15)に不安定不動点の式(10)を代入すると

$$\frac{1}{2} v_0^2 = 2\omega_0^2 \quad (16)$$

となるので、まずセパトリクスにおいて $t=0$ の時の (x, v) の初期値 $(0, v_0)$ について $v_0 = 2\omega_0$ となること、および

$$\frac{1}{2} v^2 - \omega_0^2 \cos x = \omega_0^2 \quad (17)$$

がセパトリクスの軌道の式になることがわかる。式(6)から $x=0$ の位置で v が極大値・極小値を取ることが自明なので、 $v_0 = 2\omega_0$ からセパトリクスの v 方向の高さは

$$v_{\text{height}} = 2v_0 = 4\omega_0 \quad (18)$$

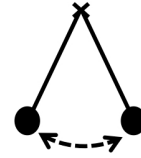
となる。

なお、安定不動点の式(9)を式(15)に代入すると

$$v_0 = 0 \quad (19)$$

となる (自明ではあるが、後で使うので書いた)。

Motion inside separatrix



Motion outside separatrix

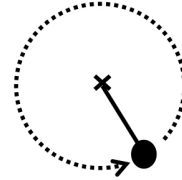


Fig.3 振り子に関するセパトリクスの内側と外側での運動の違い

振り子の周期 T を考える。導出は省くが、振り子の周期は第1種完全楕円積分

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (20)$$

を用いて記述することができる。セパトリクスの内側では

$$T = \frac{4}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (21)$$

であり、セパトリクスの外では

$$T = \frac{2}{k\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right) \quad (22)$$

となる。ただし

$$k = \frac{v_0}{2\omega_0} \quad (23)$$

である。不安定不動点を通る軌道（＝セパトリクス）では式(23)に式(16)を代入することで $k=1$ であることがわかる。同様に式(19)を使うと、安定不動点では $k=0$ である。

式(4)の右边をゼロにすると調和振動の運動方程式になる。調和振動の周波数を

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (24)$$

とした時に、振り子の周波数 $f=1/T$ を f_0 で規格化したものを Fig.4 に与える。

- ・振り子の振幅が小さい場合は調和振動と概ね同じ周波数で振動すること
- ・セパトリクスに近づくにつれて周波数が小さくなり、セパトリクスの位置で周波数がゼロになること、
- ・セパトリクスの外に出ると急激に周波数が増大すること

がわかる（シンクロトロン振動と同様である）。すなわち振り子は振幅依存の周波数を持つと言える。

運動方程式は同じでもセパトリクスの内側か外側かで運動が異なることを示した。粒子の初期値依存性とも言える。非線形振動によって力学的口径（ダイナミックアパーチャー）が生じたとも言えると思う。

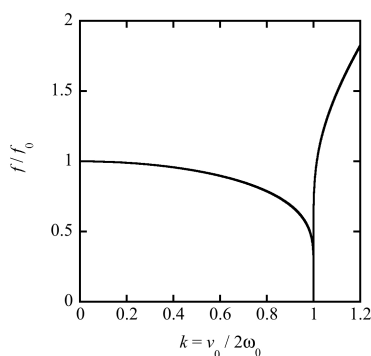


Fig.4 振り子の周波数の k 依存性

3. ビーム安定領域とは何か

「はじめに」のところで「非線形磁束密度を調整してビーム安定領域を広げることを非線形オペティクス設計と呼ぶ」と書いた。ここではビーム

安定領域とは何かについて書く。なお、ここでは「時間が経過しても、設計粒子の周りでビームが存在していること」をビームが安定であることと条件とし、「位相空間においてビームが安定に存在できる領域」をビーム安定領域と定義する。加速器においては「シンクロトロン振動が作るビーム安定領域」と「ベータトロン振動が作る安定領域」がある。

シンクロトロン振動の場合、セパトリクスの内側がビーム安定領域と言える（Fig.5 参照）。Bucket height をビーム安定領域の大きさで見なすことができ、RF 電圧の振幅を V とすると bucket height は $\sqrt{V}$ に比例することが知られている[1]。

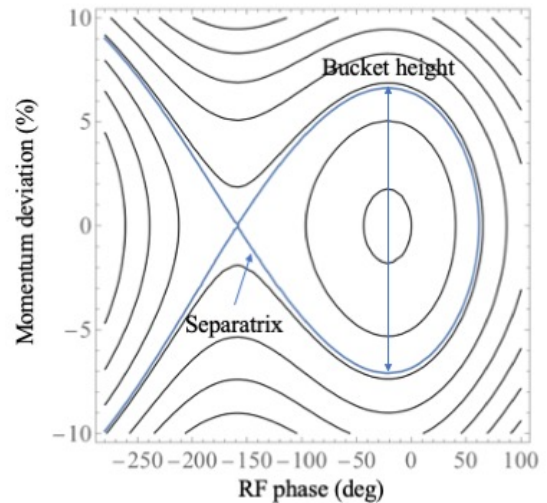


Fig.5 位相空間におけるシンクロトロン振動の軌道例

ベータトロン振動の場合、ダイナミックアパーチャーの内側がビーム安定領域と言える。Off-axis injection を行う場合、ダイナミックアパーチャーの内側に入射しないと、入射ビームはいずれ失われる。ダイナミックアパーチャーに関してもエネルギー依存があり（Fig.6）、ビームの運動量偏差（ $\delta = \Delta p / p_0$ とこのテキストでは定義する。ただし p_0 はビームに関する運動量の設計値で、 Δp はそこからのずれである）が大きくなると非線形クロマティシティによるチューンシフトの増大などの影響で、ダイナミックアパーチャーは小さくなる傾向にある[2]。

4. ビーム安定領域拡張の必要性について

なぜビーム安定領域を広げる必要があるかについて書く。まず上述したようにダイナミックアパーチャーが小さいと入射が困難になることが理由の1つとして挙げられる。円形加速器内にビームを蓄積することができればモニターを使って入射効率改善の調整をできるが、ビームを蓄積できないとモニターが使えないので致命的である。

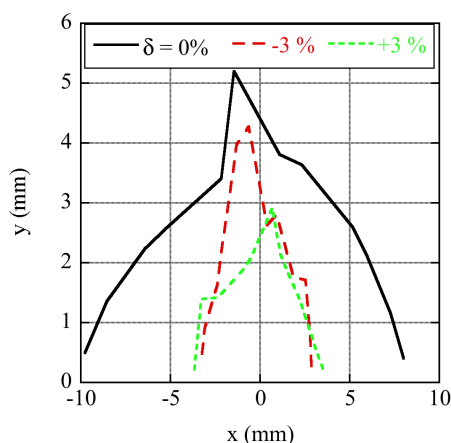


Fig.6 Off-momentum dynamic aperture の計算例

また、入射効率が悪いということは、加速器内のどこかでビームロスを生じていることを意味する。ビーム安定領域の外に出たビームは真空ダクトなどの加速器機器に当たって失われるが、この時に熱や放射線を生じ、機器が故障する原因となる[3]。ビームロスの抑制は加速器の種類によらず（＝蓄積リング型の放射光施設とか関係なく、ハドロン加速器でも電子加速器でも）、普遍的に重要な課題となる。

ビーム安定領域を広げなければならないもう1つの理由として、蓄積リング型放射光施設に見られるビーム寿命の短寿命化が挙げられる。放射光施設では放射光の輝度を上げるために低エミッタンスの電子ビームを蓄積する。この時、バンチ内でのクーロン散乱により transverse 方向の運動量が longitudinal 方向に回り込んだ時、相対論の効果で γ 倍に longitudinal 方向の運動量が大きくなる。これがモーメントムアクセプタンスを

超えた時にビームは失われる。この効果により、蓄積リング型の放射光施設では蓄積電流を

$$I(t) \propto e^{-t/\tau}$$

として記述できる。ここで τ はタウシェックビーム寿命と呼ばれている[4]。

タウシェックビーム寿命は、上述したようにモーメントムアクセプタンスの大きさで決定される[4]。モーメントムアクセプタンスにはシンクロトロン振動で決まるものとベータトロン振動で決まるものがあり、これらのうちの狭い方が選択される。「シンクロトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス」は上述の bucket height のことで (Fig.5 参照)、「ベータトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス」については、Fig.6 のように「ダイナミックアパーチャーの存在する運動量偏差の最大値」がこれに相当する (Fig.6 参照)。RF 電圧振幅を変えながらモーメントムアクセプタンスを計算した例を Fig.7 に与える。

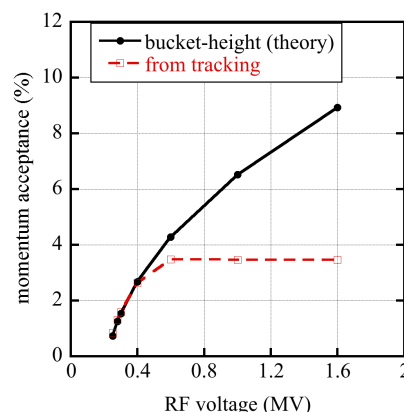


Fig.7 モーメントムアクセプタンスの RF 電圧振幅依存性（トラッキング結果）

Fig.7 の点線が実際のモーメントムアクセプタンスである。RF 電圧が小さい時は「シンクロトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス」の方が小さいのでモーメントムアクセプタンスとして選択されるが、RF 電圧が大きくなると「ベータトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンス」の方が小さくなるので、ベータトロン振動で決まるモーメントムアクセプタンスが選択される、ということを Fig.7 は意味している。

Fig.7 を使って計算したタウシェックビーム寿命を Fig.8 に与える。Fig.7 のように RF 電圧振幅が小さい間はタウシェックビーム寿命も伸びるが、RF 電圧がある程度大きくなると、逆にタウシェックビーム寿命が短くなることがわかる。RF 電圧振幅を大きくしたことでバンチ長が短くなってバンチ体積が小さくなり、クーロン散乱が強まった結果としてタウシェックビーム寿命が短くなったものと思われる。

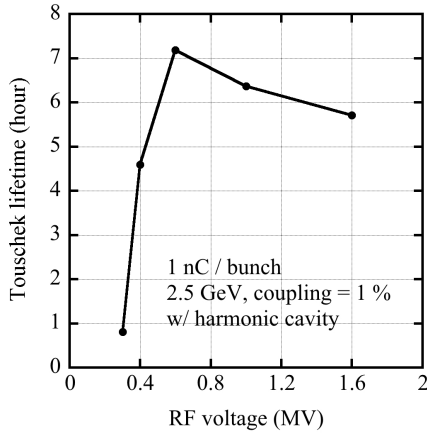


Fig.8 タウシェック寿命の RF 電圧振幅依存性 (計算結果)

なぜモータメントアクセプタンス、すなわちビームの安定領域を広げることでビーム寿命を伸ばす必要があるかであるが、主に以下の3つが理由として挙げられると思う。

理由1：ユーザーに安定な放射光を供給したいから。蓄積リング型の放射光施設特有の問題である。蓄積リング型の放射光施設では蓄積ビームは放射光の光源でもある。ビーム寿命で蓄積電流が減ると放射光の明るさは失われ、またユーザーが使用している機器への放射光からの熱負荷も変わる。これを避けるために蓄積電流がある程度下がったら、ユーザー運転を継続しながらビームを入射する運転形態（トップアップ運転と呼ばれる）が、最近の蓄積リング型放射光施設では必要不可欠となっている（Fig.9）。とは言え、入射の際はバンパ軌道の漏れなどで

蓄積ビーム（＝光源）が少なからず揺れる。入射の回数を減らすためにはビーム寿命の長寿命化が必要となる。

理由2：入射効率が低い・ビーム寿命が短いという環境下でトップアップ運転を行うと、上述したビームロスが定期的に大量に発生することになるので、機器への熱的ダメージ・放射線ダメージの観点から望ましくない[3]。

理由3：入射効率が低い・ビーム寿命が短いという環境下では、入射器の性能によっては「ビームを蓄積できずユーザー運転できない」という致命的リスクが考えられる。

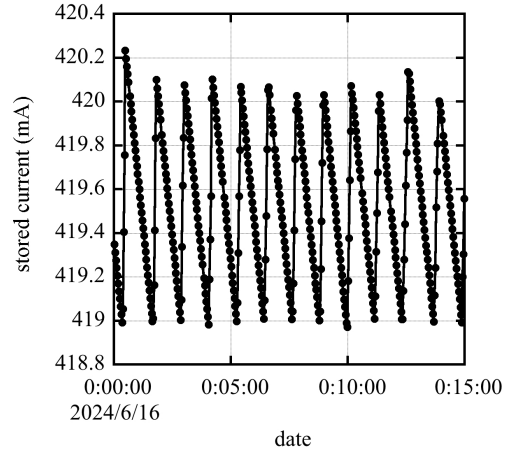


Fig.9 トップアップ運転の例（KEK-PF）

5. 円形加速器における六極磁石の必要性について

本題に近づいてきた。次に円形加速器において、なぜ六極磁石が必要かについて書く。

円形加速器における摂動が無い時のベータatron振動は、フレネセ座標系(x, y, s)を用いて

$$\frac{d^2u}{ds^2} + K_s(s)u = 0 \quad (25)$$

$$K_x(s) = \frac{e}{p_0} \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \frac{dB_y}{dx} \right\} \quad (26)$$

$$K_y(s) = -\frac{e}{p_0} \frac{dB_y}{dx} \quad (27)$$

で与えられる[5]。ただし u は x または y であり、 ρ は偏向磁石の曲率半径、 B_y は四極磁石の磁束密度である。式(25)の解は

$$u(s) = \sqrt{\varepsilon_u \beta_u(s)} \cos\{\psi_u(s)\} \quad (28)$$

で与えられる。 β_u は u 方向のベータ関数、

$$\psi_u(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta_u(s')} \quad (29)$$

は u 方向のベータatron振動の位相の進み、 ε_u は u 方向のエミッタンスである。円形加速器の周長を C とした時、

$$Q_{u0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds'}{\beta_u(s')} \quad (30)$$

が無摂動時の u 方向チューンとなる。通常、ラティス設計または線形オプティクス設計によって、安定に加速器運転が行われるように(Q_{x0} , Q_{y0})が選ばれる。

式(25)～(30)はビームの運動量が設計値の場合の式であった。今、ビームの運動量偏差を $\delta = \Delta p / p_0$ で与える。この時、チューンは式(30)から

$$Q_u = Q_{u0} + \Delta Q_u \quad (31)$$

$$\Delta Q_u = \xi_{u,0}\delta + \xi_{u,1}\delta^2 + \dots \quad (32)$$

へ修正される。 $\xi_{u,0}$ は u 方向の1次のクロマティシティ、 $\xi_{u,1}$ は2次のクロマティシティである[6]。

今、 δ は小さいものとして1次の項だけを考える。まず六極磁石がない時の $\xi_{u,0}$ は natural chromaticity と呼ばれ

$$\xi_{u,0,n} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^C ds K_u(s) \beta_u(s) \quad (33)$$

で与えられる。例えば PF-ring [7]では ($\xi_{x,0,n}$, $\xi_{y,0,n}$) = (-13, -17)であり、SPring-8 [8]では($\xi_{x,0,n}$, $\xi_{y,0,n}$) = (-117, -47)である。例えばタウシェックビーム寿命の確保のためにモーメントアクセプタンスを $\delta = 1 \sim 3\%$ まで欲しいとなると、 $\Delta Q_u = -0.1 \sim -3.5$ となり、加速器を運転するのに無視できない量となる。

そこで円形加速器では通常、 x 方向分散関数のあるところに六極磁石を配置することで、クロマティシティの補正を行う。

六極磁石の磁束密度は

$$B_x = bxy \quad (34)$$

$$B_y = \frac{b}{2}(x^2 - y^2) \quad (35)$$

で与えられる[1]。ここで

$$b = \frac{d^2 B_y}{dx^2} \quad (36)$$

である。

六極磁石によって生じるクロマティシティは

$$\xi_{x,0,s} = \frac{1}{4\pi} \int_0^C ds S(s) \beta_x(s) D_{x,0}(s) \quad (37)$$

$$\xi_{y,0,s} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^C ds S(s) \beta_y(s) D_{x,0}(s) \quad (38)$$

で与えられる[9]。ここで

$$S = \frac{eb}{p_0} \quad (39)$$

である。このテキストでは式(39)を六極磁場係数と呼ぶ(式(36)ではなく)。また $D_{x,0}$ は1次の x 方向分散関数である。六極磁石で補正後のクロマティシティは

$$\xi_{u,0} = \xi_{u,0,n} + \xi_{u,0,s} \quad (40)$$

となる[9]。

このように円形加速器ではクロマティシティを補正するために六極磁石が必要不可欠となる。

6. 六極磁石が誘起する諸現象

いよいよ本題に入る。上ではクロマティシティ補正にのみ着目したが、ベータatron振動の方程式(25)は六極磁石が入ると

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K_x(s)x = -\frac{S(s)}{2}(x^2 - y^2) \quad (41)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K_y(s)y = S(s)xy \quad (42)$$

に修正される。上述した「調和振動と振り子の運動の違い」と同様、六極磁石がない時には線形力であったベータatron振動に、六極磁石が誘起する非線形力が driving term として加わることになる。

現在、非線形オプティクス設計において補正している「六極磁石が誘起する現象」は以下の通りである。

六極磁場係数 S に関して1次の現象：

- ・1次のクロマティシティ
- ・非線形共鳴[10]
- ・2次の分散関数[11]
- ・振幅依存 center shift[12]

六極磁場係数 S に関して2次の現象：

- ・振幅依存チューンシフト[13]
- ・2次のクロマティシティ[6]

ここでは紙面の都合上、非線形共鳴と振幅依存チューンについてのみ述べる。

ハミルトニアンを使って非線形共鳴の議論を行う。式(41)および(42)に関するハミルトニアンは

$$H = H_0 + \frac{S}{6}(x^3 - 3xy^2) \quad (43)$$

で与えられる。ただし H_0 は無摂動のハミルトニアンである。導出は参考文献[10]に任せるとして、

式(43)を角変数 ϕ_u と作用変数 I_u に関する以下の関係式

$$u(s) = \sqrt{2I_u\beta_u(s)} \cos\{\phi_u(s) + \phi_0(s)\} \quad (44)$$

$$\phi_0(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta_u(s')} - Q_{u0}\theta \quad (45)$$

を使って正準変換し、さらに新しい独立変数

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (46)$$

$$R = \frac{C}{2\pi} \quad (47)$$

でスケール変換すると、最終的に新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H(\phi_x, I_x, \phi_y, I_y; \theta) = & Q_{x0}I_x + Q_{y0}I_y \\ & + I_x^{3/2} \sum_k u_{3,0,k} \cos(3\phi_x - k\theta) \\ & + I_x^{3/2} \sum_k u_{1,0,k,1} \cos(\phi_x - k\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_k u_{1,2,k} \cos(\phi_x + 2\phi_y - k\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_k u_{1,-2,k} \cos(\phi_x - 2\phi_y - k\theta) \\ & + I_x^{1/2} I_y \sum_k u_{1,0,k,2} \cos(\phi_x - k\theta) \end{aligned} \quad (48)$$

で与えられる。 k は整数であり、また

$$u_{3,0,k} = \frac{R_0}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta S(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \times \cos\{3\phi_{x0}(\theta) + k\theta\} \quad (49)$$

$$u_{1,\pm 2,k} = -\frac{R_0}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta S(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \times \cos\{\phi_{x0}(\theta) \pm 2\phi_{y0}(\theta) + k\theta\} \quad (50)$$

$$u_{1,0,k,1} = \frac{R_0}{16\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta S(\theta) \{2\beta_x(\theta)\}^{3/2} \times \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\} \quad (51)$$

$$u_{1,0,k,2} = -\frac{R_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta S(\theta) \beta_y(\theta) \sqrt{2\beta_x(\theta)} \times \cos\{\phi_{x0}(\theta) + k\theta\} \quad (52)$$

である。

例えば

$$H(\phi_x, I_x; \theta) = Q_{x0}I_x + I_x^{3/2} u_{3,0,k} \cos(3\phi_x - k\theta) \quad (53)$$

について正準変換を取ると

$$\frac{dI_x}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \phi_x} = -3I_x^{3/2} u_{3,0,k} \sin(3\phi_x - k\theta) \quad (54)$$

である。今、

$$\frac{d}{d\theta} (3\phi_x - k\theta) = 0 \quad (55)$$

すなわち $3Q_x = k$ を満たす時、

$$3\phi_x - k\theta = \text{const.} \quad (56)$$

であることから、式(56)を式(54)に代入して独立変数で積分すると

$$I_x \propto \theta \quad (57)$$

となる。式(57)は作用変数が時間とともに増大すること、共鳴が励起されたことを意味している。よって式(56)が、六極磁石が誘起する共鳴の条件となる。同様に

$$Q_x = k \quad (58)$$

$$Q_x \pm 2Q_y = k \quad (59)$$

が六極磁石が誘起する共鳴の条件となる。なお、式(58)に関しては式(48)を見るとわかる通り、「 I_x だけに依存する $Q_x = k$ の共鳴」と「 I_x と I_y に依存する $Q_x = k$ の共鳴」の2種類があるので注意が必要である。

それぞれの共鳴について特徴を見ていく。まず $3Q_x = k$ を満たす条件でトラッキングを行なった結果を Fig.10 に与える。ただし縦軸は $p_x = dx/ds$ である。振りの時と同様、セパトリクスを生じていることがわかる。位相空間がセパトリクスによりビームの安定領域と不安定領域に分けられた、とも言える。

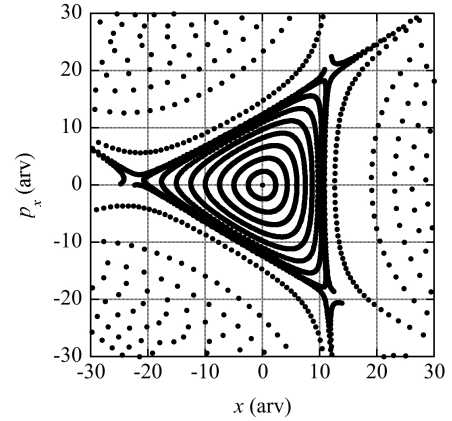


Fig.10 $3Q_x = k$ を満たす場合のトラッキング結果。

次に「 I_x だけに依存する $Q_x = k$ の共鳴」を満たす条件でトラッキングを行なった結果を Fig.11 に与える。こちらもセパトリクスを生じており、セパトリクスの外側で急激に p_x が増大しているのが見える。

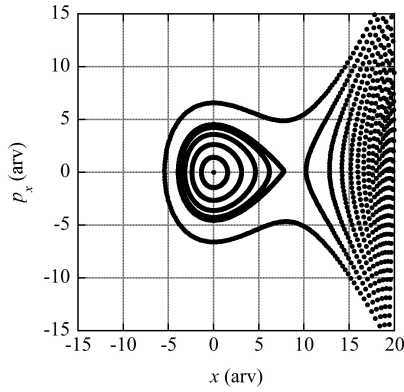


Fig.11 「 I_x だけに依存する $Q_x=k$ の共鳴」を満たす場合のトラッキング結果

次に「 I_x と I_y に依存する $Q_x=k$ の共鳴」を満たす条件でトラッキングを行なった結果を Fig.12 に与える。 I_y が振幅の項として入るので、 y の初期値に応じて (x, p_x) が増大することが見えている。

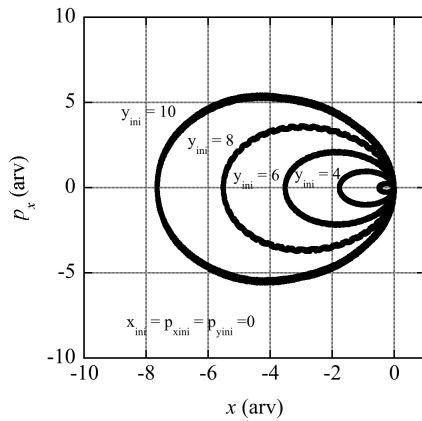


Fig.12 「 I_x と I_y に依存する $Q_x=k$ の共鳴」を満たす場合のトラッキング結果

$Q_x - 2Q_y = k$ を満たす条件でトラッキングを行なった結果を Fig.13 に与える。Fig.10～12 については軌道が線状に見えていたが、Fig.13 では軌道が幅を持ってぼやけて見える。これは x 方向と y 方向のエミッタンスがやりとりをしていることが原因である。 m と n を整数して $mQ_x + nQ_y = k$ の共鳴条件を満たした時、ハミルトニアンを正準変換すると $nI_x - mI_y$ は定数となることが知られている[14]。実際に Fig.13 の粒子分布から I_x と I_y を計算すると (Fig.14)、 $2I_x + I_y = \text{const.}$ の線に沿ってエミッタンスが変化しているのが見える。

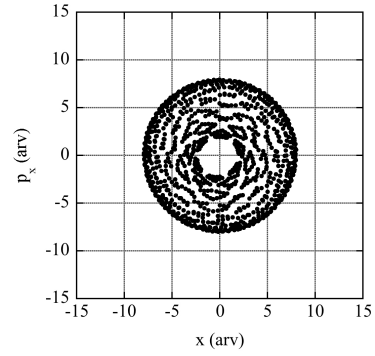


Fig.13 $Q_x - 2Q_y = k$ を満たす場合のトラッキング結果

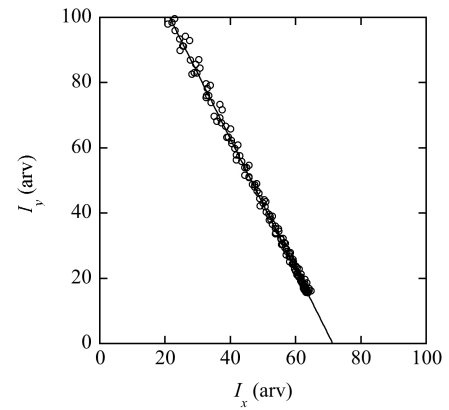


Fig.14 $Q_x - 2Q_y = k$ を満たす場合の I_x と I_y

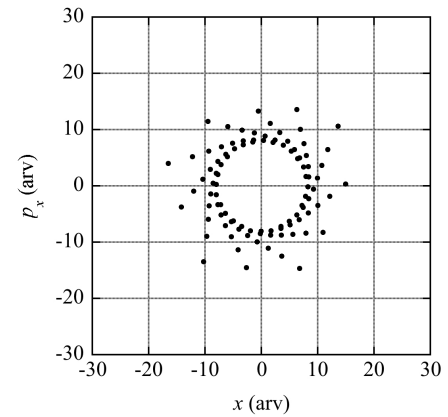


Fig.15 $Q_x + 2Q_y = k$ を満たす場合のトラッキング結果

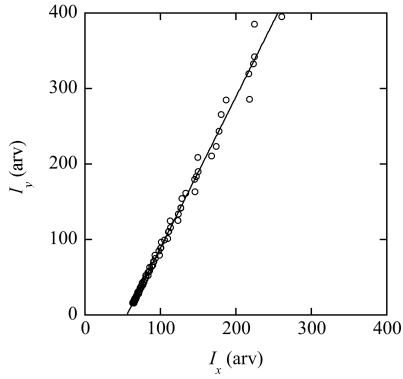


Fig.16 $Q_x + 2Q_y = k$ を満たす場合の I_x と I_y

最後に $Q_x + 2Q_y = k$ を満たす条件でトラッキングを行なった結果を Fig.15 に与える。Fig.13 と

同様、軌道が幅を持つことがわかる。Fig.15 から I_x と I_y を計算した時の結果を見ると (Fig.16)、 $2I_x - I_y = \text{const.}$ の線に沿ってエミッタンスが変化していることがわかる。和共鳴の場合、 I_x と I_y の両方が増大するため、危険な共鳴と言える。

次に六極磁石が誘起する振幅依存チューンについて、ここでは結果だけ書く。参考文献[13]に詳細が記載されているので参照して頂きたい。振幅依存チューンの解析式は

$$Q_x = Q_{x0} + \alpha_{xx}I_x + \alpha_{xy}I_y \quad (60)$$

$$Q_y = Q_{y0} + \alpha_{xy}I_x + \alpha_{yy}I_y \quad (61)$$

で与えられる。ただし

$$\alpha_{xx} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2)\beta_x^{3/2}(s_1)\beta_x^{3/2}(s_2) \times \left[\frac{\cos\{3(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])\}}{\sin(3\pi Q_{x0})} + 3 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})} \right] \quad (62)$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{32\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2)\beta_x^{1/2}(s_1)\beta_x^{1/2}(s_2)\beta_y(s_1)\beta_y(s_2) \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] + \frac{1}{16\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2)\beta_x^{3/2}(s_1)\beta_x^{1/2}(s_2)\beta_y(s_2) \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})} \quad (63)$$

$$\alpha_{yy} = -\frac{1}{64\pi} \oint ds_1 \oint ds_2 S(s_1)S(s_2)\beta_x^{1/2}(s_1)\beta_x^{1/2}(s_2)\beta_y(s_1)\beta_y(s_2) \times \left[\frac{\cos\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] - 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} + 2Q_{y0})\}} + \frac{\cos\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0}) - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)] + 2[\psi_y(s_1) - \psi_y(s_2)]\}}{\sin\{\pi(Q_{x0} - 2Q_{y0})\}} \right] + 4 \frac{\cos(\pi Q_{x0} - [\psi_x(s_1) - \psi_x(s_2)])}{\sin(\pi Q_{x0})} \quad (64)$$

である。式(62)~(64)の中にある六極磁場係数 S を調整することで振幅依存チューンを補正することができる。

実際に α_{xx} が小さくなるように六極磁場係数を式(62)で解析的に求めて、求まった六極磁場係数をトラッキングコードに入力して振幅依存チューンを計算した。結果を Fig.17 に与える。

- 1 「式(62)を使って計算した α_{xx} 」 と「トラッキングで振幅依存チューン求め、そこからフィッティングで求めた α_{xx} 」 が概ね一致すること
- 2 そして想定通りに振幅依存チューンをコントロールできていること

がわかる。振幅依存チューンが共鳴条件にひっかかると非線形共鳴が誘起されるので、振幅依存チューンの補正は極めて重要な仕事となる。

「六極磁場調整を調整して共鳴を補正する」とは、式(49)~(52)を極力小さくする作業になる。ラティス設計や線形オブティクス設計によりベータ関数やベータatron振動位相は既に与えられているので、最適な六極磁場係数 S を与えることができれば、式(49)~(52)を小さくすることができる。同様に、「振幅依存チューンを補正する」とは、式(62)~(64)を小さくする作業となる。

ただし S を変えると、上述した「六極磁石が誘起する現象」が全て変動することになる。 S に関

する連立方程式を立てて同時に補正する必要がある。

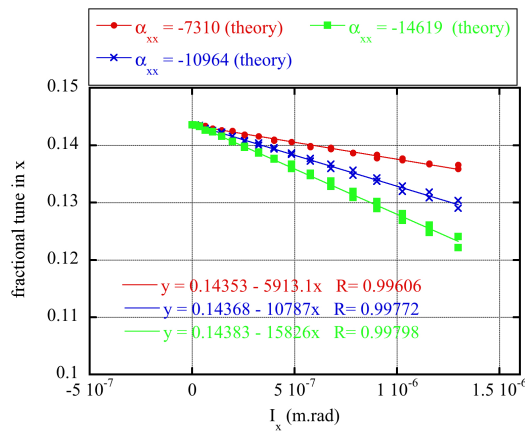


Fig.17 振幅依存チューンに関する式(62)とトラッキング結果の比較

7. 非線形オプティクス設計の具体例

最後に非線形オプティクスの最適化例を示して終わりとする。SPRING-8 蓄積リングの実機に適用した例である。

入射効率を改善するためには、まず「何が起きているか」を理解する必要がある。そこで非線形オプティクス最適化前に、シミュレーションでいくつかの事柄について調査を行なった。

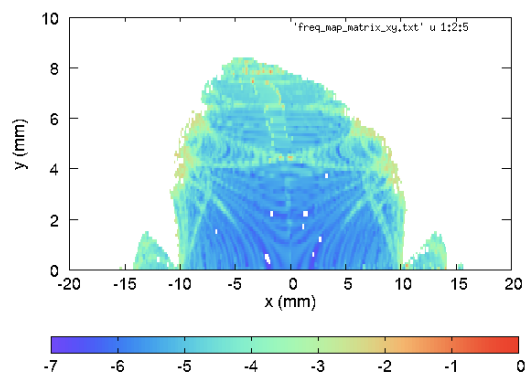


Fig.18 非線形オプティクス調整前の frequency map 結果

まず粒子の初期条件を変えながら single particle tracking を行い、ビームが安定かどうかを調べた (frequency map 解析と呼ばれる)。結果

を Fig.18 に与える。色の付いているところが「ビームが生き残った領域」である。色の違いは拡散係数の違いで、赤色に近いほど拡散係数が大きい (=ビームが不安定である) ことを示している。白色のところがビームが失われた領域である。Fig.18 の $(x, y) = (-10 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ の近辺が白色になっており、この近辺でビームは生き残ることができないことを意味している。

原因を調査するために $(x, y) = (-10 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ 近傍にテスト粒子を配置して single particle tracking を行い、位相空間でのビーム分布を調べた。結果を Fig.19 に示す。x 方向について異常は見られないものの、y 方向については 3 方向に分岐した粒子分布となった。y 方向に 3 次の共鳴が励起されているものと思われる。

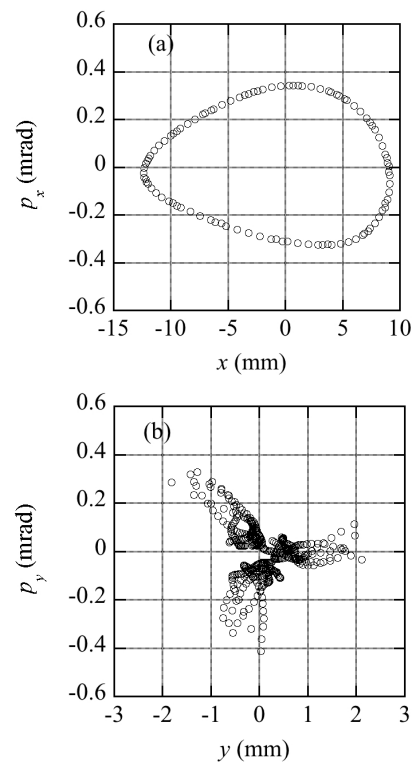


Fig.19 $(x, y) = (-10 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ 近傍にテスト粒子を配置して single particle tracking を行なった結果。(a) x 方向と (b) y 方向

トラッキングにより振幅依存チューンを調べた。測定結果との比較を Fig.20 に与える。確かに

$x = -10$ mm の位置で、 y 方向のチューンの端数が 0.33 近傍となっており、測定条件とも一致しているので、実機においても $x = -10$ mm の位置で $3Q_y = \text{int.}$ の共鳴が励起されているように思われる。

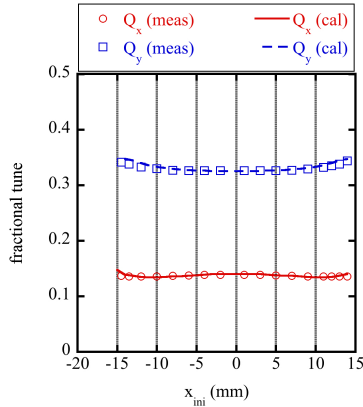


Fig.20 非線形オプティクス調整前の振幅依存チューンの測定結果とトラッキング結果の比較

Table.2 非線形オプティクス調整前後のパラメーター

パラメーター		補正前	補正後
クロマティシティ			
$(\xi_{x,0}, \xi_{y,0})$		(3, 3)	(3, 3)
非線形共鳴			
$Q_x = k$ (I_x に依存する場合)	実部	0.0	0.0
	虚部	0.1	0.1
$Q_x = k$ (I_x と I_y に依存する場合)	実部	0.0	0.0
	虚部	0.0	0.0
$3Q_x = k$	実部	-0.1	-0.1
	虚部	8.8	7.7
$Q_x + 2Q_y = k$	実部	-7.4	-5.4
	虚部	-6.1	-4.5
$Q_x - 2Q_y = k$	実部	-44.9	-39.5
	虚部	10.5	9.3
振幅依存チューン			
α_{xx}		-7310	-7310
α_{xy}		1241	-1241
α_{yy}		-1553	0

$3Q_y = \text{int.}$ の共鳴は六極磁石では補正できないが (skew 六極磁石があれば補正できる)、 $3Q_y = \text{int.}$ の共鳴が $x = -10$ mm から遠ざかるように六極磁石で振幅依存チューンを調整することはできる。ただし振幅依存チューンを補正するために六極磁石の磁束密度を変えて、連動してクロマティシティや共鳴補正条件などが変わると元も子もないので、連立方程式によりクロマティシティや非線形共鳴の励起条件は変えずに、振幅依存チューンのみ $3Q_y = \text{int.}$ の共鳴が $x = -10$ mm から遠ざかるように六極磁場係数 S を調整した。調整前後のクロマティシティ、非線形共鳴の励起条件、振幅依存チューンの係数の計算値を Table.2 に、補正前後の六極磁場係数を Fig.21 に与える。

新しい六極磁場で計算した frequency map の結果を Fig.22 に与える。想定通り、 $3Q_y = \text{int.}$ の共鳴が $(x, y) = (-10 \text{ mm}, 0 \text{ mm})$ から遠ざかったのがわかる。

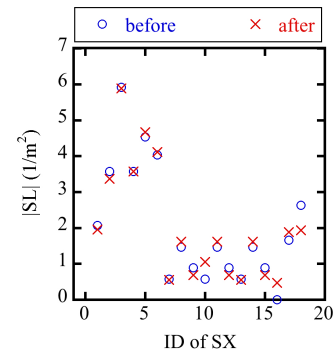


Fig.21 調整前後の六極磁場係数

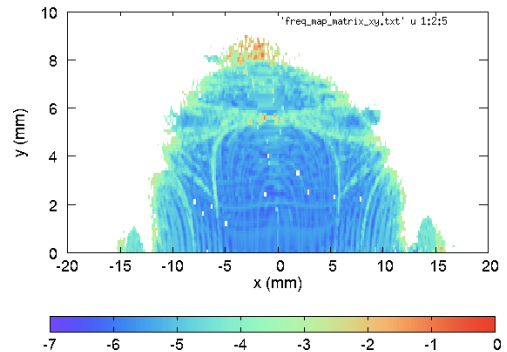


Fig.22 非線形オプティクス調整後の frequency map

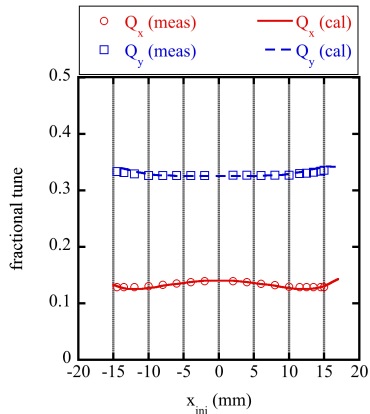


Fig.23 非線形オプティクス調整後の振幅依存チューンの測定結果とトラッキング結果の比較

そこで Fig.21 の六極磁場係数を実機に与えて各種測定を行なった。振幅依存チューンの計算結果と測定結果の比較を Fig.23 に与える。実機においても想定通りに $3Q_y = \text{int.}$ の共鳴条件が $x = -10 \text{ mm}$ から遠ざかる結果となった。次に入射効率とビーム寿命の測定結果を Fig.24 に与える。非線形オプティクス調整後、入射効率およびビーム寿命が改善される結果を得た。

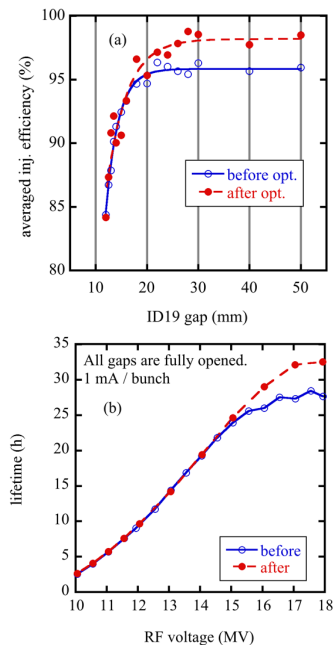


Fig.24 非線形オプティクス調整前後の(a) 入射効率と(b)ビーム寿命

「低い入射効率」、「短いビーム寿命」は加速器の運転を困難にするだけでなく、現象に伴うビームロスにより機器に熱的ダメージや放射線ダメージを与えうるという観点で、円形加速器において解決すべき重要な課題のひとつと認識している。非線形オプティクス設計は入射効率やビーム寿命を改善する手法の一つであろうと思う。

最後に経験上から来る注意点をいくつか書いて終わりにする。

- ・式(37)~(38)、式(49)~(52)および式(62)~(64)は、全て積分表示で与えた。これは「磁石の中でのベータ関数や分散関数の変化を無視できない」ということを意味している。過去、式(37)~(38)、式(49)~(52)および式(62)~(64)について六極磁石を薄肉近似で取り扱った時に、解析結果とトラッキング結果に乖離を生じるという経験をした。極力、式(37)~(38)、式(49)~(52)および式(62)~(64)は六極磁石を厚肉近似で取り扱い、連立的に解くのがよろしいのではないかと思います。
- ・あと六極磁場係数が強すぎると、式(37)~(38)、式(49)~(52)および式(62)~(64)よりも高次の項が支配的になる。すなわち式(37)~(38)、式(49)~(52)および式(62)~(64)を使った解析結果とトラッキング結果に乖離を生じうる。可能な限り弱い六極磁場係数で補正するのがよろしいのではないかと思います。

参考文献

- [1] 例えば H. Wiedemann, “Particle Accelerator Physics Third Edition”, Springer, 2007.
- [2] 高雄勝、他「SPring-8 蓄積リングにおける Touschek 散乱によるビーム損失について」、第 14 回加速器学会年会（2017 年 8 月 1 日～3 日、札幌）TUP018
- [3] 例えば長谷川照晃、他「その場磁場測定による SPring-8 真空封止アンジュレータの減磁評価」、第 12 回加速器学会年会（2015 年 8 月 5 日～7 日、敦賀）THP023
- [4] 中村典雄「ビーム寿命」、OHO'91 テキスト Vol.4（1991 年）1-19
- [5] 例えば D. A. Edwards and M. J. Syphers, “An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators”, John Wiley & Sons, 2008.

- [6] M. Takao, “Formulation of Nonlinear Chromaticity in Circular Accelerators by Canonical Perturbation Method”, Phys. Rev. E 72, 046502 (2005).
- [7] <https://www2.kek.jp/imss/pf/apparatus/status/>
- [8] <http://www.spring8.or.jp/ja/>
- [9] 小林幸則「PF リングにおけるダイナミックアパーチャーの計算と測定実験」 OHO'99 テキスト Vol.1C (2014 年) 1-15
- [10] R. Nagaoka, et al., “Nonlinear Dynamics with Sextupoles in Low-emittance Light Source Storage Rings” Nucl. Instru. Meth. A 302, 9-26 (1991).
- [11] H. Tanaka et al., “A Perturbative Formulation of Nonlinear Dispersion for Particle Motion in Storage Rings”, Nucl. Instru. Meth. A 431, 396-408 (1999).
- [12] Y. Shoji et al., “Amplitude Dependent Shift of Betatron Oscillation Center”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 17, 064001 (2014).
- [13] K. Soutome and H. Tanaka, “Higher-order Formulas of Amplitude-dependent Tune Shift Caused by a Sextupole Magnetic Field Distribution”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 20, 064001 (2017).
- [14] K. Takayama, private communication.