

8. 挿入光源

高エネルギー加速器研究機構

阿 達 正 浩

目 次

挿入光源

1. 荷電粒子による電磁波の放射	
1.1 運動する点電荷による遅延電磁場 - Liénard-Wiechert 表式	8-1
1.2 運動する点電荷による遅延電磁場の放射パワー	8-1
1.3 運動する点電荷による放射場のスペクトル - Jackson 表式	8-6
2. アンジュレータ	
2.1 任意の加速運動で電子が生成する放射光の光子数への換算	8-6
2.2 軌道が有限の周期性を持つ場合のスペクトル - Kim 表式	8-7
2.3 アンジュレータ放射スペクトルのフーリエ級数展開による表記	8-8
2.4 アンジュレータ放射スペクトル分布の特徴	8-9
2.5 アンジュレータ磁場中の電子の運動	8-9
2.6 アンジュレータの1次光	8-12
2.7 ローレンツ短縮と相対論的ドップラーシフト	8-13
2.8 アンジュレータスペクトルの計算	8-14
2.9 リニアアンジュレータの軸上放射スペクトル	8-14
3. ビーム	
3.1 多数の電子からの放射に関する一般論 / 光の重ね合わせ	8-19
3.2 実効的な放射光の強度	8-21
3.3 光子ビームのエミッタンス	8-22
3.4 放射光の強度計算	8-22
4. 偏向電磁石	
4.1 偏向電磁石からの放射	8-23
4.2 ベッセル関数の近似とエアリー関数	8-25
4.3 偏向電磁石からの放射光の実効的な強度	8-28
5. ウィグラー	
5.1 ウィグラー	8-31
6. 自由電子レーザー	
6.1 電子位相	8-32
6.2 定常状態にある FEL	8-33
6.3 マイクロバンチによる光電場の成長	8-34
6.4 電子のエネルギー方程式	8-37
6.5 マイクロバンチの成長	8-38
6.6 FEL 微積分方程式	8-39
6.7 FEL 微分方程式	8-40
6.8 FEL 微分方程式の解	8-42
6.9 増幅率の計算例	8-43
7. 多様な装置の開発と利用	8-44
Appendix A ガンマ関数	8-46
Appendix B ベッセル関数	8-49
Appendix C フーリエ級数展開	8-53
Appendix D 種々の方程式	8-54
Appendix E ローレンツ変換	8-57
参考文献	8-60

挿入光源

1. 荷電粒子による電磁波の放射

1.1. 運動する点電荷による遅延電磁場 - Liénard-Wiechert 表式

さて、挿入光源について説明する前に、まずはシンクロトロン光について概説する。挿入光源が作り出す光は、シンクロトロン光にはかならない。

相対論的な速さで移動する荷電粒子に加速度が与えられることで放射されるシンクロトロン光は、図 1-1 に示す粒子系の時間 t' を使って、電磁気学で学ぶ遅延電場の Liénard-Wiechert 表式 (Ref. [1] の式 (14.14) など) で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{\gamma^2(t') R^2(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c R(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right] \end{aligned} \quad (1-1)$$

ただし、観測者系と粒子系（プライム記号）の間には、

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \quad (1-2)$$

の関係があり (Ref. [2] の式 (3.4) や [3] 式 (4.3) など)、

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \quad (1-3)$$

となる (Ref. [2] の式 (3.12) など)。

式 (1-1) において、粒子が観測点に対して加減速していない時 ($\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \mathbf{0}$) には、角括弧内の $R^{-2}(t')$ で減衰する第 1 項のみが残るため、電磁波は距離が離れるにつれて急速に減衰する。このことから、角括弧内の $R^{-2}(t')$ で減衰する第 1 項と、 $R^{-1}(t')$ で減衰する第 2 項をそれぞれ、near field および radiation field などと区別することがある。BPM 電極など電子ビームに非常に近い距離で受信する電磁波には第 1 項の寄与が大きく残り、発信位置 (光源) から十分遠方で受信される電磁波 (シンクロトロン光) を考える際には第 1 項の寄与が無視できることがわかる。

1.2. 運動する点電荷による遅延電磁場の放射パワー

本節では、放射パワーの表式を導出する。一つの電子が作る遅延電磁場の Liénard-Wiechert 表式 (1-1) を、速度

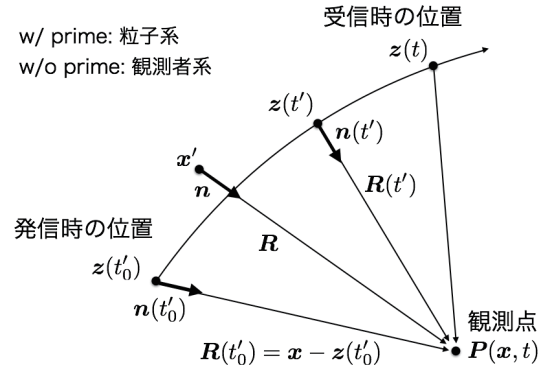


図 1-1. 粒子系と観測者系。 t'_0 は発信時刻、 $z(t'_0)$ は発信時の粒子の位置ベクトル。 $\mathbf{x}$ は観測点。 $\mathbf{n}(t'_0)$ は発信時の粒子の位置から観測点の方向に向いた単位ベクトル。 $\mathbf{x}'$ は空間の任意の場所を示す位置ベクトル。 $z(t')$ は任意の時刻 t' における点電荷の位置。 $\mathbf{n}(t')$ はその場所から観測点 $\mathbf{x}$ へ向く単位ベクトル。(Ref. [2] の 9 章の図 3.1 より)

成分のみの電場成分 (Velocity field) $\mathbf{E}_{\text{ret},v}(\mathbf{x}, t)$ と、加速度成分を含む電場成分 (Acceleration field) $\mathbf{E}_{\text{ret},a}(\mathbf{x}, t)$ とにわけて、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2(t'))(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))}{R^2(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c R(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right] \\ &\equiv \mathbf{E}_{\text{ret},v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_{\text{ret},a}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

と定義する。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ret},v}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2(t'))(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))}{R^2(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right] \\ \mathbf{E}_{\text{ret},a}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c R(t') (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^3} \right] \\ \text{where, } t &= t' + \frac{R(t')}{c} \end{aligned} \quad (1-5)$$

とする ($\mathbf{E}_{\text{ret},a}$ の表式は Ref. [3] の式 (4.2) に一致)。

Ref. [4] の 4 章 31 節の式 (31.3) に示されている通り、ポインティングベクトル $\mathbf{S}$ は任意の空間内に存在する電磁場と粒子からなる閉じられた系に対するエネルギー

保存則の中にあられて、空間の体積を V 、空間を囲む曲面を S として、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right) dV + \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV = 0 \quad (1-6)$$

と書ける。一つの電子の場合では電子の位置を原点にとり、距離 R だけ離れた球体を考えたときに、第1項がこの球体内の電磁場のエネルギーの時間あたりの変化であり、第2項が球体の系から外に流れ出すエネルギーの流れ（他の量が時間あたりであるのでこのエネルギーの流れも時間あたりの流れであることに注意）、そして、第3項が系の中に存在する電子の静止エネルギーを含めた運動エネルギーの時間あたりの変化を表す（Ref. [4] の4章31節の式(31.6)、Ref. [5]5章2節）。

すなわち、電子が全立体角に放射する単位時間あたりのエネルギーの流れ $P(t) = dW/dt$ は、第2項から得られる。

ガウスの定理を使って、面積分を体積分にも書き直せば、

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} d^3x \quad (1-7)$$

となる。

さて、観測者が電子から $\mathbf{n}$ の向きに十分離れた距離 R_0 離れた位置にいるときに、観測者が単位時間あたり、単位立体角あたりに受信するエネルギーの流れ $(d/d\Omega)(dW/dt)$ を考える。まずは、ガウスの法則にしたがって、図1-2に示すように立体角素と面積素の関係を（遠方場近似のもとで $\theta = 0$ として）、

$$dS = \frac{R_0^2 d\Omega}{\cos \theta} = R_0^2 d\Omega \quad (1-8)$$

とする。これを用いて、式(1-7)の面積分を立体角の積分へと変換し、立体角の積分範囲を1にとれば、

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} = R_0^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \quad (1-9)$$

Ref. [5]5章の式(2.9)に示されているように、ポインティングベクトル $\mathbf{S}$ は、

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(t) \quad (1-10)$$

とできる。式(1-4)を使えば、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{ret}}(t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{\text{ret}} \times \left\{ \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}_{\text{ret}} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}_{\text{ret}}^2 \mathbf{n}(t') \end{aligned} \quad (1-11)$$

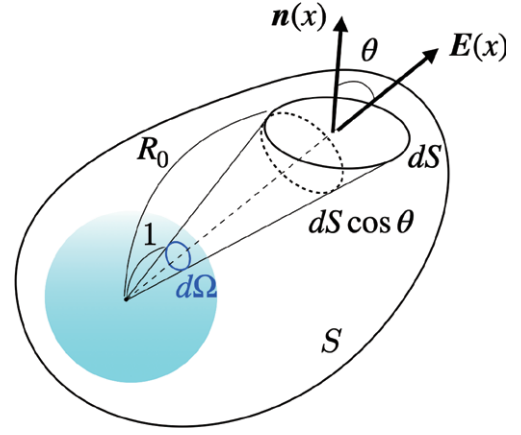


図1-2. 立体角素と面積素の関係（Ref. [5] の図1.10より）。

となる。したがって、単位時間単位立体角あたりのエネルギーの流れは、

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} = c\epsilon_0 R_0^2 \mathbf{E}_{\text{ret}}^2 \quad (1-12)$$

となる。ここで、式(1-5)の $\mathbf{E}_{\text{ret},v}$ は距離 $R(t')$ の2乗に反比例して減衰するので、十分離れた観測者は受信できない。したがって、単位時間単位立体角あたりのエネルギーの流れは、

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} = \frac{R_0^2}{\mu_0 c} \mathbf{E}_{\text{ret},a}^2 = c\epsilon_0 R_0^2 \mathbf{E}_{\text{ret},a}^2 \quad (1-13)$$

となる（Ref. [3] の式(4.1)）。

ここで、式(1-3)を使って粒子系時間 t' を使った表式に書き換えれば、

$$\begin{aligned} \frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{R_0^2}{\mu_0 c} \mathbf{E}_{\text{ret},a}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})_{t'} \\ &= c\epsilon_0 R_0^2 \mathbf{E}_{\text{ret},a}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})_{t'} \end{aligned} \quad (1-14)$$

となる（Ref. [3] の式(2.7)など）。

さらに、今、観測者が粒子の運動方向 $\mathbf{n}$ 近傍の粒子から十分離れた位置にいる場合（偏向電磁石部で発生された光をビームラインで観測する場合など）、

$$R(t') \approx R_0 - r(t') \cos \theta_0 \quad (1-15)$$

と近似できて、図1-3に示すように、 θ_0 は電子の位置ベクトルと原点から観測者へ向かう単位ベクトルとが成す角である。

これは、電子から観測者への単位ベクトル $\mathbf{n}(t')$ が $\mathbf{n}_0$ で一定であると見る遠方場近似と呼ばれる近似で、放

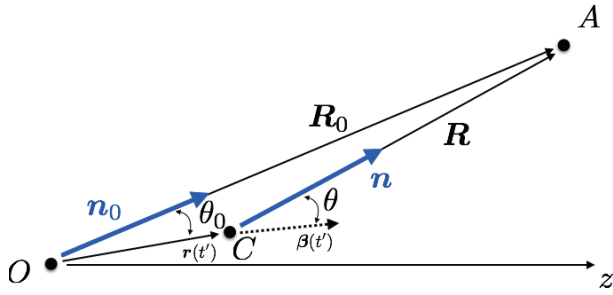


図 1-3. 遠方場近似。原点を点 O、観測者の位置を点 A、電子の位置を点 C とする。電子および原点から観測者へ向かうベクトルを $\mathbf{R}(t')$ および $\mathbf{R}_0$ とし、それらの単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}(t')$ および $\mathbf{n}_0$ とする。 θ_0 は電子の位置ベクトル $\mathbf{r}(t')$ と観測者の位置ベクトル $\mathbf{R}_0$ との成す角である。

射光の計算に最も一般的に用いられる [6]。原点を粒子の近くにとり、 $r(t') \approx 0$ かつ $\theta_0 \approx \theta \approx 0$ として、 $R(t') \approx R_0$ と近似するものである。

このとき、式 (1-14) に式 (1-5) を代入すれば、電子が単位加速時間あたりに観測者が受信する単位立体角あたりの放射エネルギーは以下のように得られる (Ref. [3] の式 (2.8) など)。

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt'} = \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]_{t'}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})_{t'}^5} \quad (1-16)$$

さて、式 (1-16) は放射の角度分布を示すということであるが、どのような分布になっているのであろうか。Ref. [7] や Ref. [8] を参考に調べてみることにする。

まずは $\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が垂直な場合を考える。これは例えば、磁場中で円運動する電子からの放射を観測する場合にあたる。今、Ref. [7] の図 2.3 にならって図 1-4 のように系を設定する。すなわち、電子の位置を原点に、電子の速度の向きを z 軸に、電子の加速度の向きを x 軸に、 z 軸と観測者の位置ベクトル $\mathbf{n}$ のなす角度を θ とし、 xy 面内における x 軸と $\mathbf{n}$ とのなす角度を φ とする。

このとき、xyz 各方向の各単位ベクトル ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) を使って、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \beta \mathbf{e}_z \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \dot{\beta} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{n} &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1-17)$$

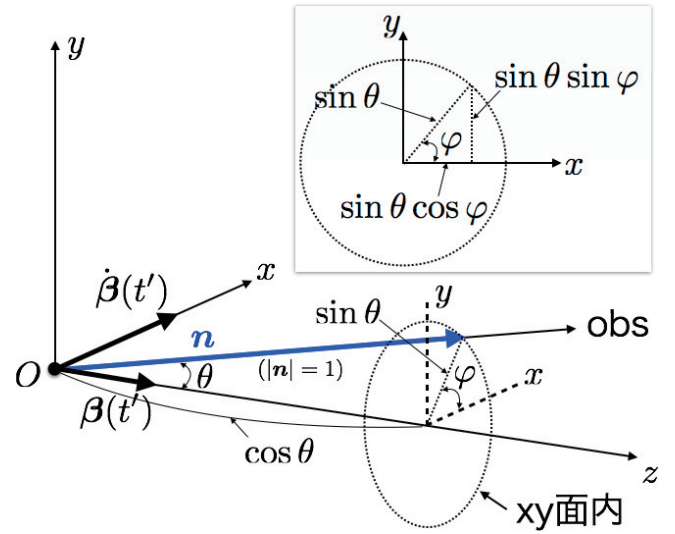


図 1-4. $\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が垂直な場合。(Ref. [7] の図 2.3 より)

と書ける。したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \beta \cos \theta \\ \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \dot{\beta} \sin \theta \cos \varphi \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1 \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \end{aligned} \quad (1-18)$$

などとなる。これらの関係式を使って、式 (1-16) を解く。

式 (1-16) の分子のベクトル演算は、式 (1-18) を使って、

$$\begin{aligned} &[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]_{t'}^2 \\ &= [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]_{t'}^2 \\ &= [\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})]_{t'}^2 \\ &= [\mathbf{n} (\dot{\beta} \sin \theta \cos \varphi) - \dot{\boldsymbol{\beta}} (1) \\ &\quad - \boldsymbol{\beta} (\dot{\beta} \sin \theta \cos \varphi) + \dot{\boldsymbol{\beta}} (\beta \cos \theta)]_{t'}^2 \\ &= \left[-\frac{\dot{\beta}^2}{\gamma^2} (\sin \theta \cos \varphi)^2 + \dot{\beta}^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 \right]_{t'} \end{aligned} \quad (1-19)$$

また、式 (1-16) の分母のベクトル演算は、式 (1-18) を使って、

$$(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})_{t'}^5 = (1 - \beta \cos \theta)_{t'}^5 \quad (1-20)$$

である。これらの結果を使って、式 (1-16) は、

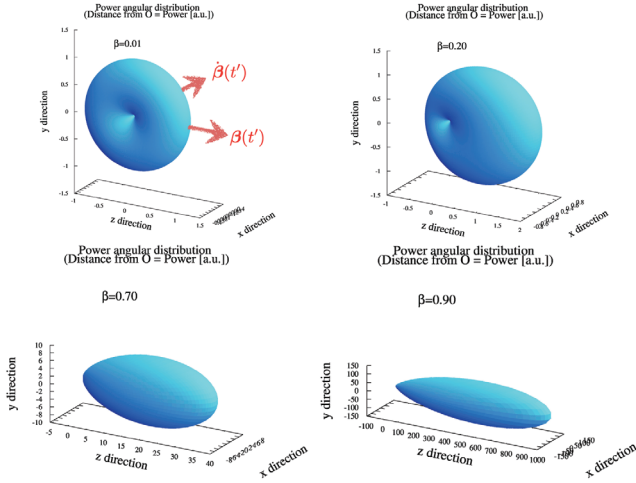


図 1-5. β と $\dot{\beta}$ が垂直な場合の 1 個の電子による放射パワーの角度分布。原点を光源点として、原点からの距離が放射パワーの強さにあたる。光速に近づくにつれて前方に偏った放射パワー分布となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}]_{t'}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)_{t'}^5} \\
 &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)_{t'}^3} \left[1 - \frac{(\sin \theta \cos \varphi)^2}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]_{t'}
 \end{aligned} \quad (1-21)$$

となる (Ref. [7] の式 (2.59))。光源点を原点にとり、上式を使って空間の全角度への放射パワーを原点からの距離でプロットすると、図 1-5 のような曲面が各 β の値に対して得られる。なお、簡単のため $\dot{\beta}^2$ を含む係数部分を 1 とした。図から、光速に比べて十分に遅い場合 ($\beta = 0.01$) には加速度ベクトル $\dot{\beta}$ 方向にパワーのない円盤様の形状をしているが、 β が 1 に近づくにつれて次第に速度ベクトル β 方向にパワーが偏よるとともに、鋭く集束していくことがわかる。なお、 $\beta = 0.01$ の結果から、加速度ベクトル方向の軸上に放射パワーが無いことがわかる。

式 (1-21) の xz 平面上の分布は、図 1-4 から明らかにように、 $\varphi = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \theta)_{t'}^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]_{t'}
 \end{aligned} \quad (1-22)$$

と Ref. [8] の式 (2.328) が得られる。

次に、 β と $\dot{\beta}$ が平行な場合を考える。すなわち、観測者に向かって運動する粒子が観測者に向かって加速度運動を行っている状態を考える。これは例えば、制動放射を観測する場合にあたる。このとき、

$$\begin{aligned}
 \beta &= \beta e_z \\
 \dot{\beta} &= \dot{\beta} e_z \\
 \mathbf{n} &= \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y + \cos \theta e_z \\
 \mathbf{n} \cdot \beta &= \beta \cos \theta \\
 \mathbf{n} \cdot \dot{\beta} &= \dot{\beta} \cos \theta \\
 \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1 \\
 \beta \cdot \dot{\beta} &= \beta \dot{\beta}
 \end{aligned} \quad (1-23)$$

である。ところで、 $\beta \times \dot{\beta} = 0$ であることに注意して式 (1-16) の外積部分を計算すれば、

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}]_{t'}^2 &= [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta} - \beta \times \dot{\beta})]_{t'}^2 \\
 &= [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\beta})]_{t'}^2
 \end{aligned} \quad (1-24)$$

となる。さらに、図 1-3 に示すように β と $\mathbf{n}$ がなす角が θ であることに注意して変形すれば、

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}\}]_{t'}^2 \\
 &= \left[(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta})^2 + \dot{\beta}^2 \right]_{t'}^2 \\
 &= \left[\dot{\beta}^2 - (\dot{\beta} \cos \theta)^2 \right]_{t'}^2 \\
 &= \left[\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \right]_{t'}^2
 \end{aligned}$$

と得られる。したがって、式 (1-16) はこのとき、

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt'} = \frac{e^2}{16\pi^2 c \epsilon_0} \frac{[\dot{\beta}^2 \sin^2 \theta]_{t'}}{(1 - \beta \cos \theta)_{t'}^5} \quad (1-25)$$

となる (Ref. [3] の式 (2.9))。上式には φ が含まれていないことから、その方向に一様であることがわかる。

式 (1-25) の $\dot{\beta}$ を含む係数部分を 1 として、各 β の値に対してプロットすると図 1-6 のようになる。図から、電子の速さが高速に近づくにしたがって、放射の角度分布は速度ベクトル方向に鋭く集中するとともに、放射強度も増大することがわかる。また、図 1-5 の場合と同様に、加速度ベクトル方向の軸上に放射パワーが無いことがわかる。

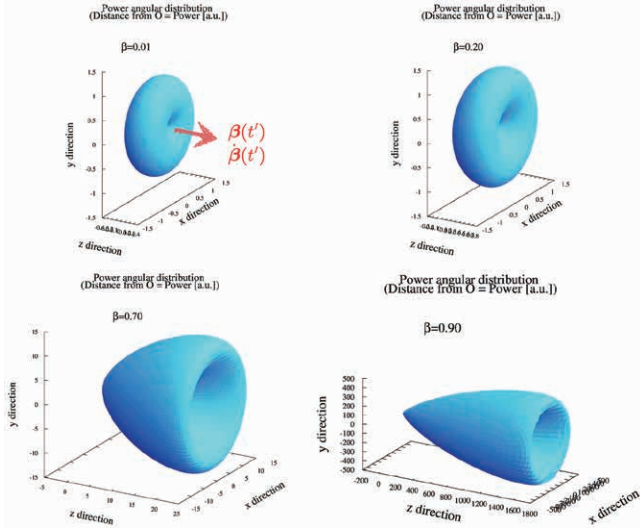


図 1-6. β と $\dot{\beta}$ が平行な場合の 1 個の電子による放射パワーの角度分布。原点を光源点として、原点からの距離が放射パワーの強さにあたる。光速に近づくにつれて前方に偏った放射パワー分布となる。

また、Ref. [3] に述べられているように、この特徴は β が 1 に近い領域では、 β あるいは $\dot{\beta}$ がどのような方向を向いても、すなわち、 $\beta \times \dot{\beta}$ あるいは $n \times \dot{\beta}$ がどのような値をとろうとも変化しない。なぜなら、式 (1-16) の分母にある $(1 - \beta \cos \theta)^5$ という高次のべき乗がこの分布の形を決定づけるからである (β と $\dot{\beta}$ が垂直な場合も同様 [8])。このべき乗があるために、 $\beta \approx 1$ においては、 $\theta \ll 1$ に対して大きな値をとる。

図 1-7 に示すように関数 $f(\theta, \beta) = (1 - \beta \cos \theta)^{-1}$ は $\theta = 0$ で最大値 $(1 - \beta)^{-1}$ をとる。したがって、 $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ と近似すれば、 $(1 - \beta \cos \theta)^{-1}$ が最大値の半分 $(2(1 - \beta))^{-1}$ をとる θ_{HM} の値は、

$$\left\{ 1 - \beta \left(1 - \frac{\theta_{HM}^2}{2} \right) \right\}^{-1} = \frac{1}{2(1 - \beta)}$$

$$\therefore \theta_{HM} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)} \quad (1-26)$$

となる。図 1-8 に示すように高エネルギーの電子が放射するパワーの角度分布の半値半幅 θ_{HM} は非常に狭いことがわかる。

$\beta \approx 1$ と近似すれば、 θ_{HM} は、

$$\theta_{HM} \approx 1/\gamma \quad (1-27)$$

となり、放射パワーが $\theta = 0$ を中心とした $\pm \theta_{HM} \approx 2/\gamma$ の範囲に集中することがわかる。この $1/\gamma$ という形から、高エネルギー電子を扱う放射光施設で得られるシンクロトロン光が高い指向性を持つことが理解できる。

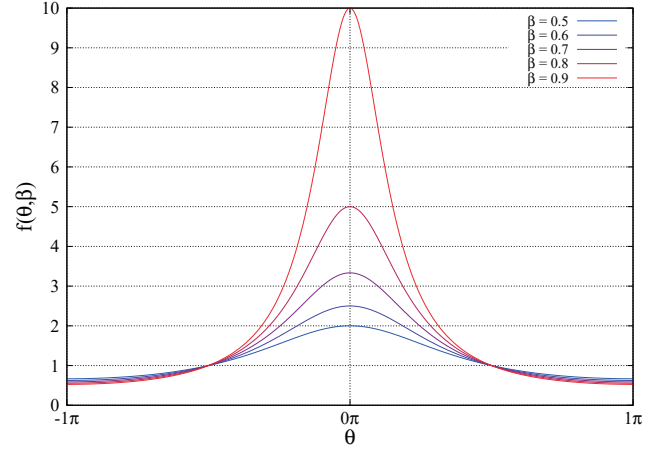


図 1-7. 関数 $f(\theta, \beta) = 1/(1 - \beta \cos \theta)$ を $\beta = 0.5, 0.9$ の場合に θ に対してプロットした。分布は $\theta = 0$ においてピークを持つことがわかる。

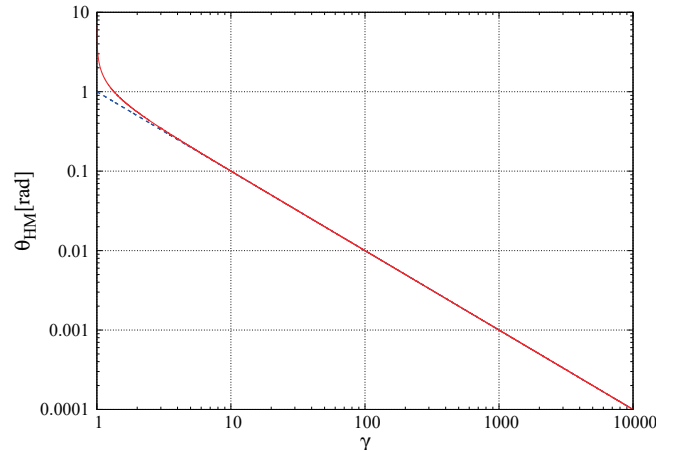


図 1-8. 式 (1-26) を γ に対してプロットした。 γ が増大するにつれて $1/\gamma$ の線（破線）に漸近する。

1.3. 運動する点電荷による放射場のスペクトル - Jackson 表式

本節では、運動する点電荷による放射場のスペクトルの表式を導出する。

これまでに、一つの点電荷が作る電磁場の式 (1-4) および式 (1-5) と、点電荷が単位時間加速されたときに、観測点の無限小の立体角を通り抜ける放射電場のエネルギー量を表す式 (1-13) を導いた。このローレンツ不変量である放射電場のエネルギー量を放射光と定義する。実際の観測点には電荷が通過する際の電磁パルスも感知される場合もあるが、ここでは求めたいものはここで決めた放射光成分であるとして、それ以外の場合を考える必要が出た時には別途考慮するものとする。

一つの電子が無限遠方からやってきて放射を行い、また無限遠方へ去っていく（点電荷と観測点との間の距離 R_0 や角度 θ は時間とともに変化する）場合を考える。このとき、観測位置での単位立体角を通過するエネルギーは、式 (1-13) を時間積分して、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \epsilon_0 c R_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_{\text{ret},a}|^2 dt \quad (1-28)$$

となる。なお、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ の関係を用いた。上式中の遅延電場の加速電場成分 $\mathbf{E}_{\text{ret},a} \equiv \mathbf{E}_a$ （これ以降 ret の付記を省略する）のフーリエ変換および逆変換はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \\ \mathbf{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (1-29)$$

と書ける。これを式 (1-28) に代入すると、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \epsilon_0 c R_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right\} dt \quad (1-30)$$

となる。被積分関数である遅延電場のフーリエ係数部分 $\mathbf{E}_\omega$ は時間 t の関数ではなく、 $\mathbf{E}_a(t)$ は角周波数 ω の関数ではないことに注意して、式 (1-29) を使えば、

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) e^{-i\omega t} dt \right\} d\omega \\ &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega^* d\omega \\ &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega \end{aligned} \quad (1-31)$$

となる。よって、電子が一回通過する際に観測者が受信する放射の全パワースペクトルは、単位立体角あたり、

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} = \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2 \quad (1-32)$$

と表される (Ref. [3] の式 (2.10))。ここで、式 (1-5) および (1-2)、(1-3) を使えば、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} e^{i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} dt' \end{aligned} \quad (1-33)$$

と得られる。なお、括弧部は t' の記載を省略して表記している。

点電荷が生成する放射場スペクトルの Jackson 表式は、式 (1-33) に遠方場近似を適用して得られる。

観測点と光源とが十分に離れている場合を考える。このとき、 $R(t')$ および $\mathbf{n}(t')$ はともに定数ベクトルと見ることができる。今、それぞれ、

$$\begin{aligned} R(t') &= R_0 \\ \mathbf{n}(t') &= \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (1-34)$$

と書く。

このとき、Ref. [1] 14 章 14.5 節 (14.66) 式、

$$\left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t'} \quad (1-35)$$

を用いて式 (1-33) を部分積分すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= \frac{i e \omega}{4\pi\epsilon_0 c R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t')) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left\{ i\omega \left(t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right) \right\} dt' \end{aligned} \quad (1-36)$$

を得る (Ref. [3] の式 (4.19))。ここで、 $\mathbf{r}(t')$ は図 1-3 に示される、粒子の近傍にとった原点からの粒子の位置ベクトルである。式 (1-36) は放射光の計算でよく使われる表式であり、円軌道を描く電子が放出するシンクロトロン光の計算に用いられる。

2. アンジュレータ

2.1. 任意の加速運動で電子が生成する放射光の光子数への換算

さて、本講義は「挿入光源」をタイトルに選んだ。挿入光源には大きく 2 種類あり、「アンジュレータ」と「ウィグラー」と呼ぶ。いずれも周期性を持った磁場分布を作

り出す装置で、磁場分布の中で振動しながら進む電子が、周期的な光源点から発せられるシンクロトロン光を作り出す。

「アンジュレータ」は、複数の光源点から発せられた光を干渉させることで高い輝度の光を作り出すための装置である。

それでは、アンジュレータ光について考えていくこととする。

電子が一回通過する際に観測者が受信する単位立体角あたりの放射の全パワースペクトルは、前節 1.3. の式 (1-32) および (1-33) によって与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2 \\ \mathbf{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} e^{i\omega \left(t' + \frac{R(t')}{c} \right)} dt' \end{aligned} \quad (2-1)$$

$\mathbf{E}_\omega$ は、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\omega &= \left(\frac{2c\epsilon_0 R_0}{e} \right) \mathbf{E}_\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{R_0}{R} \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} e^{i\omega \left(t' + \frac{R(t')}{c} \right)} dt' \end{aligned} \quad (2-2)$$

2.2. 軌道が有限の周期性を持つ場合のスペクトル - Kim 表式

アンジュレータで得られる、電子軌道が周期 T 、周期数 N_u の周期性を持って干渉するシンクロトロン光を表わす式 (2-2) を導く。

まず、放射電場 (式 (1-5) の加速度成分) を変換して、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{4\pi\epsilon_0 c R_0}{e} \right) \mathbf{E}_{\text{ret},a}(\mathbf{x}, t) \\ &= \left[\frac{R_0}{R} \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \end{aligned} \quad (2-3)$$

とする。今、電子軌道が有限の周期性を持つことから、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T) = \dots = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + N_u T) \quad (2-4)$$

が成り立つ。これを使って式 (2-2) は (観測者の時間 t で書いて)、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{N_u T} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_T^{2T} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt + \\ &\quad \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{(N_u-1)T}^{N_u T} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T) e^{i\omega(t+T)} dt + \\ &\quad \dots + \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + (N_u - 1)T) e^{i\omega(t+(N_u-1)T)} dt \\ &= \frac{1 - e^{iN_u \omega T}}{1 - e^{i\omega T}} \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2-5)$$

と、放射電場の 1 周期分のフーリエ変換を使ってあらわせる。

上式より、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ \mathbf{F}_\omega &= \frac{1 - e^{iN_u \omega T}}{1 - e^{i\omega T}} \mathbf{f}_\omega \end{aligned} \quad (2-6)$$

の関係があることがわかる。

また、

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_\omega|^2 &= \mathbf{F}_\omega \cdot \mathbf{F}_\omega^* \\ &= |\mathbf{f}_\omega|^2 \frac{1 - \cos(N_u \omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \\ &= N_u^2 |\mathbf{f}_\omega|^2 \left[\frac{\sin(N_u \omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2-7)$$

と得られる。さらにここで、基本角周波数 $\omega_1 = 2\pi/T$ という量を導入し、 ω_1 を使って、

$$|\mathbf{F}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{f}_\omega|^2 \left[\frac{\sin(\pi N_u \omega / \omega_1)}{\sin(\pi \omega / \omega_1)} \right]^2 \quad (2-8)$$

と書き換えることができる。この式を、アンジュレータ放射スペクトルの Kim の表式と呼ぶ。

この表式からアンジュレータ放射のスペクトル特性を理解できる。電子軌道に依存する $\mathbf{f}_\omega$ の形よりも、軌道が持つ周期性が重要となる。通常のアンジュレータでは、アンジュレータの持つ正弦形の磁場の 1 周期分の軌道が $\mathbf{f}_\omega$ を決めているだけであって、別の軌道を描かせてもスペクトルとしては似たものとなる。 $\mathbf{f}_\omega$ の形は偏光特性や高調波を取り扱う際に重要となる。

2.3. アンジュレータ放射スペクトルのフーリエ級数展開による表記

アンジュレータのように放射に周期性がある場合には、フーリエ級数に展開することで n 次光近傍の様子がわかる。この解析手法は、特に、アンジュレータ放射のベッセル関数表示のために重要となる。本節では、フーリエ級数を使った解析手法を紹介する。

単位時間あたり単位立体角あたりのエネルギーの流れは、以下に示す式 (1-13) のように得られた。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} &= \frac{R_0^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{\text{ret,a}}(\mathbf{x}, t)|^2 \\ &= \epsilon_0 c R_0^2 |\mathbf{E}_{\text{ret,a}}(\mathbf{x}, t)|^2 \end{aligned} \quad (2-9)$$

今、あらたに $\mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t)$ を以下のように定義して、単位時間あたり単位立体角あたりのエネルギーの流れの式を書き換えれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R_0}{R} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \\ \frac{d}{d\Omega} \frac{dW}{dt} &= \epsilon_0 c |\mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t)|^2 \end{aligned} \quad (2-10)$$

と書ける。

観測者が受信した放射場が周期 T を持つときには、 $\mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t)$ を式 (C-6) にしたがってフーリエ級数展開できて、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\mathbf{f}_{\text{FS},k} e^{-ik\omega_1 t}\} \\ \mathbf{f}_{\text{FS},k} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) e^{ik\omega_1 t} dt \\ \omega_1 &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (2-11)$$

これは時間 t が $-T/2 \sim T/2$ の 1 周期分に対する計算になっている (Ref. [3] の式 (4.4))。有限長さのアンジュレータを考える場合には、アンジュレータ長さ分のステップ関数がかかったものを考えて、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) \cdot G(\mathbf{x}, t) \\ \text{where, } \begin{cases} G(t) = 1, & \left(-N_u \frac{T}{2} \leq t \leq N_u \frac{T}{2}\right) \\ G(t) = 0, & \left(t \leq -N_u \frac{T}{2} \text{ or } N_u \frac{T}{2} \leq t\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (2-12)$$

として計算をすればよい。 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$ のスペクトル分解を

求めるために、フーリエ変換すれば、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} e^{-i\omega t} d\omega \\ \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2-13)$$

となる。これを使って、式 (1-32) から、

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} = \frac{\epsilon_0 c}{\pi} |\hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega}|^2 \quad (2-14)$$

となる。

$\hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) \cdot G(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS},k} e^{-ik\omega_1 t} \right\} e^{i\omega t} dt \end{aligned} \quad (2-15)$$

となり、今、 $\mathbf{f}_k$ は t の関数ではないことに注意して、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS},k} \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} e^{i(\omega - k\omega_1)t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS},k} \cdot \frac{\exp\{i(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\} - \exp\{-i(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\}}{i(\omega - k\omega_1)} \end{aligned} \quad (2-16)$$

ここで、オイラーの公式を使って、

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\right\} - \exp\left\{-i(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\right\} \\ &= 2i \sin\left\{(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\right\} \end{aligned} \quad (2-17)$$

となるから、

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS},k} \frac{2 \sin\left\{(\omega - k\omega_1) \frac{N_u T}{2}\right\}}{(\omega - k\omega_1)} \quad (2-18)$$

さらに、 $T = 2\pi/\omega_1$ を使って、

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{FS},\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_{\text{FS},k} \frac{2 \sin\left\{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k\right)\right\}}{\omega_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k\right)} \quad (2-19)$$

と得られる。式 (2-11) の $f_{\text{FS},k}$ を式 (2-19) に代入して得られる $\hat{f}_{\text{FS},\omega}$ の 2 乗を式 (2-14) に代入すれば、光強度を求めることができる。しかしながら、その場合、式 (2-19) の中の無限和が 2 乗される。通常は、各次数のピークが周波数空間内で十分に離れているとして無限和の 2 乗（無限和の掛け算）を計算して生まれるクロスタームを落とす。すると、

$$\left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \right]_k = \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_1^2} N_u^2 |f_{\text{FS},k}|^2 \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \quad (2-20)$$

と書いて (Ref. [3] の式 (4.14))、アンジュレータ放射スペクトルのフーリエ級数表記が得られる。

ここで、角括弧部分の、

$$\delta_{N_u} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \quad (2-21)$$

がアンジュレータスペクトルの形を特徴付けている。なお、 $k\omega_1 = \omega_k$ 、 $\omega - \omega_k = \delta\omega_k$ として、 $\omega/\omega_1 - k = \delta\omega_k/\omega_1$ と書き換えれば、

$$\delta_{N_u} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\delta\omega_k}{\omega_1} \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\delta\omega_k}{\omega_1} \right)} \right]^2 \quad (2-22)$$

と変形できる。

また、 $|f_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t)|^2$ の電子の運動 1 周期 T あたりの平均は、式 (2-11) を使って、

$$\begin{aligned} & \langle |f_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{\text{FS}}^2(\mathbf{x}, t) dt \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_{\text{FS},n}|^2 \end{aligned} \quad (2-23)$$

となり、電子が 1 周期運動する間に観測者が k 次光成分の光の全エネルギーは、式 (2-10) より、

$$\frac{dW_k}{d\Omega} = 2\epsilon_0 c T |f_{\text{FS},k}|^2 \quad (k \geq 1) \quad (2-24)$$

と得られる。これを $h k \omega_1$ で割れば、 k 次光の光子数が計算できる。

2.4. アンジュレータ放射スペクトル分布の特徴

式 (2-22) から、アンジュレータ放射のスペクトルにどのような特徴があるのかを読み取ってみる。Ref. [9] に述

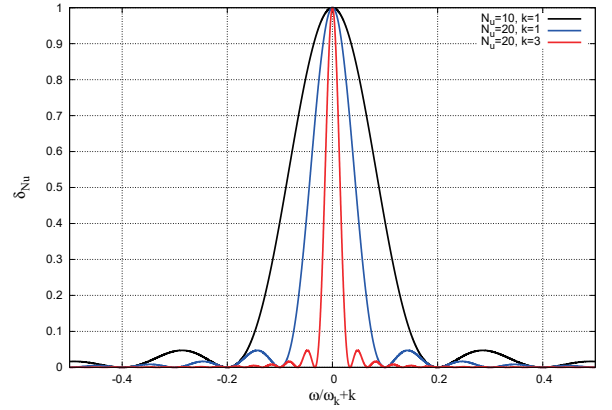


図 2-1. 磁石周期数 N_u と次数 k を変えて $\delta_{N_u}(\omega/\omega_1)$ をプロット。 N_u および k の増加に伴ってスペクトルが狭帯域化される。

べられているように、強度がピーク値の半分の値になるのは $N_u \delta\omega_k / \omega_1 \approx 1/2$ (位相 0 と π でピークを迎える半分の位相) を満たすときとすれば、 $\omega_k = k\omega_1$ を使って半値全幅は $\delta\omega_k / \omega_k \approx 1/(k N_u)$ と、Ref. [9] の式 (14.19) と同様の式が得られる。

すなわち、アンジュレータ放射のスペクトル分布 $\delta_{N_u}(\omega/\omega_1)$ の幅は $1/(k N_u)$ 程度であり、図 2-1 に示すように磁石周期数 N_u が増えれば、そして次数 k が高くなればスペクトルの幅も狭くなり単色化されることがわかる。

なお、 $\delta\omega_k$ を ω_1 で割った場合と ω_k で割った場合とで異なることに注意を要する。 ω_k で割ることで、高次では分母が大きくなり、小さな値になる。

2.5. アンジュレータ磁場中の電子の運動

本節では、Ref. [10] および [11] にしたがって、アンジュレータ中の電子の運動に関して議論する。

以下、縦磁場が水平偏向した放射光を発生するリニアアシンジュレータ (添字 L を付す) についての議論をすすめるが、縦磁場と横磁場によって円偏光を発生するヘリカルアンジュレータ (添字 H を付す) の場合も以下のような磁場を使って計算できる。それぞれの磁場は、例えば以下のように表せる (例えば Ref. [12] の p.166)。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L &= (0, -B_0 \sin k_u z, 0) \\ \mathbf{B}_H &= (B_0 \cos k_u z, -B_0 \sin k_u z, 0) \end{aligned} \quad (2-25)$$

ここで、 B_0 は磁場の振幅成分、 λ_u は磁場周期長であり、関係式

$$k_u = 2\pi/\lambda_u \quad (2-26)$$

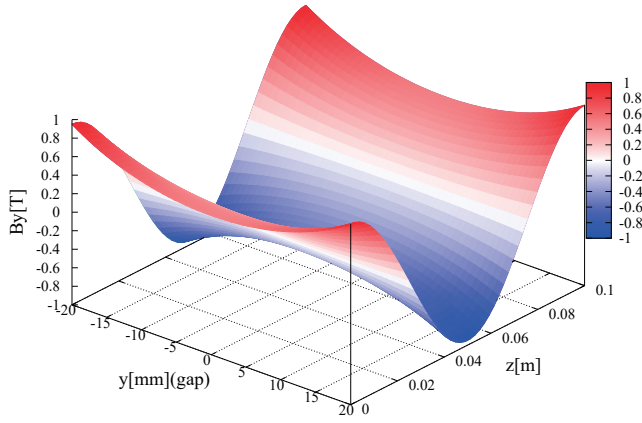


図 2-2. リニアアンジュレータの垂直磁場 $B_{yL}(y, z) = B_0 \cosh(k_u y) \cos(k_u z)$ の垂直-アンジュレータ軸方向 (yz) 面内の分布。 $\lambda_u = 0.1$ m、 $B_0 = 0.5$ T ($K \simeq 4.7$)。

を満たす。なお、Ref. [3]3.1 節の冒頭で述べられているように、また、Ref. [12]p.171 の式 (3.12) に示されているように、式 (2-25) の磁場分布 $\mathbf{B}_L$ は Maxwell 方程式を満足しない。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L \\ = (0, B_0 \cosh(k_u y) \cos(k_u z), -B_0 \sinh(k_u y) \sin(k_u z)) \end{aligned} \quad (2-27)$$

などといった形 [12] [13] [14] をとった方がよいが、図 2-2 および 2-3 に示すように $y=0$ のごく近傍では $\cosh(k_u y) = 1$ および $\sinh(k_u y) = 0$ としても十分良い近似となる。

また、Ref. [3]3.2 節の冒頭に述べられているように、式 (2-25) の $\mathbf{B}_H$ の表式は B_x および B_y の振幅が等しいヘリカルアンジュレータ [15] のものであるが、 B_x および B_y の振幅が異なるものを楕円アンジュレータ [16] と呼ぶ。

アンジュレータ磁場中での電子の運動を知るためには、以下の運動方程式を解く必要がある。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2-28)$$

ここで、 $\mathbf{p}$ は電子の運動量であり、関係式

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (2-29)$$

を満たす。ここで、 m は電子の静止質量、 $\mathbf{v}$ は電子の速度ベクトルである。また、電子のローレンツ因子 γ は、以下の関係式を満たす。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2-30)$$

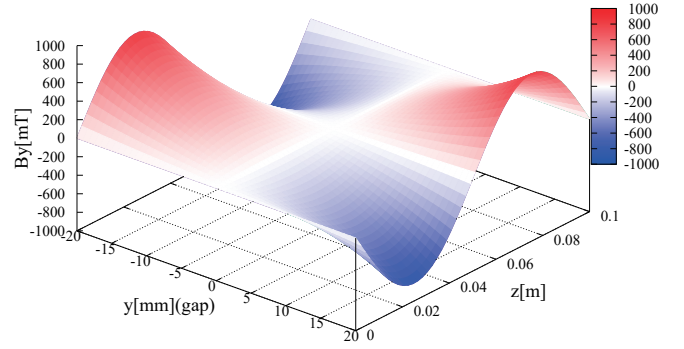


図 2-3. リニアアンジュレータのアンジュレータ軸方向磁場 $B_{zL}(y, z) = -B_0 \sinh(k_u y) \sin(k_u z)$ の yz 面内の分布。 $\lambda_u = 0.1$ m、 $B_0 = 0.5$ T ($K \simeq 4.7$)。

アンジュレータ磁場中で電子の運動エネルギーすなわちローレンツ因子が変化しないと仮定すれば（放射によるエネルギー減衰を無視すれば）、

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2-31)$$

と書ける。式 (2-31) の各成分は、

$$\begin{aligned} m\gamma \frac{dv_x}{dt} &= -e(v_y B_z - v_z B_y) \\ m\gamma \frac{dv_y}{dt} &= -e(v_z B_x - v_x B_z) \\ m\gamma \frac{dv_z}{dt} &= -e(v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned} \quad (2-32)$$

となる。一般的な静磁場中の電子の運動は、例えば 4 次の Runge-Kutta 法などを用いれば数値的に解くことができる。

リニアアンジュレータでは電子が運動するアンジュレータ軸近傍では y （垂直）成分のみが存在して、 x 成分の運動方程式は、

$$m\gamma \frac{dv_x}{dt} = ev_z B_y \quad (2-33)$$

となる。さらに、 $v_z = dz/dt$ すなわち $v_z dt = dz$ であることから、

$$m\gamma \frac{dv_x}{dz} = eB_y \quad (2-34)$$

を得る。これを z に関して積分すると、電子の x 方向の速度成分は、

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{e}{\gamma mc} \int^z B_y(z') dz' \\ &\equiv \frac{e}{\gamma mc} I_{1y}(z) \end{aligned} \quad (2-35)$$

となる。すなわち、磁場の1次積分 (BS と呼ぶ) に比例していることがわかる。ここで I_{1y} は垂直磁場の1次積分である。なお、さらに z に関して積分すると、電子の x 方向の位置が得られて、

$$\begin{aligned} x_e &= \int^z dz' \beta_x \\ &= \frac{e}{\gamma mc} \int^z dz' \int^z B_y(z'') dz'' \\ &\equiv \frac{e}{\gamma mc} I_{2y}(z) \end{aligned} \quad (2-36)$$

ここで、 I_{2y} は垂直磁場の2次積分 (BS2 と呼ぶ) である。さらに式 (2-25) および (2-26) を代入すれば、

$$\begin{aligned} \beta_{xL} &= \frac{e}{\gamma mc} \int^z B_y(z') dz' \\ &= \frac{e}{\gamma mc} \int^z (-B_0 \sin k_u z') dz' \\ &= -\frac{eB_0}{\gamma mc} \int^z (\sin k_u z') dz' \\ &= \frac{eB_0 \lambda_u}{2\pi mc \gamma} (\cos k_u z) \\ &= \frac{K}{\gamma} \cos k_u z \end{aligned} \quad (2-37)$$

を得る。ここで、 K を偏向定数や K 値などと呼び、

$$K \equiv \frac{eB_0 \lambda_u}{2\pi mc} (\approx 93.37 B_0 \lambda_u) \quad (2-38)$$

と定義する。なお、アンジュレータの場合、一般に $K \lesssim 1$ であり、 $K \gtrsim 10$ のものをウィグラーと呼ぶ [3]。また、式 (2-25) では無限に一樣に存在する磁場が記述されているが、実際のアンジュレータ磁場は無限に一樣には存在していない。そこでここでは、アンジュレータ磁場が無視できる程低い十分に遠い地点から積分すると考える事で式 (2-37) の変形途中で積分定数を0とした。

同様にして、

$$\beta_{yL} = 0 \quad (2-39)$$

を得る。式 (2-37) および (2-39) から、電子の横方向の速さの最大値が K/γ であることがわかる。KEK-PF のエネルギー $\varepsilon = 2.5$ [GeV] ($\gamma \simeq 4892$) の電子ビームが $B_0 = 0.5$ [T]、 $\lambda_u = 0.1$ [m] のアンジュレータ磁場で曲げた場合、 $K \simeq 4.7$ になり、電子の横方向の速さの最大値は $K/\gamma \simeq 0.95 \times 10^{-3}$ [/c] と、小さな値であることがわかる。

なお、Ref. [3] の式 (3.5) に示されているように、アンジュレータ内の電子の運動の最大振れ角が K/γ であることもわかる。上記のパラメータでは、電子の最大振れ角は $K/\gamma \simeq 0.95$ [mrad] となり、軌道の振れ角も非常に

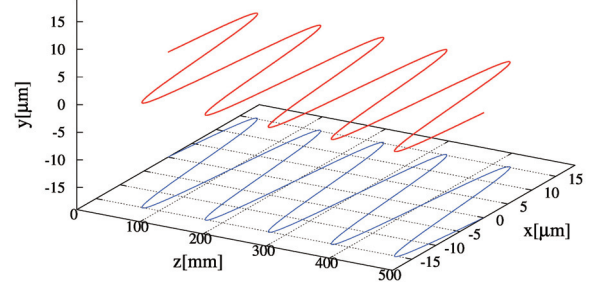


図 2-4. リニアアンジュレータの磁場中での電子軌道。
 $\lambda_u = 0.1$ [m]、 $B_0 = 0.5$ [T] ($K \simeq 4.7$)、 $\varepsilon = 2.5$ [GeV]
($\gamma \simeq 4892$)。

小さいことがわかる。このことと後に触れる横方向の軌道のずれの小ささから、アンジュレータではその放射の大部分が前方に集中するために光の干渉効果が強く得られるという特徴を理解することができる。

式 (2-36) に式 (2-37)、式 (2-39) を代入すれば、 z に対する x_e および y_e が計算できて、

$$x_{eL} = \int^z dz' \beta_x = \frac{K}{\gamma} \frac{1}{k_u} \sin k_u z \quad (2-40)$$

$$y_{eL} = 0 \quad (2-41)$$

となる。

図 2-4 に、リニアアンジュレータ磁場中の電子軌道を z に対してプロットした (z に対してプロットしていることに注意)。

前述したように γ は磁場中で変化しない。式 (2-30) を使って、

$$\begin{aligned} \beta_z &= \sqrt{\beta^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} - \beta_x^2 - \beta_y^2} \end{aligned} \quad (2-42)$$

これを $\gamma \gg 1$ 、 $\beta_x^2 \ll 1$ 、 $\beta_y^2 \ll 1$ として近似すれば、

$$\beta_z \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\beta_x^2 + \beta_y^2}{2} \quad (2-43)$$

となる。これに式 (2-37)、(2-39) を代入すれば、

$$\beta_{zL} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + K^2 \cos^2 k_u z) \quad (2-44)$$

を得る。あるいは、

$$\beta_{zL} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2k_u z \quad (2-45)$$

と変形すれば、リニアアンジュレータ内での電子の z 方向の速さは平均値 $\langle v_{zL} \rangle / c = 1 - 1/(2\gamma^2) - K^2/(4\gamma^2)$ のまわりで振動することがわかる。

リニアアンジュレータ磁場中の電子軌道を時間 t で表す。今、

$$\begin{aligned} z &= \langle v_{zL} \rangle t \\ \omega_0 &= k_u \langle v_{zL} \rangle \end{aligned} \quad (2-46)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \beta_{xL} &= \frac{K}{\gamma} \cos \omega_0 t \\ \beta_{zL} &= \frac{\langle v_{zL} \rangle}{c} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (2-47)$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{aligned} x_{eL} &= \frac{Kc}{\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t \\ z_{eL} &= \langle v_{zL} \rangle t - \frac{K^2 c}{8\gamma^2 \omega_0} \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (2-48)$$

となる。図 2-5 に z 方向の等速度運動を差し引いた電子の軌道 $x_{eL}, z_{eL} - \langle v_{zL} \rangle t$ を t に対してプロットした。リニアアンジュレータ内で電子は、速さ $\langle v_{zL} \rangle$ の等速運動に xz 面内での 8 の字運動が重ね合わさった運動を行う。

リニアアンジュレータでは、この z 方向の振動があるために調和振動からずれて、放射には基本振動数とその各高調波成分があらわれることになる [3]。

2.6. アンジュレータの 1 次光

アンジュレータ内で電子は磁場により複数回曲げられ、曲げられる度にシンクロトロン光を放射する。シンクロトロン光は電子軌道の接線方向に放射されるため、電子の $v_{x,y} = v_{\perp}$ がおよそ 0 になる度に放射された光が、 z 軸方向の遠方で重なり合って到達する。

光は電子よりも早い z 方向の速度を持つため、光に対して電子は遅れる。電子から放射される光が同じ初期位相を持つのだとすれば、電子が λ_u 進む度に光の波長 λ_1 分だけ遅れるという条件を満たす場合には光を光の電場振幅が重ね合わさることになる。

すなわち、 λ_1 が、

$$\lambda_1 = \lambda_u - ct(z = \lambda_u) \quad (2-49)$$

の条件を満たす場合である。ここで、光の位相速度を c としている。

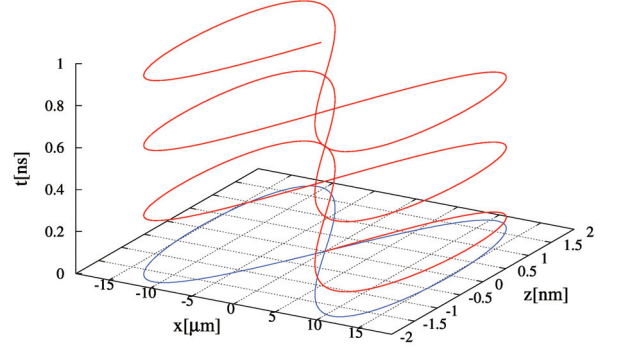


図 2-5. リニアアンジュレータの磁場中での x および z 方向の電子軌道 ($x_{eL}, z_{eL} - \langle v_{zL} \rangle t$) を時間 t に対してプロット。 $\lambda_u = 0.1$ [m]、 $B_0 = 0.5$ [T] ($K \simeq 4.7$)、 $\varepsilon = 2.5$ [GeV] ($\gamma \simeq 4892$)。

$z = \lambda_u$ における t 、すなわち電子が z 方向に λ_u 進んだ時の時間がわかれば、 λ_1 が求められる。

電子の z 方向に z の位置にいるときの時刻の関数 $t(z)$ は z と、

$$\frac{dt(z)}{dz} = \frac{1}{c\beta_z(z)} \quad (2-50)$$

の関係を持つので、これを z に関して積分すれば $t(z)$ の表式が得られる。

$$\begin{aligned} t_L(z) &= \int^z \frac{1}{c\beta_z(z')} dz' \\ &= \frac{1}{c} \int^z \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \cos^2 k_u z' \right)^{-1} dz' \end{aligned} \quad (2-51)$$

このままでは非常に複雑な表式になってしまう (Ref. [17]-p.196)。そこで被積分関数 β_z^{-1} に関して近似して、

$$\begin{aligned} t_L(z) &= \int_0^z \frac{1}{c\beta_{zL}(z')} dz' \\ &\simeq \frac{1}{c} \int_0^z \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{2\gamma^2} \cos^2 k_u z' \right) dz' \\ &= \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) z + \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \sin 2k_u z \end{aligned} \quad (2-52)$$

とする。

λ_1 を求めるために必要であった $z = \lambda_u$ における t はそれぞれ、式 (2-52) において $z = \lambda_u$ とすれば得られて、

式 (2-26) の関係を使って、

$$t_L(z = \lambda_u) \simeq \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) \lambda_u \quad (2-53)$$

となる。

よって、式 (2-49) から、

$$\begin{aligned} \lambda_{1L} &= \lambda_u - ct_L(\lambda_u) \\ &= \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-54)$$

となる。

式 (2-54) を使って式 (2-52) を書き変えると、

$$t_L(z) = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\lambda_{1L}}{\lambda_u} \right) z + \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \sin 2k_u z \quad (2-55)$$

式 (2-55) から、 $t(z)$ を、

$$t = \bar{t}(z) + \delta t(z) \quad (2-56)$$

と見れば、電子が位置 z に到達する時間 t は平均時間 $\bar{t}_{L,H}$ (n は整数) の周りで $\delta t_{L,H}$ だけ振動する。

$$\begin{aligned} \bar{t}_L(z) &= \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\lambda_{1L}}{\lambda_u} \right) z, \\ \delta t_L(z) &= \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \sin 2k_u z \end{aligned} \quad (2-57)$$

ここで、 $\delta t_L(z)$ の表式から、振動の周期が $2\lambda_u$ であることがわかる。

さて、式 (2-57) の第 1 式から、

$$\frac{d\bar{t}_L(z)}{dz} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\lambda_{1L}}{\lambda_u} \right) \quad (2-58)$$

となるから (Ref. [10]-式 (3-7))、

$$\frac{d}{dz} \{ z - c\bar{t}_L(z) \} = -\frac{\lambda_{1L}}{\lambda_u} \quad (2-59)$$

となる。

電子が距離 z を進む間に、光は距離 $c\bar{t}_{L,H}(z)$ だけ進むのだから、この式は電子の光に対する遅れの割合を表している。すなわち、電子が λ_u 進むごとに光に対して λ_{1L} だけ一定の割合で遅れていくことがわかる。

2.7. ローレンツ短縮と相対論的ドップラーシフト

では、Ref. [3]3.1 節あるいは Ref. [18]1.2 節などに述べられているように、電子から見たローレンツ短縮 (Lorentz contraction) されたアンジュレータ磁場と相対論的な電子が発する電磁波を観測者が受けるときの相対論的ドップラー効果 (Relativistic Doppler shift) という視点でアンジュレータ光を考えてみる。

本節の最後に示されるように、この 2 つの相対論的効果からそれぞれ $\sim \gamma$ だけ乗じられることによって (Ref. [18]1.2 節に述べられているように相対論的ドップラー効果では $1/(2\gamma)$)、 $\sim \gamma^2$ だけ高い周波数の光を観測者は受信することになる。

電子の観測者方向の速さが小さい時は、観測者は式 (2-46) の ω_0 の表式に一致する角周波数の光を受け取る。しかし、電子の速さが光速に近いときには、相対論的なドップラー効果により周波数が変わる。

今、式 (E-7) で表されるローレンツ短縮 (例えば、Ref. [4] の式 (2.1)) によって、アンジュレータ磁場内で電子から見たアンジュレータ波長は $1/\gamma = \sqrt{1 - (v_z/c)^2}$ 倍に短くなる。電子系 (アンジュレータ内の z 方向の電子の速さ v_z で動く系) におけるアンジュレータ波長 λ_u^* は、

$$\lambda_u^* = \lambda_u \sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c} \right)^2} \quad (2-60)$$

と表される。よって、電子系での角周波数 ω^* は、式 (2-46) の ω_0 を使って、

$$\omega^* = \frac{2\pi v_z}{\lambda_u^*} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_z}{c} \right)^2}} \quad (2-61)$$

となる。よって、光のドップラー効果の式 (E-26) を使えば、観測者と電子の運動方向との角度を θ として、静止した観測者 (静止系) から見た角周波数 ω_1 は、

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega^* \frac{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_z \cos \theta}{c}} \\ &\approx \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_z \cos \theta}{c}} \end{aligned} \quad (2-62)$$

となる (Ref. [3] の式 (3.12))。

v_z は式 (2-45) の β_{zL} および式 (2-44) から得られる。

リニアアンジュレータの v_z に関してはその振動項を無視して平均値で近似し、ヘリカルアンジュレータに対しても計算してまとめる。

$$\begin{aligned} \beta_{zL} &\approx \frac{\langle v_{zL} \rangle}{c} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \\ \beta_{zH} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{2\gamma^2} \end{aligned} \quad (2-63)$$

とし、さらに、 $\theta \ll 1$ および $\gamma^{-1} \ll 1$ として、

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{v}{c} &\approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \end{aligned} \quad (2-64)$$

と近似する。このとき、 ω_1 の表式 (2-62) の分母部分は、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v_{zL} \cos \theta}{c} &\approx 1 - \frac{\langle v_{zL} \rangle}{c} \cos \theta \\ &\approx \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \\ 1 - \frac{v_{zH} \cos \theta}{c} &\approx \frac{1}{2\gamma^2} (1 + K^2 + \theta^2 \gamma^2) \end{aligned} \quad (2-65)$$

と近似される。よって、静止した観測者（静止系）から見た角周波数 ω_1 の近似式として、式 (2-46) の ω_0 を使って、

$$\begin{aligned} \omega_{1L} &\approx \omega_0 \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \right\}^{-1} \\ \omega_{1H} &\approx \omega_0 \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} (1 + K^2 + \theta^2 \gamma^2) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2-66)$$

と得られる。したがって、リニアおよびヘリカルアンジュレータの 1 次光の波長の近似式、

$$\begin{aligned} \lambda_{1L} &= \frac{2\pi \langle v_{zL} \rangle}{\omega_{1L}} \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \\ \lambda_{1H} &= \frac{2\pi \langle v_{zH} \rangle}{\omega_{1H}} \approx \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + K^2 + \theta^2 \gamma^2) \end{aligned} \quad (2-67)$$

が得られる（Ref. [3] の式 (3.13) および式 (3.15)）。

観測者が受信する放射光スペクトルは、基本波である λ_1 とその高調波 $\lambda_k = \lambda_1/k$ によって構成され、その角度分布はすでに述べたように $\theta \ll 1$ の z 軸近傍に集中したものになる。なお、いずれの場合においても電子の運動を反映して、リニアアンジュレータの z 軸上の放射光は xz 面の直線偏光となり、ヘリカルアンジュレータでは円偏光となる。[3]

2.8. アンジュレータスペクトルの計算

第 k 次光成分の強さは $|\mathbf{f}_{\text{FS},k}|^2$ で決まり、式 (2-11) および式 (2-10) から、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{FS},k} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) e^{ik\omega_1 t} dt \\ \mathbf{f}_{\text{FS}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R_0}{R} \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \\ \text{where, } \omega_1 &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (2-68)$$

である（Ref. [3] の式 (4-16)）。

式 (1-35) を使って、式 (2-68) を変形する。 ω を $k\omega$ とすること、係数 $ik\omega$ が加かること、また、遠方場近似の適用によって $R \approx R_0$ 、また $\mathbf{n}$ が定数ベクトルとなり時

間に関する積分の外に出せることに注意して、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{FS},k} &\approx \frac{ik\omega_1 e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{T} \int_{-T'/2}^{T'/2} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}) \}_{t'} \\ &\quad \cdot \exp \left[ik\omega_1 \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \\ &= \frac{ik\omega_1 e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T'/2}^{T'/2} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}) \}_{t'} \\ &\quad \cdot \exp \left[ik\omega_1 \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \\ &= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k) \}_{t'} \end{aligned}$$

where,

$$\mathbf{Q}_k = \int_{-T'/2}^{T'/2} \boldsymbol{\beta} \exp \left[ik\omega_1 \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \quad (2-69)$$

と得られる（Ref. [3] の式 (4-18) および式 (4-19)）。

この積分部 $\mathbf{Q}_k$ はアンジュレータ中の電子の運動から計算できる。以上より、 k 次光のスペクトルは、

1. アンジュレータ中の電子の運動 $\mathbf{r}(t')$ および $\boldsymbol{\beta}(t')$ を求める。
2. 積分部 $\mathbf{Q}_k$ を計算する。
3. $\mathbf{f}_{\text{FS},k}$ を計算する。
4. 式 (2-20) から k 次光のスペクトルを計算する。

という手順で得られることがわかる。

2.9. リニアアンジュレータの軸上放射スペクトル

今、無限の長さ（周期数）を持ったリニアアンジュレータを考える。リニアアンジュレータの磁場を式 (2-25) と同様に、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_L &= (0, -B_0 \sin k_u z, 0) \\ \text{where, } k_u &= 2\pi/\lambda_u \end{aligned} \quad (2-70)$$

とおく。このとき、すでに計算したように、アンジュレータ磁場中の電子の運動は式 (2-47) および式 (2-48) によって表される。なお、このとき電子は進行方向への等速運動に 8 字運動が合成された運動を行うことは前述のとおりである。すなわち、節 2.8. に述べた計算手順 1

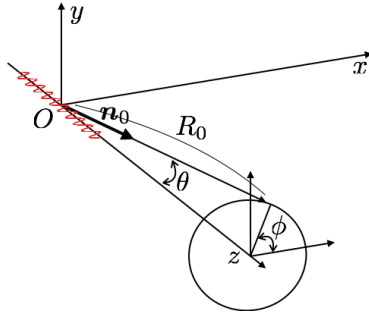


図 2-6. 遠方場近似におけるリニアアンジュレータからの放射。遠方場近似の適用により、 $R \approx R_0$ 、 $\mathbf{n} \approx \mathbf{n}_0$ 。また、式 (2-73) より、 $\mathbf{Q}_k$ は電子の速度ベクトル $\beta(t')$ と同じ方向のベクトル関数である。

の $\mathbf{r}(t')$ および $\beta(t')$ は、今、

$$\begin{aligned}\beta_{xL} &= \frac{K}{\gamma} \cos \omega_0 t \\ \beta_{zL} &= \frac{\langle v_{zL} \rangle}{c} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos 2\omega_0 t \\ r_{xL} &= \frac{Kc}{\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t \\ r_{zL} &= \langle v_{zL} \rangle t - \frac{K^2 c}{8\gamma^2 \omega_0} \sin 2\omega_0 t\end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned}\omega_0 &= k_u \langle v_{zL} \rangle \\ \frac{\langle v_{zL} \rangle}{c} &= 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \\ K &\equiv \frac{eB_0 \lambda_u}{2\pi mc}\end{aligned}\quad (2-71)$$

とできる。

今、図 2-6 のように座標を設定すると、観測者方向への単位ベクトル $\mathbf{n}_0$ は、

$$\mathbf{n}_0 = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2-72)$$

となる。

次に、節 2.8. に述べた計算手順 2 にある $\mathbf{Q}_k$ の計算を行う。式 (2-66) を使って、

$$\mathbf{Q}_k = \int_{-T'/2}^{T'/2} \beta \exp \left[ik\omega_1 \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt'$$

where,

$$\begin{aligned}T &= \delta T' \\ \delta &= \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \right\}\end{aligned}\quad (2-73)$$

$\mathbf{Q}_k$ を各成分に分けて、式 (2-71) の $\beta(t')$ の各成分を代入する。なお、 Q_{kzL} の表式内の $\gamma^{-2} (\ll 1)$ の項を落と

せば、

$$\begin{aligned}Q_{kxL} &= \frac{K}{\gamma} \int_{-T'/2}^{T'/2} \cos \omega_0 t' \exp \left[ik\omega_{1L} \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \\ Q_{kzL} &\approx \int_{-T'/2}^{T'/2} \exp \left[ik\omega_{1L} \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \\ (Q_{kyL} &= 0)\end{aligned}\quad (2-74)$$

と得られる。被積分関数の位相部分は、式 (2-71) の $\mathbf{r}(t')$ および式 (2-72) の各成分と、式 (2-66) を使って、 $\omega_{1L} = \omega_0/\delta$ とすれば、

$$\begin{aligned}ik\omega_{1L} \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} &= ik \frac{\omega_0}{\delta} \left[t' - \frac{1}{c} \left\{ \sin \theta \cos \phi \frac{Kc}{\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \theta \left(\langle v_{zL} \rangle t' - \frac{K^2 c}{8\gamma^2 \omega_0} \sin 2\omega_0 t' \right) \right\} \right] \\ &\approx ik \left[\omega_0 t' - \frac{K}{\gamma\delta} \sin \theta \cos \phi \sin \omega_0 t' \right. \\ &\quad \left. + \frac{K^2}{8\gamma^2 \delta} \cos \theta \sin 2\omega_0 t' \right] \\ \text{where, } \delta &= \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \right\}\end{aligned}\quad (2-75)$$

と得られる。ただし、式 (2-65) より、 $(1 - \langle v_{zL} \rangle / c) \cos \theta \approx \delta$ であることを使った。さらにここで、 $\sin \theta \approx \theta$ および $\cos \theta \approx 1$ と近似すれば、

$$\begin{aligned}ik\omega_{1L} \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} &\approx ik \left(\omega_0 t' - \frac{K}{\gamma\delta} \theta \cos \phi \sin \omega_0 t' + \frac{K^2}{8\gamma^2 \delta} \sin 2\omega_0 t' \right) \\ &= ik (\omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' + B \sin 2\omega_0 t')\end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned}A &= \frac{K}{\gamma\delta} \theta \cos \phi = \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2} \\ B &= \frac{K^2}{8\gamma^2 \delta} = \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2)}\end{aligned}\quad (2-76)$$

となる。よって、式 (2-74) の Q_{kxL} および Q_{kzL} は、

$$\begin{aligned}
Q_{kxL} &= \frac{K}{\gamma} \int_{-T'/2}^{T'/2} \cos \omega_0 t' \\
&\quad \cdot \exp [ik (\omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' + B \sin 2\omega_0 t')] dt' \\
Q_{kzL} &= \int_{-T'/2}^{T'/2} \exp [ik (\omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' + B \sin 2\omega_0 t')] dt' \\
\text{where,} \\
A &= \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2} \\
B &= \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2)} \quad (2-77)
\end{aligned}$$

と書ける。

今、 Q_{kxL} および Q_{kzL} の積分部を整数次ベッセル関数を使って表す。

式 (B-7) および式 (B-1)、式 (B-2) から、ベッセル関数 $J_n(x)$ とその母関数 $g(u, x)$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \\
g(u, x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) u^n \\
g(u, x) &= \exp\left(\frac{xu}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2u}\right) \quad (2-78)
\end{aligned}$$

と表される (Ref. [3] の式 (4.27)、式 (4.28)、式 (4.29) に少し合わせて変数を置き換えた)。式 (2-78) の第 2、3 式で、 $u = \exp(iy)$ とおけば、

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \{\exp(iy)\}^n \\
&= \exp\left(\frac{x \exp(iy)}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2 \exp(iy)}\right) \\
\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \exp(iny) \\
&= \exp(ix \sin y) \quad (2-79)
\end{aligned}$$

となる。これを使って、式 (2-77) の Q_{kxL} および Q_{kzL} の被積分部の指数関数部を書き換える。

$$\begin{aligned}
\exp\{-ikA \sin(\omega_0 t')\} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA) \exp(-iq\omega_0 t') \\
\exp\{ikB \sin(2\omega_0 t')\} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \exp(ip2\omega_0 t') \\
&\quad (2-80)
\end{aligned}$$

と書けるから、

$$\begin{aligned}
&\exp [ik (\omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' + B \sin 2\omega_0 t')] \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_q(kA) J_p(kB) \exp\{i\omega_0 t' (k - q + 2p)\} \\
&\quad (2-81)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
Q_{kxL} &= \frac{K}{\gamma} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_q(kA) J_p(kB) \\
&\quad \cdot \int_{-T'/2}^{T'/2} \cos \omega_0 t' \exp\{i\omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \\
Q_{kzL} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_q(kA) J_p(kB) \\
&\quad \cdot \int_{-T'/2}^{T'/2} \exp\{i\omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \\
&\quad (2-82)
\end{aligned}$$

となる (Ref. [3] の式 (4.30) および (4.31))。上式の積分部を計算するために、 $\omega_0 t' = \psi$ とおけば、 $\omega_0 dt' = d\psi$ となるから、

$$\begin{aligned}
&\int_{-T'/2}^{T'/2} \cos(\omega_0 t') \exp\{i\omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \\
&= \int_{-T'/2}^{T'/2} \left[\cos(\omega_0 t') \cos\{\omega_0 t' (k - q + 2p)\} \right. \\
&\quad \left. + i \cos(\omega_0 t') \sin\{\omega_0 t' (k - q + 2p)\} \right] dt' \\
&= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(\psi) \cos\{(k - q + 2p)\psi\} \right. \\
&\quad \left. + i \cos(\psi) \sin\{(k - q + 2p)\psi\} \right] d\psi \quad (2-83)
\end{aligned}$$

今、 $(k - q + 2p)$ の各変数はいずれも整数であることから全体として整数であり、

$$\begin{aligned}
&\int_{-T'/2}^{T'/2} \cos(\omega_0 t') \exp\{i\omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} & (k - q + 2p = \pm 1 \text{ or } q = 2p + k \pm 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\
&\quad (2-84)
\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
& \int_{-T'/2}^{T'/2} \exp\{i\omega_0 t'(k-q+2p)\} dt' \\
&= \frac{1}{\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos\{(k-q+2p)\psi\} \right. \\
&\quad \left. + i \sin\{(k-q+2p)\psi\} \right] d\psi \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} & (k-q+2p=0 \text{ or } q=2p+k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2-85}$$

である。よって、

$$S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \tag{2-86}$$

とおけば、式 (2-82) より、

$$Q_{kxL} = \frac{\pi K}{\omega_0 \gamma} (S_{-1} + S_1), \quad Q_{kzL} = \frac{2\pi}{\omega_0} S_0$$

$$(Q_{kyL} = 0)$$

where,

$$\begin{aligned}
S_j &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \\
A &= \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2}, \quad B = \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2)}
\end{aligned} \tag{2-87}$$

となる。

次に、節 2.8. に述べた計算手順 3 にある $\mathbf{f}_{\text{FS},k}$ の計算を行う。式 (2-69) に示されているように、

$$\mathbf{f}_{\text{FS},k} = \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k) \}_{t'} \tag{2-88}$$

であった。図 2-6 より、 $\mathbf{f}_{\text{FS},k}$ 内のベクトル $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)$ の向きは、 $\mathbf{n}_0$ に垂直である。そこで、図 2-7 に示すように $\mathbf{n}_0$ に垂直な単位ベクトル $\mathbf{m}_\perp$ および $\mathbf{m}_\parallel$ を導入する。

今、 $\mathbf{m}_\parallel$ を xz 平面に平行にとれば (y 成分の大きさが 0 で、 $\mathbf{n}_0$ との内積が 0 で、大きさが 1、かつ $\theta = \phi = 0$ において x 成分が正となるように定める)、式 (2-72) から、

$$\mathbf{m}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \sin^2 \phi}} (\cos \theta, 0, -\sin \theta \cos \phi) \tag{2-89}$$

である。さらに遠方場近似のもとで、 $\theta \ll 1$ と近似すれば ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ と近似し、 θ^2 の項を 0 と近似する)、

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_0 &\approx (\theta \cos \phi, \theta \sin \phi, 1) \\
\mathbf{m}_\parallel &\approx (1, 0, -\theta \cos \phi) \\
\mathbf{m}_\perp &\approx (0, 1, -\theta \sin \phi)
\end{aligned} \tag{2-90}$$

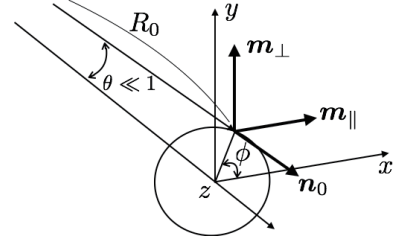


図 2-7. 遠方場近似におけるリニアアンジュレータからの放射。遠方場近似の適用により、 $R \approx R_0$ 、 $\mathbf{n} \approx \mathbf{n}_0$ 、 $\theta \ll 1$ と近似できる。これらの近似のもと、 $\mathbf{n}_0$ に垂直な単位ベクトル $\mathbf{m}_\perp$ および $\mathbf{m}_\parallel$ を導入する (式 (2-90))。なお、 $\mathbf{Q}_k$ は電子の速度ベクトル $\beta(t')$ と同じ方向のベクトル関数であり、今、 $\beta(t')$ は xz 面内のベクトルである。

となる。

よって、 $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)$ の $\mathbf{m}_\parallel$ および $\mathbf{m}_\perp$ 方向の成分を計算すれば、

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)]_\parallel \\
&= [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)] \cdot \mathbf{m}_\parallel \\
&\approx -Q_{kxL} + \theta \cos \phi Q_{kzL} \\
& [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)]_\perp \\
&= [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)] \cdot \mathbf{m}_\perp \\
&\approx -Q_{kyL} + \theta \sin \phi Q_{kzL} \\
&= \theta \sin \phi Q_{kzL}
\end{aligned} \tag{2-91}$$

なお、計算の途中で現れる θ^2 の項をその都度落とした。よって、式 (2-87) および式 (2-91) から、

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\text{FS},kL\parallel} &= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_{kL}) \}_{t'\parallel} \\
&= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c \omega_0} \left\{ -\frac{K}{\gamma} (S_{-1} + S_1) + 2\theta \cos \phi S_0 \right\} \\
\mathbf{f}_{\text{FS},kL\perp} &= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_{kL}) \}_{t'\perp} \\
&= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c \omega_0} 2\pi \theta \sin \phi S_0
\end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned}
S_j &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \\
A &= \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2} \\
B &= \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2)}
\end{aligned} \tag{2-92}$$

と得られる。

最後に、節 2.8. に述べた計算手順 4 に述べたように、式 (2-20) に (2-92) を代入すれば、リニアアンジュレータの放射スペクトルが計算できる。

今、アンジュレータ軸上、すなわち $\theta = 0$ の z 軸上のスペクトルを計算する。

式 (2-92) において $\theta = 0$ とすれば、 $f_{\text{FS},kL\perp} = 0$ となることは明らかである。これは、アンジュレータ軸上の電場ベクトルが xz 面内のみ存在すること、すなわちリニアアンジュレータからの放射光のアンジュレータ軸上の成分が線偏光していることを意味する。

また、 $f_{\text{FS},kL\parallel}$ 中の $S_{\pm 1}$ は、

$$S_{\pm 1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p \left(k \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \right) J_{2p+k\pm 1}(0) \quad (2-93)$$

と計算される。なお、図 B-1 に示すように、 $J_0(0) = 1$ および $J_{n\geq 1}(0) = 0$ であるから、 $2p + k \pm 1 = 0$ 、すなわち $k = -2p \mp 1$ とできる。 p は整数であったから、 k は奇数であることを意味する。重複するが、 k が偶数の時にはベッセル関数が 0 となって $f_{\text{FS},kL\parallel} = 0$ となる。すなわち、アンジュレータ軸上には高調波は奇数次のみで、偶数次の光は存在しないことがわかる。

アンジュレータ軸上には偶数次の高調波が存在しないという性質は、Ref. [19]p.582 では、アンジュレータ軸上で観測した場合に現れる電子の運動の対称性由来することが解説されている。対称性を持った周期運動をフーリエ級数展開すれば、偶数次の項は消えて奇数次の項のみが残ることが確かめられる（例えば、Ref. [20]p.55）。また、Ref. [19]Fig.4.4 に示されているように、軸外から見れば周期性が失われるため、偶数次の高次成分が軸外に現れる。

よって、 $p = (-k \mp 1)/2$ として（総和記号が消えることに注意）、

$$S_{\pm 1} = J_{(-k\mp 1)/2} \left(k \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \right) \quad (2-94)$$

と書ける。また、式 (2-66) の ω_{1L} の表式に $\theta = 0$ を代入すれば、

$$\omega_{1L} \approx \frac{2\omega_0\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} \quad (2-95)$$

と得られる。したがって、これらの式と関係式 $\lambda_u = 2\pi c/\omega_0$ を使って、リニアアンジュレータの放射のアン

ジュレータ軸上 ($\theta = 0$) の k 次成分に対して、

$$\begin{aligned} f_{\text{FS},kL\parallel} &= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c \omega_0} \left\{ -\frac{K}{\gamma} (S_{-1} + S_1) \right\} \\ &= -\frac{ike\gamma^3}{\epsilon_0 \lambda_u} \frac{K}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \\ &\quad \cdot \{J_{(-k+1)/2}(k\xi) + J_{(-k-1)/2}(k\xi)\} \\ f_{\text{FS},kL\perp} &= 0 \\ \text{where, } \xi &= \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \end{aligned} \quad (2-96)$$

となる。

ところで、式 (B-9) で表されるベッセル関数の性質 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ を使えば、

$$\begin{aligned} J_{(-k+1)/2}(k\xi) &= (-1)^{(k-1)/2} J_{(k-1)/2}(k\xi) \\ J_{(-k-1)/2}(k\xi) &= (-1)^{(k+1)/2} J_{(k+1)/2}(k\xi) \\ \therefore \{J_{(-k+1)/2}(k\xi) + J_{(-k-1)/2}(k\xi)\}^2 \\ &= \{J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi)\}^2 \end{aligned} \quad (2-97)$$

となる。したがって、リニアアンジュレータの軸上 ($\theta = 0$) において、 k 次の直線偏光した放射光スペクトル表式は式 (2-20) から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{kL,\theta=0,\parallel} &= \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_{1L}^2} N_u^2 |f_{\text{FS},kL\parallel}|^2 \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \\ &= \frac{2e^2 \gamma^2 N_u^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\frac{K^2}{2}}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \\ &\quad \cdot k^2 \{J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi)\}^2 \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \\ \text{where, } \xi &= \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \end{aligned} \quad (2-98)$$

と得られる。ただし、 k は奇数である。図 2-8 に、1 次、3 次、5 次それぞれのスペクトルを上式を用いてプロットした。なお、磁石周期長 $\lambda_u = 0.04$ [m]、磁場振幅 $B_0 = 0.267839$ [T] ($K \sim 1$)、磁石周期数 $N_u = 100$ とした。したがって、奇数次のすべての光を重ね合わ

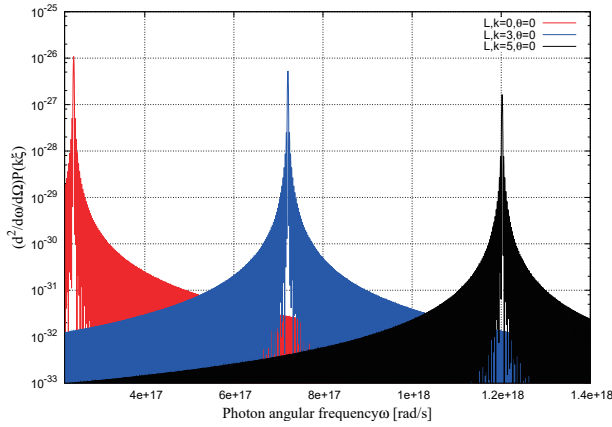


図 2-8. 式 (2-98) で表される遠方場近似におけるリニアアンジュレータの軸上で観測される 1 次および 3 次、5 次それぞれの放射スペクトルを左から順に実線でプロットした。なお、電子のエネルギーを 1 [GeV]、磁石周期長 $\lambda_u = 0.04$ [m]、磁場振幅 $B_0 = 0.267839$ [T] ($K \sim 1$)、磁石周期数 $N_u = 100$ とした。

せた、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{kL, \theta=0, ||} &= \frac{2e^2 \gamma^2 N_u^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\frac{K^2}{2}}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \\ &\sum_{k=1, \text{odd}}^{\infty} k^2 \left\{ J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi) \right\}^2 \\ &\cdot \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \\ \text{where, } \xi &= \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \end{aligned} \quad (2-99)$$

が、リニアアンジュレータの軸上 ($\theta = 0$) において得られる放射光スペクトルである。なお、このとき、 k 次光の波長は式 (2-67) より、

$$\lambda_{k, L, \theta=0} = k \lambda_{1, L, \theta=0} \approx k \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (2-100)$$

である。

3. ビーム

本章では、Ref. [3] の 6 章にならって、多数の電子の集団である電子ビームによる放射の表式を導入する。

まずはじめに、多数の電子からの放射を考え、その後、それをもとに自発放射とコヒーレント放射 (Coherent

Synchrotron Radiation / CSR) との違いについて考える [21]。なお、CSR とは、電子蓄積リングにおいてその可能性が F.C. Michel [22] によって 1982 年に示唆され、その後、1989 年に T. Nakazato ら [23] によって東北大学の 180 MeV ライナックを用いて世界で初めて観測された光である。位相情報を測定することの可能な光を得るために、あるいは、電子蓄積リングのように天文学的な数の電子からの放射強度を飛躍的に高める手段として注目されている。

そして、ビームの様々なパラメータを放射光の表式に取り入れることで、実効的な放射光の強度の表式を導入する。

3.1. 多数の電子からの放射に関する一般論 / 光の重ね合わせ

これまで、1 個の電子が作り出すシンクロトロン光を考えてきた。ここでは、Ref. [3] の 6.1 節にならって $N \gg 1$ 個の電子からの放射を考える。

まず、 N_e 個の電子が全て、光子エネルギー $\hbar\omega$ の単色平面波 $\sin(kz - \omega t - \phi_j)$ を放射したと考える。ただし、 ϕ_j は j 番目の電子からの平面波の初期位相である。空間の光の電場 $\mathbf{E}(z, t)$ を平面波の重ね合わせで表現すれば、

$$\mathbf{E}(z, t) = \sum_{j=1}^{N_e} E_j \sin(kz - \omega t - \phi_j) \quad (3-1)$$

となる。光の初期位相が揃っている (コヒーレント) 場合、 $\phi_i = 0$ 、 $\theta = kz - \omega t$ とおけば、重ね合わせた光の強度 $\mathbf{E}^2(z, t)$ は、

$$\mathbf{E}^2(z, t) = \left(\sum_{j=1}^{N_e} E_j \right)^2 \sin^2 \theta \quad (3-2)$$

となる。今、全ての光の振幅が等しいとすれば、 $E_j = E_0$ とできて、 $\mathbf{E}^2(z, t)$ の 1 周期あたりの平均は、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^2(z, t) \rangle &= \left(\sum_{j=1}^{N_e} E_0 \right)^2 \langle \sin^2 \theta \rangle \\ &= N_e^2 \frac{E_0^2}{2} \end{aligned} \quad (3-3)$$

となる。

各光の初期位相がばらばらな (インコヒーレント) 場

合には、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^2(z, t) &= \sum_{j=1}^{N_e} E_j \sin(\theta - \phi_j) \sum_{n=1}^{N_e} E_n \sin(\theta - \phi_n) \\
&= \sin^2 \theta \sum_{j=1}^{N_e} E_j \cos \phi_j \sum_{n=1}^{N_e} E_n \cos \phi_n \\
&\quad + \cos^2 \theta \sum_{j=1}^{N_e} E_j \sin \phi_j \sum_{n=1}^{N_e} E_n \sin \phi_n \\
&\quad - 2 \sin \theta \cos \theta \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{n=1}^{N_e} E_j E_n \cos \phi_j \sin \phi_n
\end{aligned} \tag{3-4}$$

となり、この場合の 1 周期あたりの平均は、前述の $\langle \sin^2 \theta \rangle = \langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$ であることと、 $\langle \cos \theta \sin \theta \rangle = 0$ であること [17] を使って、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E}^2(z, t) \rangle &= \frac{\langle A \rangle}{2} + \frac{\langle B \rangle}{2} \\
\text{where,} \\
\langle A \rangle &= \sum_{j(=n)} E_j^2 \cos^2 \phi_j + \sum_{j \neq n} E_j E_n \cos \phi_j \cos \phi_n \\
\langle B \rangle &= \sum_{j(=n)} E_j^2 \sin^2 \phi_j + \sum_{j \neq n} E_j E_n \sin \phi_j \sin \phi_n \\
(1 \leq j \leq N_e, 1 \leq n \leq N_e), \theta &= kz - \omega t \tag{3-5}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 ϕ_j および ϕ_n は 0 から 2π の一様な値をとるものとして平均すれば、 $\langle A \rangle$ および $\langle B \rangle$ の第 2 項はいずれも 0 となる。したがって、コヒーレントな場合と同様に $E_j = E_0$ とすれば、

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = \frac{1}{2} \sum_j E_j^2 = N_e \frac{E_0^2}{2} \tag{3-6}$$

と得られる。1 個の電子による光の強度は $N_e = 1$ を代入して、 $E_0^2/2$ と得られる。さらに、式 (3-6) と (3-3) それぞれの式から、インコヒーレントな放射では放射強度が電子数 N_e に比例する ($I \propto N_e$) のに対して、コヒーレントな放射では N^2 に比例する ($I \propto N_e^2$) ことがわかる。

光がインコヒーレントかコヒーレントかを定める条件は何であろうか。

電子ビームが直線状に分布している場合を考え、角度発散は 0 であるとする。今、 N 個の電子によって構成される電子ビームが光の波長程度よりも十分に狭い領域に集まっているとすれば、光から見た電子の集団はあたかも大きな電荷 $-eN_e$ を持った一つの荷電粒子に見える。

1 個の電子が出す放射光の強度は式 (1-5) の $\mathbf{E}_{\text{ret},a}$ で表される放射電場の 2 乗で与えられる。すなわち、電荷

量の 2 乗に比例することがわかる。今の場合、一つの荷電粒子の電荷の 2 乗、すなわち、 $I \propto (-eN_e)^2 \propto N_e^2$ となることがわかる。これは、コヒーレントな放射であることを意味する。

では、電子ビームの進行方向の長さ（バンチ長）が光の波長よりもずっと長くなるとどうなるだろう。電子がバラバラに分布していることを反映して、各電子から生まれた個々の光の初期位相はバラバラになる。これは、上述したインコヒーレントな放射を計算した場合の状況そのものである。

PF リングの場合、蓄積電子のバンチ長はおよそ 2 [cm] である。したがって、赤外 ($\lesssim 1$ [mm]) から可視 ($\lesssim 1$ [μm])、そして X 線 ($\lesssim 1$ [nm]) に至る大部分の波長域で放射光はインコヒーレントであることがわかる。

以上の議論から、挿入光源のインコヒーレントな放射光の強度を実用的な単位で求めてみることにする。

式 (2-2) を使って、式 (2-1) を書きかえれば、単位立体角、 $\Delta\omega$ 、 I [A] あたりの光子数 $d^2 N_p / (d\omega d\Omega)$ は、インコヒーレント放射では放射強度が電子数 $N_e = I/e$ の 1 乗倍となることに気をつけて、

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 N_p}{d\omega d\Omega} [\text{photons/sec/rad}^2] \\
&= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \\
&= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} |\mathbf{F}_\omega|^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{I}{e} \tag{3-7}
\end{aligned}$$

となる。さらに $I = 1$ とすれば、1 [A] あたりの量が得られる。

なお、 $\hbar = h/(2\pi)$ で、 h はプランク定数である。この式 (3-7) は Ref. [19] の式 (2.24) (spectral flux) に一致する。 $dN_p/d\Omega = d^2 \mathcal{F}/d\Omega^2$ としたとき、 $\mathcal{F}$ を spectral flux という [19]。

また、通常は相対バンド幅 $\Delta\omega/\omega = 0.1$ [%] にとり、例えば、リニアアンジュレータ軸上の k (k は奇数) 次光では、式 (2-98) を使って (単位に mrad などを使って

いることに注意)、

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 N_{\text{PB}}}{d\omega d\Omega} [\text{photons/sec/A/mrad}^2/0.1\% \text{b.w.}] \\
&= \frac{1}{e\hbar} \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{kL, \theta=0, \parallel} \\
&\approx 4.555 \times 10^7 \gamma^2 N_u^2 K^2 \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)^{-2} k^2 \\
&\quad \cdot \left\{ J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi) \right\}^2 \\
&\quad \cdot \left[\frac{\sin \left\{ \pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \right\}}{\pi N_u \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right]^2 \\
&\quad \text{where, } \xi = \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \quad (3-8)
\end{aligned}$$

となる。なお、 $I = 1$ として 1 [A] あたりに変換した。さらに、ビーム電流値の単位を I [mA]、電子のエネルギー γ を $\mathcal{E}$ [GeV] に、バンド幅を 1 [%] と変換したうえで、正弦関数の周期性から整数 n に対して $\{\sin(\theta - n\pi)\}^2 = \sin^2(\theta)$ であることに注意して式 (3-8) と同様に変形すると、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_0 [\text{photons/sec/mrad}^2/1\% \text{b.w.}] \\
&= \frac{d^2 N_{\text{PB}}}{d\omega d\Omega} \\
&\approx 1.744 \times 10^{12} I [\text{mA}] (\mathcal{E} [\text{GeV}])^2 \\
&\quad \cdot k^2 K^2 \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)^{-2} \\
&\quad \cdot \left\{ J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi) \right\}^2 \\
&\quad \cdot \frac{\sin^2 \left(\pi N_u \frac{\omega}{\omega_1} \right)}{\pi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)^2} \\
&\quad \text{where, } \xi = \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \quad (3-9)
\end{aligned}$$

と、Ref. [24] の式 (3-1) を得る。また、式 (3-9) に 10^3 を掛けてビーム電流 I の単位を mA から A に変換するとともに、 10^{-1} をかけて 1%b.w. を 0.1%b.w. へと変換すれば、Ref. [25] の式 (8) に一致する。なお、 $\mathcal{D}_0$ を自然光束角密度と呼ぶ [25]。さらに、式 (3-8) において、 $\omega = k\omega_1$ とすれば各次数のピーク値に対する表式が得られる。このとき、sinc 関数の性質から $\text{sinc}(0) = 1$ で

あるから、

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2 N_{\text{PB}}}{d\omega d\Omega} \right)_k [\text{photons/sec/mrad}^2/1\% \text{b.w.}] \\
&\approx 1.744 \times 10^{12} I [\text{mA}] (\mathcal{E} [\text{GeV}])^2 \\
&\quad \cdot N_u^2 k^2 K^2 \left(1 + \frac{K^2}{2} \right)^{-2} \\
&\quad \cdot \left\{ J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi) \right\}^2 \\
&\quad \text{where, } \xi = \frac{K^2}{4(1 + K^2/2)} \quad (3-10)
\end{aligned}$$

となる。これは、Ref. [24] の式 (3-4) に一致する。

3.2. 実効的な放射光の強度

実際の電子ビームは、有限の大きさ、有限の角度発散を持っている (Ref. [26] の 2.1 節など)。このような量を考慮した挿入光源からの放射強度を考える。

今、リニアアンジュレータの軸上での放射を考える。このとき、 k 次光の波長は、例えば式 (2-67) から、

$$\lambda_{kL} \approx k \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \quad (3-11)$$

であるから、電子ビームの角度広がりから大きな影響を受けることがわかる。

Ref. [24] の式 (3-6) に示されているように、電子蓄積リング内の電子ビームの角度分散は Gauss 分布に従う。よって、標準偏差を使って、水平方向の横方向ビームサイズを σ_{ex} 、垂直方向の横方向ビームサイズを σ_{ey} 、そして、水平方向のビーム発散角を σ'_{ex} 、垂直方向のビーム発散角を σ'_{ey} と表すことができる。

実効的なスペクトルは $dP/d\Omega_{kL, \theta=0, \parallel}$ と例えば Ref. [24] の式 (3-6) に示される電子ビームの角度分散関数とを θ に関して畳み込みすることで求めることができる。

今、アンジュレータ軸上放射に注目して $\theta \approx 0$ とする。このとき、本稿の座標軸の設定から (例えば式 (2-72))、 $x' = dx/dz =$ 電子ビームの角度分散関数」を以下の $f(\theta, \phi)$ のように表す。したがって、 k 次光 (ただし k は奇数) の成分を重ね合わせて、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{eff}} \\
&= \sum_{k=1, \text{odd}}^{\infty} \int f(\theta', \phi') \left(\frac{d^2 P(\omega, \theta', \phi')}{d\omega d\Omega'} \right)_k d\Omega' \\
&\quad \text{where,} \\
&\quad f(\theta', \phi') \approx \frac{1}{2\pi\sigma'_{ex}\sigma'_{ey}} \exp \left\{ -\frac{\theta'^2}{2\sigma'^2_{ex}} \cos^2 \phi' - \frac{\theta'^2}{2\sigma'^2_{ey}} \sin^2 \phi' \right\} \\
&\quad d\Omega' \approx \theta' d\theta' d\phi' \quad (3-12)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\sin \theta \approx \theta$ と近似して得られる。

電子ビームの角度発散が大きくなるにつれ、スペクトルは長波長側にテールを引く。

実際に式 (3-12) を使ってスペクトルを計算することは大変である。実用上は各高調波のピーク値を見積もることができれば十分であることが多い [3]。

3.3. 光子ビームのエミッタンス

放射光の輝度の計算、あるいは放射光に含まれるコヒーレントな光の割合を知るためには、光子ビームのエミッタンスという概念を知る必要がある。Ref. [8] の 2.2.2.B 節 p.53 の記述に従って、光子ビームのエミッタンスを導出する。

エミッタンスがゼロの電子ビームから出た放射光も光子である以上、Heisenberg 不確定性原理が成り立ち、その位置と運動量は同時には決められず位相空間においてある有限のサイズ以下にはならない。不確定性原理は、

$$\delta p_x \delta x = \frac{\hbar}{2} \quad (3-13)$$

という関係式で表される。ここで、等号はガウス分布の場合に成り立つ。ところで、光子の運動量の大きさは波数 k によって一意に決まり、 $p = \hbar k$ で与えられる。すなわち、式 (3-13) 中の δp_x は、運動量ベクトル $\mathbf{p}$ の x 軸への射影成分を意味し、光子の運動量ベクトル (波数ベクトル) と x 軸との成す角度を x' とすれば、 $\delta p_x = \hbar k \sin(x')$ で与えられる。

ところで、光の波数 (あるいは波長) は無限時間のパルス長を持つ光を使うことで単一波数 (波長) を選ぶことが可能である (光のエネルギーがプランク定数 $\hbar$ を単位とする離散的な値であることを考えるとイメージしやすい)。

すなわち、運動量の幅 δp_x は角度 x' に幅があると考える必要があり、 $\delta p_x = \hbar k \delta x'$ とすればよい。したがって、光子ビームの分布をガウス分布であるとすれば (等号の成立条件)、式 (3-13) より光子ビームのエミッタンス (あるいは光子の固有エミッタンス Ref. [27] とも言う) $\varepsilon_p = \delta x' \delta x$ は、

$$\begin{aligned} \hbar k \delta x' \delta x &= \frac{\hbar}{2} \\ \therefore \varepsilon_p [\pi \text{m} \cdot \text{rad}] &= \frac{\lambda}{4\pi} \end{aligned} \quad (3-14)$$

と得られる。

なお、Ref. [28] や Ref. [29] では、スリット位置での光の強度分布がガウス分布であると仮定して、光の回折効果 (Fraunhofer Diffraction) から光子の固有エミッタ

ンス ε_p を求めている (Ref. [29] の式 (42) や Ref. [27] の節 3.4 など)。元をたどれば不確定性原理に行き着く。

挿入光源の場合、放射の角度分布をガウス分布で近似して、式 (3-14) の $\delta x'$ を自然角度発散 σ'_p [25]、

$$\sigma'_p \approx \sqrt{\frac{\lambda}{N_u \lambda_u}} \quad (3-15)$$

ととり、式 (3-14) および式 (3-15) から、自然光源サイズ σ_p [25] は、

$$\sigma_p \approx \frac{\sqrt{N_u \lambda_u \lambda}}{4\pi} \quad (3-16)$$

となる。

3.4. 放射光の強度計算

放射光の強度を計算する際にまず最初に気をつけたい事は、我々が最初に得られる放射光強度は全光束 $\mathcal{F}$ [photons/sec/0.1%b.w.] ではなく自然光束角密度 $\mathcal{D}_0$ [photons/sec/mrad²/0.1%b.w.] であるということである。この点に気をつけながら、以下に種々の強度の計算手順を示す。

広がりのない (ゼロエミッタンス) 電子ビームが挿入光源から単位時間に全立体角に放射する光子数は、式 (3-9) などと表される自然光束角密度 $\mathcal{D}_0$ [photons/sec/mrad²/0.1%b.w.] [25] を用いて (単位は文献によって様々)、

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\text{photons/sec/0.1\%b.w.}] &= 2\pi \sigma_p'^2 \mathcal{D}_0 \\ &= 2\pi \sigma_p'^2 \left(\frac{d^2 N_{\text{pB}}}{d\omega d\Omega} \right) \end{aligned} \quad (3-17)$$

とかけて、 $\mathcal{F}$ を全光束 (photon flux) [25] と呼ぶ。また、以下の $\mathcal{B}_0$ を、

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\mathcal{D}_0}{2\pi \sigma_p^2} \quad (3-18)$$

を自然輝度 [25] と呼ぶ。

現実の電子ビームに対して、光源が持つ実効的なサイズ $\Sigma_{\text{px,py}}$ と角度発散 $\Sigma'_{\text{px,py}}$ は、電子ビームサイズ $\sigma_{x,y}$ および電子ビーム角度発散 $\sigma'_{x,y}$ の重ね合わせと考えて、

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{px,py}} &= \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_{x,y}^2} \\ \Sigma'_{\text{px,py}} &= \sqrt{\sigma_p'^2 + \sigma_{x,y}'^2} \end{aligned} \quad (3-19)$$

となる。ここで、Ref. [8]p.37 の式 (2.94,95) に示されているように、放射減衰と励起の平衡状態にある電子ビー

ムの、分散関数があるところでの広がり、

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{\beta_{x,y} \varepsilon_{x,y} + \left(\eta_{x,y} \frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} \right)^2}$$

$$\sigma'_{x,y} = \sqrt{(1 + \alpha_{x,y}^2) \frac{\varepsilon_{x,y}}{\beta_{x,y}} + \left(\eta'_{x,y} \frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} \right)^2} \quad (3-20)$$

で与えられる。なお、 $\beta_{x,y}$ はベータトロン関数、 $\alpha_{x,y}$ はアルファ関数、 $\varepsilon_{x,y}$ は電子ビームのエミッタンス、 $\eta_{x,y}$ はビームの分散関数、 $\eta'_{x,y}$ は分散関数の軌道長に対する微分係数、 $\sigma_{\mathcal{E}}$ は電子ビームのエネルギー幅である。

現実の電子ビームが挿入光源から単位時間に単位立体角に放射する光子数は、式 (3-17) および式 (3-19) を使って、

$$\mathcal{D} [\text{photons/sec/mrad}^2/0.1\% \text{b.w.}] = \frac{\mathcal{F}}{2\pi \Sigma'_{\text{px}} \Sigma'_{\text{py}}} \quad (3-21)$$

と得られる。 $\mathcal{D}$ を光束角密度という。

さらに、光束角密度 $\mathcal{D}$ を光源の単位面積あたりに換算した量 $\mathcal{B}$ を、輝度 (brilliance) と呼び、

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{D}}{2\pi \Sigma_{\text{px}} \Sigma_{\text{py}}} \quad (3-22)$$

で表される。上式から、電子ビームのエミッタンスが低いほど高い輝度の放射光が得られることがわかる。

4. 偏向電磁石

4.1. 偏向電磁石からの放射

本節では、Ref. [19] の 3 章や Ref. [3] の 5.1 節などになって電子蓄積リングの偏向電磁石部からの放射を計算してみる。

偏向電磁石の静磁場の磁束密度を $\mathbf{B}_{\text{BM}} = (0, B_0, 0)$ とおけば、この静磁場中での電子の運動を知るには、以下の運動方程式を解けばよい。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\text{where, } t' = t' + \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}}{c} \quad (4-1)$$

ここで、 m は電子の静止質量、 $\mathbf{v}$ は電子の速度ベクトル、 $\mathbf{p}$ は電子の運動量ベクトル、 γ は電子のローレンツ因子である。また、 t' は遅延時間である。なお、今、観測者は光原点から十分に遠方にいるものとして (遠方場近似を適用する)、粒子の位置ベクトル $\mathbf{r}$ から観測者へ

の方向の単位ベクトル $\mathbf{n}$ を図 1-3 に示したのと同様に原点から観測者への定数ベクトル $\mathbf{n}_0$ で近似する。粒子磁場中で電子の運動エネルギーが変化しないと仮定すれば (放射によるエネルギー減衰を無視すれば)、

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt'} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4-2)$$

と書ける。このとき、式 (4-2) の各成分は、

$$m\gamma \frac{dv_x}{dt'} = -e(v_y B_z - v_z B_y)$$

$$m\gamma \frac{dv_y}{dt'} = -e(v_z B_x - v_x B_z)$$

$$m\gamma \frac{dv_z}{dt'} = -e(v_x B_y - v_y B_x) \quad (4-3)$$

となり、 $\mathbf{B}_{\text{BM}} = (0, B_0, 0)$ を代入すれば、

$$m\gamma \frac{dv_x}{dt'} = ev_z B_0$$

$$m\gamma \frac{dv_y}{dt'} = 0$$

$$m\gamma \frac{dv_z}{dt'} = -ev_x B_0 \quad (4-4)$$

となる。すなわち、 $v_y = v_{y0}$ で一定である。 v_x および v_z を t で微分すれば、

$$m\gamma \frac{d^2 v_x}{dt'^2} = eB_0 \frac{dv_z}{dt'} = -\frac{e^2 B_0^2}{m\gamma} v_x$$

$$m\gamma \frac{d^2 v_z}{dt'^2} = -eB_0 \frac{dv_x}{dt'} = -\frac{e^2 B_0^2}{m\gamma} v_z \quad (4-5)$$

と変形できる。これは単振動の方程式であり、 $\omega_\rho = eB_0/(\gamma m)$ において、 $v_{x,z} = \cos(\omega_\rho t')$ or $\sin(\omega_\rho t')$ である。今、 v_x の一般解を $v_x = a_1 \cos(\omega_\rho t') + a_2 \sin(\omega_\rho t')$ とすれば、式 (4-4) より $v_z = -a_1 \sin(\omega_\rho t') + a_2 \cos(\omega_\rho t')$ となる。

今、図 4-1 に合わせて速度に関する初期条件を決めて、 $t' = 0$ において $\mathbf{v}(0) = v_0(0, 0, 1)$ と選べば、 $a_1 = 0$ および $a_2 = v_0$ を得るから、 $v_x = v_0 \sin(\omega_\rho t')$ および $v_z = v_0 \cos(\omega_\rho t')$ となる。したがって、粒子の速度は、

$$\mathbf{v}(t') = v_0 (\sin(\omega_\rho t'), 0, \cos(\omega_\rho t'))$$

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \beta_0 (\sin(\omega_\rho t'), 0, \cos(\omega_\rho t'))$$

$$\omega_\rho = \frac{eB_0}{\gamma m} \quad (4-6)$$

となり、上式を時間積分すれば、

$$\mathbf{r}_x(t') = -\frac{v_0}{\omega_\rho} \cos(\omega_\rho t') + a_1$$

$$\mathbf{r}_y(t') = a_2$$

$$\mathbf{r}_z(t') = \frac{v_0}{\omega_\rho} \sin(\omega_\rho t') + a_3$$

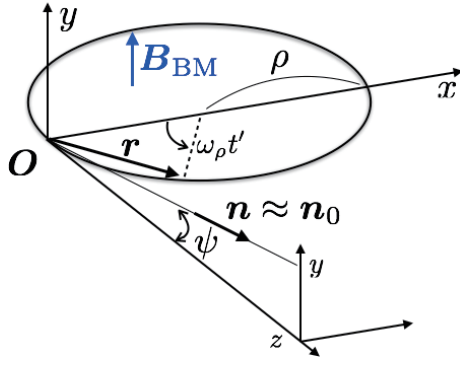


図 4-1. 偏向電磁石部での電子の軌道 [19]。観測者の位置を yz 面内にとる。

となる。

図 4-1 に合わせて位置に関する初期条件を決めて、 $t' = 0$ において $\mathbf{r}(0) = \rho(0, 0, 0)$ と選べば、 $a_1 = v_0/\omega_\rho$ 、 $a_2 = 0$ 、 $a_3 = 0$ となり、

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t') &= \frac{v_0}{\omega_\rho} (1 - \cos(\omega_\rho t'), 0, \sin(\omega_\rho t')) \\ &= \rho (1 - \cos(\omega_\rho t'), 0, \sin(\omega_\rho t'))\end{aligned}\quad (4-7)$$

となる。

今、 $v_0 \approx c$ とすれば、式 (4-6) より、

$$\rho = \frac{v_0}{\omega_\rho} \approx \frac{c}{\omega_\rho}\quad (4-8)$$

また、式 (4-6) より、

$$\rho = \frac{\gamma m v_0}{e B_0} \approx \frac{\gamma m c}{e B_0} \approx \frac{3.3 \epsilon [\text{GeV}]}{B_0 [\text{T}]}\quad (4-9)$$

となる。ここで、式 (4-1) の第 2 式を使って式 (4-9) から、

$$B\rho = \frac{\gamma m v_0}{e} = \frac{p}{e}\quad (4-10)$$

の関係が得られる。この、運動量を電荷で割った量 $B\rho$ は magnetic rigidity と呼ばれ、しばしば使われる。電子 (粒子の質量と電荷) のエネルギーによって一意に決まり、相対論的電子では $v_0 \sim c$ と近似して計算できる。例えば、2.5 [GeV] (PF リング) では $\sim 8.34 [\text{T m}]$ となる。

観測者の位置を図 4-1 に示すように yz 面内にとれば、

$$\mathbf{n}_0 = (0, \sin \psi, \cos \psi)\quad (4-11)$$

となるから、式 (4-1) 内の時間 t と遅延時間 t' との間の関係式は、

$$t' = t' + \frac{\rho}{c} \cos \psi \sin(\omega_\rho t')\quad (4-12)$$

と書き換えられる。なお、運動の周期に関して、 $T = T'$ である。

これらの関係を使って、遠方場近似のもとで、節 2.8. の計算手順を踏めば、偏向電磁石からの放射光のスペクトルが得られる。このとき、式 (2-69) で表される $\mathbf{f}_{\text{FS},k}$ および $\mathbf{Q}_k$ の表式内の ω_1 は ω_ρ に変わり、

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{FS},k} &= \frac{ik\omega_\rho^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)\}_{t'} \\ \mathbf{Q}_k &= \int_{-T'/2}^{T'/2} \beta \exp \left[ik\omega_\rho \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} \right] dt' \\ \text{where, } k &= \frac{\omega}{\omega_\rho}\end{aligned}\quad (4-13)$$

となる。

今、

$$\begin{aligned}\eta &= \omega_\rho t' \\ (d\eta &= \omega_\rho dt', -T'/2 \leq t' \leq T'/2 \rightarrow -\pi \leq \eta \leq \pi) \\ \xi &= k \frac{v_0}{c} \cos \psi = k\beta_0 \cos \psi\end{aligned}\quad (4-14)$$

とおけば (Ref. [3] の式 (5.10))、式 (4-6) で表される $\beta(t')$ は、

$$\beta(t') = \beta_0 (\sin \eta, 0, \cos \eta)\quad (4-15)$$

となり、また、式 (4-11)、式 (4-7)、式 (4-8) (ただし以下の第 2 式の右辺第 2 式において式 (4-8) の等式を使っていることに注意) を使って、

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t') &= \frac{\rho}{k} \frac{c}{v_0} \xi \sin \eta \\ \therefore ik\omega_\rho \left\{ t' - \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')}{c} \right\} &= i \{ k\eta - \xi \sin \eta \}\end{aligned}\quad (4-16)$$

であるから、

$$\begin{aligned}Q_{kx} &= \frac{\beta_0}{\omega_\rho} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \eta \exp \{ i(k\eta - \xi \sin \eta) \} d\eta \\ Q_{ky} &= 0 \\ Q_{kz} &= \frac{\beta_0}{\omega_\rho} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \eta \exp \{ i(k\eta - \xi \sin \eta) \} d\eta \\ \text{where, } \eta &= \omega_\rho t', \quad \xi = k\beta_0 \cos \psi\end{aligned}\quad (4-17)$$

となる。

これらの式に式 (B-24) および式 (B-25) の関係を使えば、ベッセル関数を用いた表式に変換できて、

$$\begin{aligned}Q_{kx} &= \frac{2\pi i \beta_0}{\omega_\rho} J'_k(\xi) \\ Q_{ky} &= 0 \\ Q_{kz} &= \frac{2\pi \beta_0 k}{\omega_\rho \xi} J_k(\xi) \\ \text{where, } J'_k(\xi) &= \frac{dJ_k(\xi)}{d\xi}, \quad \eta = \omega_\rho t', \quad \xi = k\beta_0 \cos \psi\end{aligned}\quad (4-18)$$

と得られる。

次に、式 (4-13) 中の $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)$ を計算する。

ここで、図 2-7 に示すように、式 (2-90) と同様に $\mathbf{n}_0$ に垂直な 2 つの直交ベクトル $\mathbf{m}_\parallel$ および $\mathbf{m}_\perp$ を導入する。今、 $\mathbf{n}_0$ は式 (4-11) で与えられているので、

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_0 &= (0, \sin \psi, \cos \psi) \\ \mathbf{m}_\parallel &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{m}_\perp &= (0, \cos \psi, -\sin \psi)\end{aligned}\quad (4-19)$$

となり、式 (2-91) と同様に (θ をここでは ψ ととっていることに注意して)、 $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)$ の $\mathbf{m}_\parallel$ および $\mathbf{m}_\perp$ 方向の成分を計算できて、

$$\begin{aligned}[\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)]_\parallel &= -Q_{kx} \\ [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)]_\perp &= \sin \psi Q_{kz}\end{aligned}\quad (4-20)$$

となる。

以上より、式 (2-69) で表される $\mathbf{f}_{\text{FS},k}$ が計算できて、

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{FS},k\parallel} &= \frac{ik\omega_\rho^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)\}_{t'\parallel} \\ &= \frac{k\omega_\rho e \beta_0}{4\pi \epsilon_0 c} J'_k(\xi) \\ \mathbf{f}_{\text{FS},k\perp} &= \frac{ik\omega_\rho^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \{\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k)\}_{t'\perp} \\ &= \frac{ik^2 \omega_\rho e}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin \psi}{k\beta_0 \cos \psi} J_k(\xi) \\ &\approx \frac{ik\omega_\rho e}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\psi}{\beta_0} J_k(\xi) \\ \text{where, } J'_k(\xi) &= \frac{dJ_k(\xi)}{d\xi}, \quad \eta = \omega_\rho t', \quad \xi = k\beta_0 \cos \psi\end{aligned}\quad (4-21)$$

となる。ただし、 $\mathbf{f}_{\text{FS},k\perp}$ で $\sin \psi \approx \psi$ および $\cos \psi \approx 1$ と近似した。なお、今、ベッセル関数 $J_k(\xi)$ の変数 ξ に次数 k が含まれていることに注意する必要がある。図 B-1 から、この場合、ベッセル関数は原点近傍でのみ有効な値をとることが想像できる。そのため、ベッセル関数の変数としての ξ に関しては近似せずにそのまま残している。

さらに、 $\beta_0 \approx 1$ と近似すれば、

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\text{FS},k\parallel} &\approx -\frac{ik\omega_\rho e}{4\pi \epsilon_0 c} iJ'_k(\xi) = \frac{k\omega_\rho e}{4\pi \epsilon_0 c} J'_k(\xi) \\ \mathbf{f}_{\text{FS},k\perp} &\approx \frac{ik\omega_\rho e}{4\pi \epsilon_0 c} \psi J_k(\xi) \\ \text{where, } J'_k(\xi) &= \frac{dJ_k(\xi)}{d\xi}, \quad \eta = \omega_\rho t', \quad \xi = k\beta_0 \cos \psi\end{aligned}\quad (4-22)$$

と Ref. [3] の式 (5.19) および式 (5.20) が得られる。

偏向部からの k 次の放射光スペクトルの表式は (2-20) から ($N_u = 1$ として)、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{k,\psi \approx 0} &= \frac{4\pi \epsilon_0 c}{\omega_\rho^2} |\mathbf{f}_{\text{FS},k}|^2 \left[\frac{\sin \left\{ \pi \left(\frac{\omega}{\omega_\rho} - k \right) \right\}}{\pi \left(\frac{\omega}{\omega_\rho} - k \right)} \right]^2\end{aligned}\quad (4-23)$$

を計算して得られる。また、その放射エネルギーは、式 (2-24) より、

$$\frac{dW_k}{d\Omega} = 2\epsilon_0 c T \mathbf{f}_{\text{FS},k} \mathbf{f}_{\text{FS},k}^* \quad (k \geq 1) \quad (4-24)$$

から計算することができる。

さて、ここで偏向部からの放射の場合とアンジュレータ放射の場合とを比べてみることにする。

アンジュレータ放射では、 N_u 周期分揺さぶられた電子からの放射光がほぼ軸上に集中して観測者に向かう。

対して、偏向部からの放射では、観測者から見える放射光は円軌道のごく一部の領域（接線部分）から放射された光が観測者に向かう。

観測者にとって電子が加速度を受けるのは接線部のみであり、調和振動から著しくずれたものとなる [3]。したがって、円軌道放射のスペクトル形状は、そのパルス特性を反映して次数 k が高次に渡る広帯域な形状となる。例えば、 $K \sim 1$ の一般的なリニアアンジュレータでは、次数 $k = 1$ の基本波を最大とする $k < 10$ の成分が主であるが、偏向部からの放射は $k > 10^{10}$ にもおよぶ高次の成分から成る。

4.2. ベッセル関数の近似とエアリー関数

前節に述べたような偏向部からの放射が有する特徴から、円軌道放射では非常に高次の成分まで計算しなくてはならないことがわかった。

しかしながら、非常に高次のベッセル関数 $J_k(\xi)$ を計算することは容易ではない。そこで、Ref. [30] の 6 節にならって以下に述べる近似を行い、計算を容易にする。

偏向部からの放射の表式 (4-21) には、ベッセル関数が $J_k(\xi)$ あるいは $J'_k(\xi)$ という形で含まれている。これらのベッセル関数の表式を近似する。

まず、 $J_k(\xi)$ の近似を考える。 ξ は式 (4-14) で、 $\xi = k\beta_0 \cos \psi$ と定義した変数であるから、前節で述べたようにベッセル関数の変数中に次数 k が含まれていることがわかる。したがって、非常に高次の場合、 $J_k(\xi)$ は原点付近でのみ有効な値を持つ分布になることが想像できる。重複するが、前節ではこのような理由でベッセル

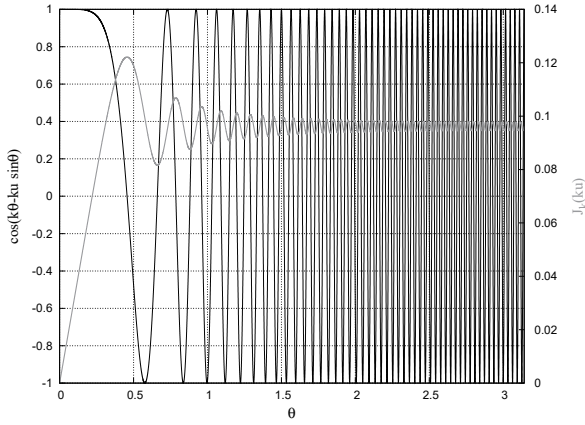


図 4-2. 式 (4-25) で表されるベッセル関数 $J_k(ku)$ (灰色実線, 右軸) および被積分関数 (黒実線, 左軸) を、 $k = 100$ および $u = 0.9999$ として、 θ に対してプロット。

関数の変数としての ξ は、それまでの導出過程で用いたような単純な近似を適用して $\xi = k\beta_0 \cos \psi \approx k$ などとしなかった。

ベッセル関数は、式 (B-23) より (n を k に、 x を $\xi = k\beta_0 \cos \psi = ku$ に置き換えて)、

$$J_k(ku) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - ku \sin \theta) d\theta$$

where, $u = \beta_0 \cos \psi$ (4-25)

とも書ける。図 4-2 および図 4-3 に次数 $k = 100$ および $k = 1000$ のそれぞれの場合に対して、 $J_k(ku)$ をその被積分関数 $\cos(k\theta - ku \sin \theta)$ とともに θ に対してプロットした。非常に高次のベッセル関数の計算では θ が大きい領域がほとんど寄与しないことがわかる。特に k が非常に大きいときは θ が 1 よりはるかに小さいときのみがほとんどの寄与をする。 $u = (v_0/c) \cos \psi$ であるから、 $v_0 \approx c$ のときには $u \approx 1$ である。

$$(1 - u)^2 \approx 0$$

$$\therefore 1 - u \approx \frac{1 - u^2}{2} \quad (4-26)$$

と近似 (Ref. [30] の式 (10)) し、さらに $\sin \theta$ を θ でべ展開すれば、式 (4-25) は、

$$J_k(ku) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \left\{ k \left(\frac{1 - u^2}{2} \theta + \frac{\theta^3}{6} \right) \right\} d\theta$$

where, $u = \beta_0 \cos \psi$ (4-27)

となる (Ref. [30] の式 (11))。なお、 $u\theta^3/6 \approx \theta^3/6$ と近似した。また、 $t \ll 1$ の領域で積分が決まるのだから、積分範囲の上限を $\pi \rightarrow \infty$ としてもよい。このように変

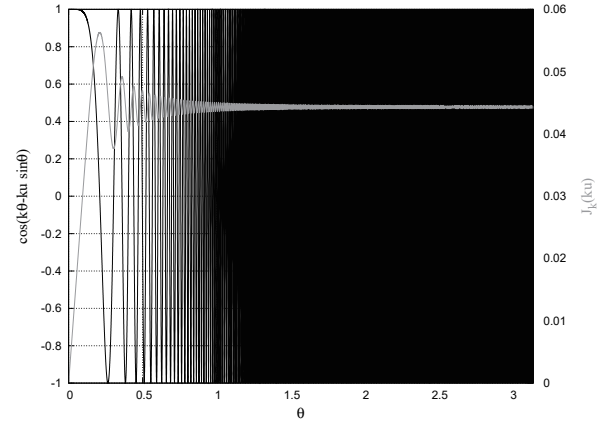


図 4-3. 式 (4-25) で表されるベッセル関数 $J_k(ku)$ (灰色実線, 右軸) および被積分関数 (黒実線, 左軸) を、 $k = 1000$ および $u = 0.9999$ として、 θ に対してプロット。図 4-2 に比べて振動部が $\theta = 0$ 側に近寄っていることがわかる。

形すると以下に述べるエアリー関数を使ってさらに書き換えることができる。

ここで、以下のようにエアリー関数 $A_i(z)$ を導入する (Ref. [30] の式 (12))。

$$(3a)^{-1/3} \pi A_i[(3a)^{-1/3} x] = \int_0^\infty \cos(at^3 + xt) dt \quad (4-28)$$

上式の $a \rightarrow k/6$ および $x \rightarrow k(1 - u^2)/2$ 、 $t \rightarrow \theta$ と置き換えれば、

$$\left(\frac{2}{k} \right)^{1/3} A_i \left[\left(\frac{k}{2} \right)^{2/3} (1 - u^2) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left\{ k \left(\frac{1 - u^2}{2} \theta + \frac{\theta^3}{6} \right) \right\} d\theta \quad (4-29)$$

となるから、これを使って式 (4-27) は、

$$J_k(ku) = \left(\frac{2}{k} \right)^{1/3} A_i \left[\left(\frac{k}{2} \right)^{2/3} (1 - u^2) \right]$$

where, $u = \beta_0 \cos \psi$ (4-30)

と書き換えることができる (Ref. [30] の式 (13))。

式 (4-28) で定義したエアリー関数 $A_i(z)$ は式 (B-51) などで表される第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ との間

には以下の関係がある。

$$\begin{aligned}
K_{\frac{1}{3}}(\zeta) &= \pi \sqrt{\frac{3}{z}} A_i(z) \\
K_{\frac{2}{3}}(\zeta) &= \pi \frac{\sqrt{3}}{z} A'_i(z) \\
\text{where, } z &= \left(\frac{3}{2}\zeta\right)^{\frac{2}{3}} \left(\text{or, } \zeta = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), \\
A'_i(z) &= \frac{d}{dz} A_i(z)
\end{aligned} \tag{4-31}$$

$z = (k/2)^{2/3}(1-u^2)$ とおけば、

$$\begin{aligned}
A_i \left[\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (1-u^2) \right] \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \\
A'_i \left[\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (1-u^2) \right] \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (1-u^2) K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \\
\text{where, } \zeta &= \frac{k}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4-32}$$

である。式 (4-30) は、式 (4-32) を用いて、

$$\begin{aligned}
J_k(ku) &= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} (1-u^2)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \\
\text{where, } u &= \beta_0 \cos \psi, \quad \zeta = \frac{k}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4-33}$$

となる (Ref. [30] の式 (16))。

それでは次に、 $J'_k(\xi)$ の近似を行う。式 (4-21) に示すように、 $J'_k(\xi) = d/d\xi(J_k(\xi))$ であったから、式 (4-30) および式 (4-32) を使って、

$$\begin{aligned}
J'_k(ku) \\
&= \frac{du}{dku} \frac{d}{du} J_k(ku) \\
&= \frac{1}{k} \frac{d}{du} \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{3}} A_i \left[\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (1-u^2) \right] \\
&= -\frac{u}{\pi\sqrt{3}} (1-u^2) K_{\frac{2}{3}}(\zeta)
\end{aligned} \tag{4-34}$$

なお、式 (4-31) に示されている $A'_i(z) = d/dz(A_i(z))$ を使った。ここで、 $u \approx 1$ と近似して、

$$\begin{aligned}
J'_k(ku) &\approx -\frac{1}{\pi\sqrt{3}} (1-u^2) K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \\
\text{where, } u &= \beta_0 \cos \psi, \quad \zeta = \frac{k}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4-35}$$

と得られる。

ここで、 $\psi \ll 1$ であることから、

$$\begin{aligned}
\cos \psi &\approx 1 - \frac{\psi^2}{2} \\
\therefore u &\approx \frac{v_0}{c} \left(1 - \frac{\psi^2}{2}\right) \\
\therefore 1 - u^2 &\approx 1 - \frac{v_0^2}{c^2} + \frac{v_0^2}{c^2} \psi^2
\end{aligned} \tag{4-36}$$

ただし、 ψ^4 の項を落とした。

さらに、 $v_0 \simeq c$ ($1/\gamma_0 \ll 1$) であることから、 v_0/c を γ_0^{-2} で展開して γ_0^{-4} 以降の項を落とし、

$$\begin{aligned}
\frac{v_0}{c} &\approx 1 - \frac{1}{2}\gamma_0^{-2} \\
\therefore 1 - u^2 &\approx \gamma_0^{-2} + \psi^2
\end{aligned} \tag{4-37}$$

とする (Ref. [30] の式 (18))。ただし、 γ_0^{-4} および $\gamma_0^{-2}\psi^2$ の項をそれぞれ落とした。

また、式 (4-13) で導入したように $k = \omega/\omega_\rho$ であった。今、 $\omega_c = \omega_\rho(3/2)\gamma_0^3$ とおけば、

$$\begin{aligned}
k &= \frac{3}{2}\gamma_0^3 \frac{\omega}{\omega_c} \\
\text{where, } \omega_c &= \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3
\end{aligned} \tag{4-38}$$

となるから、これと式 (4-37) を使って、

$$\zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{3}{2}} \tag{4-39}$$

となる (Ref. [30] の式 (21))。これと式 (4-37) を使って、式 (4-33) および式 (4-35) で表されるベッセル関数 $J_k(ku)$ およびその導関数 $J'_k(ku)$ は、

$$\begin{aligned}
J_k(ku) &\approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \gamma_0^{-1} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \\
J'_k(ku) &\approx -\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \gamma_0^{-2} (1 + \gamma_0^2 \psi^2) K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \\
\text{where, } u &= \beta_0 \cos \psi, \quad \zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{3}{2}}, \\
\omega_c &= \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3
\end{aligned} \tag{4-40}$$

と書き換えられる (Ref. [30] の式 (22))。

式 (4-40) で表されるベッセル関数 $J_k(ku)$ およびその導関数 $J'_k(ku)$ の近似表式を、例えば式 (4-21) に代入すれば、

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\text{FS},k\parallel} &\approx -\frac{k\omega_\rho e\beta_0}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \gamma_0^{-2} (1 + \gamma_0^2 \psi^2) K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \\
\mathbf{f}_{\text{FS},k\perp} &\approx \frac{ik\omega_\rho e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\psi}{\beta_0} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \gamma_0^{-1} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \\
\text{where, } \zeta &\approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3
\end{aligned} \tag{4-41}$$

となる。あるいは、 $\beta_0 \approx 1$ として、

$$\begin{aligned} f_{\text{FS},k\parallel} &\approx -\frac{k\omega_\rho e}{4\sqrt{3}\pi^2\epsilon_0 c}(\gamma_0^{-2} + \psi^2)K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \\ f_{\text{FS},k\perp} &\approx \frac{ik\omega_\rho e\psi}{4\sqrt{3}\pi^2\epsilon_0 c}(\gamma_0^{-2} + \psi^2)^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \\ \text{where, } \zeta &\approx \frac{\omega}{2\omega_c}(1 + \gamma_0^2\psi^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3 \end{aligned} \quad (4-42)$$

ここで、第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ は、積分表示、

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t - x \cosh(\nu t)} dt \quad (4-43)$$

を用いて数値計算できる。

以上の結果を式(2-24)に代入して計算すれば、円軌道放射の各高調波の1周期あたりのエネルギーが得られるが、前述したように偏向部からの放射では高調波の列が非常に密なため、単位周波数あたりのパワー密度を求めることにする。単位周波数あたりのパワー密度の表式に $\omega = k\omega_\rho$ の関係を使えば、

$$\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\omega_\rho} \frac{d^2 P}{dk d\Omega} \quad (4-44)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dk} &= \frac{d}{dk} \sum_n P_n \\ &= \left(\sum_{n=1}^k P_n - \sum_{n=1}^{k-1} P_{n-1} \right) / dk \\ &= P_k \quad (\because dk = 1) \end{aligned} \quad (4-45)$$

であるから、

$$\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\omega_\rho} \frac{dP_k}{d\Omega}$$

である。したがって、1周期あたりの放射パワー密度は、放射光スペクトル表式は式(4-24)を使って、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} dt &= \frac{1}{\omega_\rho} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{dP_k}{d\Omega} dt \\ &= \frac{1}{\omega_\rho} \frac{dW_k}{d\Omega} \\ &= \frac{1}{\omega_\rho} 2\epsilon_0 c T f_{\text{FS},k} f_{\text{FS},k}^* \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (4-46)$$

となる。よって、軌道面に平行な成分の1周期あたりの放射パワー密度は、式(4-42)の $f_{\text{FS},k\parallel}$ を使えば、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{d^2 P_{\parallel}}{d\omega d\Omega} dt &= \frac{1}{\omega_\rho} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{dP_{k,\parallel}}{d\Omega} dt = \frac{1}{\omega_\rho} \frac{dW_{k,\parallel}}{d\Omega} \\ &\approx \frac{3e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma_0^2 (1 + \gamma_0^2\psi^2)^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \right\}^2 \\ \text{where, } \omega_c &= \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3, \quad \zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2\psi^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4-47)$$

と得られる(Ref. [3]の式(5.36))。なお、上式に $(I[A]/e) \cdot \Delta\omega \cdot (1/(\hbar\omega))$ を掛けて単位を換算すれば[19]の式(3.12)の σ 成分の表式が得られる。

同様に、軌道面に垂直な成分の1周期あたりの放射パワー密度は、式(4-42)の $f_{\text{FS},k\perp}$ を使って、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{d^2 P_{\perp}}{d\omega d\Omega} dt &= \frac{1}{\omega_\rho} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{dP_{k,\perp}}{d\Omega} dt = \frac{1}{\omega_\rho} \frac{dW_{k,\perp}}{d\Omega} \\ &\approx \frac{3e^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (\gamma_0^2\psi)^2 (1 + \gamma_0^2\psi^2) \left\{ K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \right\}^2 \\ \text{where, } \omega_c &= \omega_\rho \frac{3}{2}\gamma_0^3, \quad \zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2\psi^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4-48)$$

と得られる。

ここで、式(4-38)中で導入した ω_c は臨界周波数と呼ばれ、偏向部の円軌道放射スペクトルの極大域を特徴付ける量であり、式(4-8)より

$$\omega_c = \omega_\rho (3/2)\gamma_0^3 = (3c\gamma_0^3)/(2\rho) \quad (4-49)$$

あるいは、

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{4\pi\rho}{3\gamma_0^3} \quad (4-50)$$

となるから、電子のエネルギー γ_0 が大きく、曲率半径 ρ が小さいほど臨界周波数 ω_c は高くなり、より高周波側へとスペクトル分布が広がる。なお、PFリングの偏向電磁石の場合、 $\mathcal{E} = 2.5 [\text{GeV}]$ および $B_0 \sim 0.963 [\text{T}]$ から、 $\gamma_0 \simeq 4891$ および $\rho \simeq 8.659 [\text{m}]$ であるから、 $\omega_c \simeq 4 [\text{keV}]$ となる。

4.3. 偏向電磁石からの放射光の実効的な強度

偏向電磁石からの放射光では、軌道面に平行な水平方向には連続的に放射光が存在し、取り込み角に応じて強度が変化する。したがって、輝度などの計算に注意が必要となる。[19] [31]

まずは、式(3-9)と同様の手順で、偏向電磁石からの放射光の自然光束角密度 $\mathcal{D}_0$ を計算する。式(4-47)およ

び式 (4-48) から、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{0\parallel} [\text{photons/sec/rad}^2/\text{b.w.}] \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \frac{I}{e} \Delta\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{d^2 P_{\parallel}}{d\omega d\Omega} dt \\
&= \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \\
&\quad \cdot (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \right\}^2, \\
& \mathcal{D}_{0\perp} [\text{photons/sec/rad}^2/\text{b.w.}] \\
&= \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) (\gamma_0^2 \psi)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \\
&\quad \cdot (1 + \gamma_0^2 \psi^2) \left\{ K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \right\}^2 \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad \zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4-51)
\end{aligned}$$

となる。したがって、自然光束角密度は、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_0 [\text{photons/sec/mrad}^2/0.1\%\text{b.w.}] \\
&\approx 3.46 \times 10^6 \gamma_0^2 \{1 + (\gamma_0 \psi)^2\}^2 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \\
&\quad \cdot \left[\left\{ K_{\frac{2}{3}}(\zeta) \right\}^2 + \frac{(\gamma_0 \psi)^2}{1 + (\gamma_0 \psi)^2} \left\{ K_{\frac{1}{3}}(\zeta) \right\}^2 \right] \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad \zeta \approx \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma_0^2 \psi^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4-52)
\end{aligned}$$

となる (Ref. [19] の式 (3.12))。なお、垂直方向の観測角 $\psi = 0$ の場合、式 (4-51) の水平偏向成分のみが残り、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{0\psi=0} [\text{photons/sec/rad}^2/\text{b.w.}] \\
&= \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right\}^2 \\
&\therefore \mathcal{D}_{0\psi=0} [\text{photons/sec/mrad}^2/0.1\%\text{b.w.}] \\
&\approx 3.46 \times 10^6 \gamma_0^2 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right\}^2 \\
&\approx 1.33 \times 10^{13} (\mathcal{E} [\text{GeV}])^2 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right\}^2 \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3 \quad (4-53)
\end{aligned}$$

となる。ここで、最後から 2 番目の式は Ref. [29] の式 (10) に相当し、最後の式は Ref. [19] の式 (3.13) に相当する。

式 (4-53) 中の第 2 種変形ベッセル関数を含む部分を $H_2(y)$ (Ref. [19] の式 (3.14)) とし、

$$\begin{aligned}
& H_2(y) = y^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}}(y/2) \right\}^2 \\
&\text{where, } y = \omega/\omega_c, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3 \quad (4-54)
\end{aligned}$$

とする。

式 (4-51) の 2 式を垂直方向の観測角 ψ に関して積分すれば、

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}_{0\parallel} d\psi \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \\
&\quad \cdot \left\{ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' + K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right\} \\
& \int \mathcal{D}_{0\perp} d\psi \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \\
&\quad \cdot \left\{ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' - K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right\} \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad y' = \omega'/\omega_c \quad (4-55)
\end{aligned}$$

と得られる [19]。

よって、

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}_{0\parallel} d\psi + \int \mathcal{D}_{0\perp} d\psi \\
&= \int \mathcal{D}_0 d\psi [\text{photons/sec/rad/b.w.}] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{\hbar} \right) \gamma_0^2 \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I}{e} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' \\
&\therefore \int \mathcal{D}_0 d\psi [\text{photons/sec/mrad/0.1\%b.w.}] \\
&\approx 1.26 \times 10^{13} \gamma_0 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad y' = \omega'/\omega_c \quad (4-56)
\end{aligned}$$

となる (Ref. [19] の式 (3.19))。概略図 4-4 に示すように、リング全周に渡る偏向部からの放射光は ψ と垂直な軌道面内の角度方向には等方的に放射される。軌道面内の角度方向の積分は、上式に係数 2π を掛けることに相当する。すなわち、全光束 ($\Delta\theta = 2\pi$) は、

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_{\text{BM}2\pi} [\text{photons/sec/0.1\%b.w.}] \\
&= 2\pi \int \mathcal{D}_0 d\psi \\
&\approx 7.89 \times 10^{13} \gamma_0 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' \\
&\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad y' = \omega'/\omega_c \quad (4-57)
\end{aligned}$$

となる (Ref. [29] の式 (12))。ただし実用的には、例えば Ref. [29] の p.76 に示されているように、輝度などの単位に合わせて $\Delta\theta = 1 [\text{mrad}]$ などとする。このことは、Ref. [29] の p.62 にあるように、水平方向に 1 mrad

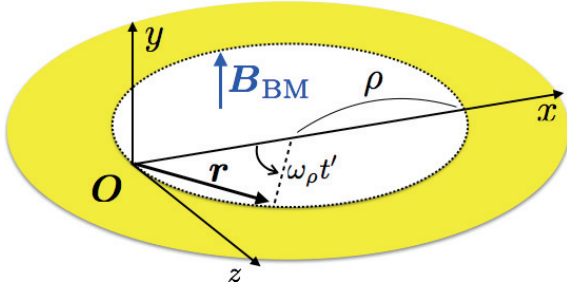


図 4-4. リング全周に渡る偏向部からの放射光の分布のイメージ。実際には直線部などがあるためにこのような分布にはならないが、概ね θ 方向に一様に分布するものとする。

のアーチャーを設置していることになる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec/0.1\%b.w.}] \\
 &= 1 \times 10^{-3} \int \mathcal{D}_0 d\psi \\
 &\approx 1.26 \times 10^{10} \gamma_0 (I [\text{A}]) \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' \\
 &\text{where, } \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad y' = \omega'/\omega_c
 \end{aligned} \quad (4-58)$$

としている。なお、これらの式に含まれる第 2 種変形ベッセル関数の積分を含む部分を $G_1(y)$ (Ref. [19] の式 (3.21)) とし、

$$\begin{aligned}
 G_1(y) &= y \int_y^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y') dy' \\
 &\text{where, } y = \omega/\omega_c, \quad y' = \omega'/\omega_c, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3
 \end{aligned} \quad (4-59)$$

とする。図 4-5 に式 (4-54) および式 (4-59) で表される $H_2(y)$ および $G_1(y)$ をプロットした。

ここで ψ に関して放射光強度分布がガウス分布であると仮定すれば、式 (4-52) で $\psi = 0$ とした時の式 (4-53) と式 (4-56) を使って、自然角度発散 σ'_ψ は、

$$\begin{aligned}
 \sigma'_\psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int \mathcal{D}_{0\parallel} d\psi + \int \mathcal{D}_{0\perp} d\psi \right) / \mathcal{D}_{0\psi=0} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{-1} \frac{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(y) dy}{\left\{ K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right) \right\}^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\gamma_0} \frac{G_1(y)}{H_2(y)} \\
 &\text{where,} \\
 &k \geq 1, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad y = \omega/\omega_c
 \end{aligned} \quad (4-60)$$

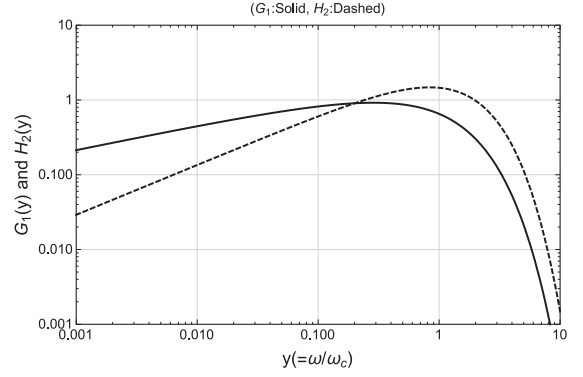


図 4-5. 関数 $H_2(y)$ (破線) および $G_1(y)$ (実線) を y に対してプロット。ただし、 $y = \omega/\omega_c$ 。 (Ref. [19] の図 3.2)

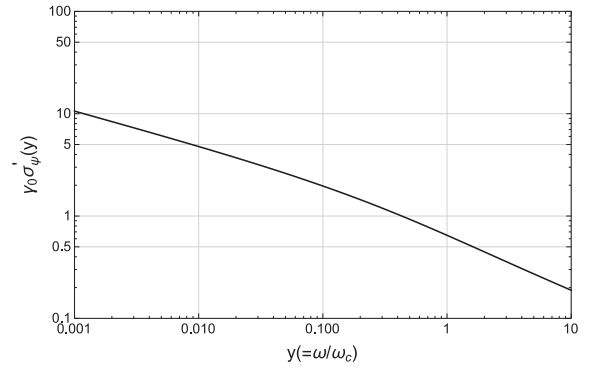


図 4-6. $1/\gamma_0$ で規格化した偏向電磁石からの放射の自然角度発散 $\gamma_0 \sigma'_\psi$ を y に対してプロット。ただし、 $y = \omega/\omega_c$ (Ref. [19] の図 3.3)

と得られる (Ref. [19] の式 (3.22))。ただし、 $H_2(y)$ および $G_1(y)$ はそれぞれ式 (4-54) および式 (4-59) で表される。なお、Ref. [19] に述べられているように、 $\psi = 0$ において垂直偏向成分の強度が 0 となるなど実際の分布は Gaussian ではないが、この角度拡がりの表式は簡易に使える有用な指標となる。図 4-6 に、自然角度発散をプロットした (Ref. [19] の図 3.3)。

このようにして求めた自然角度発散 (半角) σ'_ψ を使って、偏向電磁石からの放射光に対する回折限界サイズ (半径) σ_ψ が得られる。電子ビームのエミッタンスを計算する時に一般に用いられる $1/\sqrt{e}$ 半径 σ_h [m] および発散半角 $\sigma_{h'}$ [rad] を用いて、回折限界にある最短波長 λ_{eq} との間に $\sigma_h \sigma_{h'} \simeq \lambda_{\text{eq}} / (4\pi)$ の関係があったから、

$$\begin{aligned}
 \sigma_\psi &= \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sigma'_\psi} \\
 &= \frac{c}{2\omega} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \gamma_0 \frac{H_2(y)}{G_1(y)}
 \end{aligned} \quad (4-61)$$

となる。

よって、3.2. 節での議論に従えば、 $\Delta\theta = 1 \text{ mrad}$ すなわち $\sqrt{2\pi}\Sigma_\theta = 1 \text{ mrad}$ として式 (4-58) を使い、偏向電磁石からの放射光の実効光束角密度 $\mathcal{D}_{\text{BM}}$ は、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec/mrad}^2/\text{b.w.}] &= \frac{\mathcal{F}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec}/0.1\%\text{b.w.}]}{2\pi\Sigma'_\theta\Sigma'_\psi} \\ &= \frac{\mathcal{F}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec}/0.1\%\text{b.w.}]}{\sqrt{2\pi}\Sigma'_\psi}\end{aligned}\quad (4-62)$$

と、実効輝度 $\mathcal{B}_{\text{BM}}$ は、

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec/mm}^2/\text{mrad}^2/\text{b.w.}] &= \frac{\mathcal{F}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec}/0.1\%\text{b.w.}]}{4\pi^2\Sigma'_\theta\Sigma'_\psi\Sigma_\theta\Sigma_\psi} \\ &= \frac{\mathcal{F}_{\text{BM mrad}} [\text{photons/sec}/0.1\%\text{b.w.}]}{2\pi\Sigma'_\psi\Sigma_\psi}\end{aligned}\quad (4-63)$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}\Sigma_\theta [\text{mm}] &= 1/\sqrt{2\pi}, \\ \Sigma_\psi [\text{mm}] &= (10^3[\text{m} \rightarrow \text{mm}]) \cdot \sqrt{\sigma_\psi^2 + \sigma_y^2}, \\ \Sigma'_\theta [\text{mrad}] &= 1/\sqrt{2\pi}, \\ \Sigma'_\psi [\text{mrad}] &= (10^3[\text{rad} \rightarrow \text{mrad}]) \cdot \sqrt{\sigma_\psi'^2 + \sigma_y'^2}, \\ \sigma_\psi [\text{m}] &= \frac{c}{2\omega} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \gamma_0 \frac{H_2(y)}{G_1(y)}, \\ \sigma_\psi' [\text{rad}] &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\gamma_0} \frac{G_1(y)}{H_2(y)}, \\ H_2(y) &= y^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}}(y/2) \right\}^2, \\ G_1(y) &= y \int_y^\infty K_{\frac{5}{3}}(y') dy', \\ y &= \omega/\omega_c, \quad \omega_c = \omega_\rho \frac{3}{2} \gamma_0^3, \quad \omega_\rho = \frac{eB_0}{\gamma m}, \\ \sigma_y [\text{m}] &= \sqrt{\beta_y \varepsilon_y + \left(\eta_y \frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2}, \\ \sigma_y' [\text{rad}] &= \sqrt{(1 + \alpha_y^2) \frac{\varepsilon_y}{\beta_y} + \left(\eta_y' \frac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2}\end{aligned}\quad (4-64)$$

である。

5. ウィグラー

5.1. ウィグラー

Ref. [3] の 5.2 節にならってウィグラー (Wiggler) からの放射について概説する。

ウィグラーは、挿入光源の周期磁場分布の振幅を増して $K \gg 1$ とした装置である [32]。

高強度磁場内で、電子軌道はアンジュレータに比べて大きな振幅で振れるため、放射パワーは広い角度に発散する。そのため、輝度は相対的に低下する。電子の動きは調和振動から大きくずれるため非常に多くの高調波が発生し、高い光子エネルギーの光が得られる。

高調波の列スペクトルの包絡線は各磁極からの円軌道放射の重ね合わせとして近似できる。

磁極の数が 3 極の Three-pole wiggler (TPW) や、磁石をアンジュレータのように多数並べた多極ウィグラー (Multi-pole wiggler, MPW)、そして、横磁場で縦偏光の放射光を発生させる Vertical wiggler (VW)、磁極に超電導体を用いた Super-conducting wiggler (SCW) などといった多様な装置が開発・運用されている。

今、ウィグラーの磁場振幅を B_0 、磁場周期長を λ_u とする。このとき、ウィグラーを通過する電子の最小軌道半径は、偏向定数 K の表式 (2-38) を式 (4-9) に使って、

$$\rho_0 \approx \frac{\gamma mc}{eB_0} = \frac{\gamma \lambda_u}{2\pi} \frac{2\pi mc}{eB_0 \lambda_u} = \frac{\gamma \lambda_u}{2\pi K} \quad (5-1)$$

と変形できる (Ref. [19] の式 (5.2) に一致)。よって、式 (4-49) および (4-50) を偏向定数 K を使って表すことができ、

$$\omega_{\text{wc}} = \frac{3c\gamma_0^3}{2\rho_0} = \frac{3\pi c\gamma_0^2 K}{\lambda_u} \quad (5-2)$$

あるいは、

$$\lambda_{\text{wc}} = \frac{4\pi\rho_0}{3\gamma_0^3} = \frac{2\lambda_u}{3\gamma_0^2 K} \quad (5-3)$$

とできる。

周期数 N の多極ウィグラーの軸上における放射を考えるには、式 (4-47) および式 (4-48) において $\psi = 0$ とし、磁石半周期毎に軸上に光が放射されるため、 $2N$ 個の磁極で光が生成されることになる。ただし、アンジュレータと同様にウィグラーが電子ビーム軌道に対する影響を抑えるために、一般に両端は弱い磁場の磁石で構成され、 $2N - 1$ の数の磁極が最大磁場を持つ。なお、 $\psi = 0$ とすれば、式 (4-42) より $f_{\text{FS},k\perp} = 0$ であり、軸上で放射光は軌道面に水平な直線偏光であることがわか

る。したがって、近似式 (4-47) を使って、

$$\frac{d^2 P_{\psi=0}}{d\omega d\Omega} = \frac{(2N-1)3e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma_0^2 \left\{ K_{\frac{2}{3}}(\zeta_{\psi=0}) \right\}^2$$

where, $k \geq 1$, $\omega_c = \omega_p \frac{3}{2} \gamma_0^3$, $\zeta_{\psi=0} \approx \frac{\omega}{2\omega_c}$ (5-4)

となる。

なお、式 (2-38) で表されるように偏向定数 K は、磁場 B_0 と比例関係にある。そのため、挿入光源では向かいあった磁石列の間隔（ギャップと呼ぶ）を変えることで磁場強度を変えて K の値を変えることができる。そのため、1つの挿入光源でアンジュレータモード ($K \lesssim 1$) と多極ウィグラーモード ($K \gg 1$) を使い分けることができるとも言える。したがってこのような観点から、用途に応じて、その挿入光源の呼称をアンジュレータとするかウィグラーとするかが分かれる。

ここで、一つ気をつけたい事がある。電子のエネルギーが一定であるときに、挿入光源のギャップを狭くして磁場強度を上げると光の波長はどのように変化するだろう。一般には磁場を強くするとアンジュレータ放射の基本波 ($k=1$) の波長は短波長側へと変化するようなイメージがわくかもしれない。しかしながら実際には、ギャップを狭くして磁場を強くすると光の波長は長波長側へと変化する。これは、式 (2-49) で表されるアンジュレータ内での光と移動する光源点（電子）の干渉を考慮した、1次光の波長の表式 (2-54) に示されているように、波長 λ_1 は K^2 で変化する。

そのため、アンジュレータモードで使う場合には、ギャップを狭くして磁場を強くすると波長は長波長側へとシフトする。しかし、磁場強度が非常に強くなると、電子の蛇行軌道の振れは大きくなり、より高次の高調波の強度が増す。そのため、ウィグラーモードでは磁場強度を強くすると観測者は、円軌道放射の場合と同様、放射の主要部としては、より短波長の光を多く受け取ることになる。

6. 自由電子レーザー

これまでの議論を踏まえて、Ref. [10] にしたがって自由電子レーザーの原理のはじめの部分についてあらためて触れる。

6.1. 電子位相

2.6. 節では、アンジュレータ周期磁場中での単一電子の運動を考え、電子が座標 z に到達する時刻 $t(z)$ などを

導出した。電子ビーム中の個々の電子の到達時刻を、電子ビーム全体の平均値を使って相対的に記述する。すなわち、相対時刻 τ_j を、

$$\tau_j(z) = t_j(z) - \langle t(z) \rangle \quad (6-1)$$

と定義する。ここで、 $\langle \rangle$ はバンチ中の全電子に対する平均操作を意味し、添字 j はバンチ中の j 番目の電子を意味する。すなわち、 τ_j は j 番目の電子に関する時間的な偏差を表す。これを使って、 j 番目の電子の座標偏差 s_j は、

$$s_j(z) = -c\tau_j(z) \\ = c \langle t(z) \rangle - ct_j(z) \quad (6-2)$$

となる。これは、式 (2-56) を使って、

$$s_j(z) = c \{ \langle \bar{t}(z) \rangle - \bar{t}_j(z) \} + c \{ \langle \delta t(z) \rangle - \delta t_j(z) \}$$

と書ける。ここで、 $\langle \delta t(z) \rangle = \delta t_0(z)$ として、バンチの平均エネルギーを γ_0 と書き、 j 番目の電子のエネルギーを γ_j と書くことにする。このとき、 $\gamma_0 \neq \gamma_j$ の場合もあり、 $\delta t_0(z)$ と $\delta t_j(z)$ とは厳密に等しいとはかぎらない。しかし、 $|\delta t_0(z) - \delta t_j(z)|$ は $|\gamma_0^{-2} - \gamma_j^{-2}|$ 程度の非常に小さな量となる。例えば、電子エネルギー 1 [GeV] ($\gamma_0 \sim 1957$)、エネルギー拡がり $\sigma_E = 10^{-3}$ の電子ビームに対して、エネルギー拡がり相当のエネルギー差を考えても $|\gamma_0 - \gamma_j|^{-2} \sim 5 \times 10^{-19}$ と非常に小さな値になる。よって、 $|\delta t_0(z) - \delta t_j(z)| \approx 0$ 、すなわち $\delta t_0(z) \approx \delta t_j(z)$ と近似できて、

$$s_j(z) \approx c \{ \langle \bar{t}(z) \rangle - \bar{t}_j(z) \}$$

となる。さらに、式 (2-57) を使えば、

$$s_j(z) = z + \frac{\lambda_{1L,H}(\gamma_0)}{\lambda_u} z - c\bar{t}_j(z) \quad (6-3)$$

となる (Ref. [10] 3.2 節)。ただし、バンチ全体で平均した光の基本波長を $\langle \lambda_{1L,H} \rangle = \lambda_{1L,H}(\gamma_0)$ とした。さらに、 s_j に基本波数 $k_1(\gamma_0) = 2\pi/\lambda_1(\gamma_0)$ を掛けることで、位相偏差 ψ_j を、

$$\psi_j(z) = k_1(\gamma_0)s_j(z) \\ = k_1(\gamma_0)z + k_u z - \omega_1(\gamma_0)\bar{t}_j(z) \quad (6-4)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-11))。ただし、 $k_u = 2\pi/\lambda_u$ 、 $\omega_0(\gamma_0) = 2\pi c/\lambda_1(\gamma_0)$ である。

本節の表記に倣って式 (2-58) の $\lambda_{1L,H} = \lambda_1(\gamma_j)$ と書けば、

$$\frac{d\psi_j(z)}{dz} = k_1(\gamma_0) + k_u - \omega_1(\gamma_0) \frac{d\bar{t}_j(z)}{dz} \\ = k_u \frac{\lambda_1(\gamma_0) - \lambda_1(\gamma_j)}{\lambda_1(\gamma_0)} \quad (6-5)$$

となる。さらに、式 (2-58) を使えば、

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_j(z)}{dz} &= k_u \frac{\gamma_0^{-2} - \gamma_j^{-2}}{\gamma_0^{-2}} \\ &= k_u \left(1 - \frac{\gamma_0^2}{\gamma_j^2} \right)\end{aligned}\quad (6-6)$$

となる。ここで、バンチ平均エネルギーからの j 番電子のエネルギー偏差 η_j を導入し、

$$\begin{aligned}\eta_j &= \frac{\gamma_j - \gamma_0}{\gamma_0} \\ \therefore \frac{\gamma_0}{\gamma_j} &= \frac{1}{\eta_j + 1}\end{aligned}\quad (6-7)$$

とすれば、

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_j(z)}{dz} &= k_u \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\eta_j + 1} \right)^2 \right\} \\ &= k_u \frac{\eta_j^2 + 2\eta_j}{\eta_j^2 + 2\eta_j + 1}\end{aligned}\quad (6-8)$$

ここで、 $-1 \ll \eta_j \ll 1$ という条件 (FEL 過程における加減速が平均エネルギーに対して微小であるという条件) を導入すれば、 $\eta_j^2 \approx 0$ 、 $2\eta_j/(2\eta_j + 1) \approx 2\eta_j$ とそれぞれ近似できて、

$$\frac{d\psi_j(z)}{dz} \approx 2k_u \frac{\gamma_j - \gamma_0}{\gamma_0}\quad (6-9)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-12))。

6.2. 定常状態にある FEL

FEL における光の増幅過程は、コヒーレント光と電子ビームとの相互作用によるマイクロバンチ構造の形成と、マイクロバンチ構造によるコヒーレント光の生成 (コヒーレント光の増幅) を記述する必要がある。

すなわち、増幅される光の電場を表す関数 $\mathbf{E}(z, t)$ と、マイクロバンチを表現するための電子密度分布関数 $n(z, t)$ に関する方程式を導出して解く必要がある。

しかしながら、方程式を解析的に解くためには、前提となる予備知識に基づいて適切な近似を行う必要がある。ここでは、定常状態という近似を導入する。

さて、まずは FEL の成長過程を定性的に追うことから始める。アンジュレータの入口 $z = 0$ において電子ビームの密度分布と光電場分布の中心位置は重なっているものとし、このときの時間を $t = 0$ とする。 $z = 0$ では電子ビームにマイクロバンチは形成されておらず、規則的な密度変調は存在しない。

光とともにアンジュレータ内を進行することで、電子と光は相互作用してエネルギー授受が行われる。

そして、相互作用が十分に進んだある座標 $z > 0$ において、電子ビームには、 λ_1 の周期の密度変調 (マイクロバンチ) が形成され、光電場が増幅される。このとき、前節で議論したように電子分布の中心位置は光電場分布の中心位置に対して $\langle \delta t(z) \rangle$ だけ遅れる。

光電場と電子密度分布とは、それぞれ時間と位置の関数として $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ および $n(\mathbf{x}, t)$ と書ける。話を 1 次元に限り、光が z 方向に伝搬するものとする。このとき、電子密度と光電場は z 方向にのみ変化することになり、それぞれ、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(z, t) \exp \{ i(k_1 z - \omega_1 t) \} + \text{c.c.} \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(z, t) \exp \left\{ -i\omega_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right\} + \text{c.c.} \\ n(z, t) &= n_0(\tau) + n_1(z, \tau) \exp(-i\omega\tau) + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (6-10)$$

と書ける (Ref. [10]-式 (3-13))。ここで、 τ は式 (6-1) で与えられる相対時刻、c.c. は複素共役をそれぞれ表す。 z を含む関数は z に対して (電子ビームおよび光電場の z 方向への進行に伴って) 変化 (成長) することを表す。密度変調が z の増大によって成長するのに対して、電子バンチのエンベロープ関数 $n_0(\tau)$ は z によらない。

さて、 $\tilde{\mathbf{E}}(z, t)$ は座標 z で観測した光電場の複素振幅を、 $n_1(z, \tau)$ は座標 z に形成された電子密度変調 (マイクロバンチ) の複素振幅をそれぞれ表し、増幅が進むにつれて (すなわち z 座標の増加とともに) それぞれの絶対値が緩やかに増加するものとする。すなわち、それぞれの量の振動成分である指数関数部の変化に比べて振幅の増加が緩やかであるものと仮定する。このような仮定のもとでは、振動部と振幅部を分離することができて、解析を容易に行うことができるようになる。

さらに、電子ビームとシード光が同期して入射され、シード光が進行方向に一樣な分布関数を持つものと仮定すれば、ある固定した座標 z において観測される密度変調の大きさや光のパワーは時間 t に依存せず位置 z のみによって記述される。このような条件における FEL 増幅過程は定常状態にあると言い、光電場の振幅 $\tilde{\mathbf{E}}(z, t)$ および密度変調の振幅 $n_1(z, \tau)$ から時刻 t を省くことができて、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(z) \exp \left\{ -i\omega_1 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right\} + \text{c.c.} \\ n(z, t) &= n_0 + n_1(z) \exp(i\psi) + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (6-11)$$

とできる。なお、密度変調の振動部について $\omega = ck$ の関係と、式 (6-2)、(6-4) で与えられる $-i\omega_1\tau = -ick_1\tau = ik_1s = i\psi$ と書き換えた (Ref. [10]-式 (3-14))。

バンチ中には様々なエネルギーの電子が含まれており、FEL 過程において電子エネルギー分布の変化が重要な役割を果たす。しかしながら、これまでに定義した密度分布関数 $n(z, t)$ には電子のエネルギー分布の情報が含まれていない。そこで、エネルギー γ を引数として含む分布関数 $f(z, \psi, \gamma)$ を以下のように定義する (Ref. [10]-式 (3-15, 3-16))。

$$f(z, \psi, \gamma) = f_0 + f_1(z, \gamma) \exp(i\psi) + \text{c.c.}$$

where,

$$\begin{aligned} n_0 &= \int f_0(\gamma) d\gamma \\ n_1 &= \int f_1(z, \gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (6-12)$$

積分は全エネルギー領域に対して行う。

6.3. マイクロバンチによる光電場の成長

今、電子ビームと光とはアンジュレータの入口 ($z = 0$) においていずれも到達時間 $t = 0$ であるものとする。このとき、電子ビーム内にマイクロバンチは形成されておらず、規則的な密度変調は存在しない。

その後、電子ビームは光とともにアンジュレータ内を進行しながら光と相互作用し、光と電子との間でエネルギーの授受が行われる。

相互作用の過程が十分に進んだある位置 $z(> 0)$ において、電子ビームには $\lambda_1/c = 2\pi/\omega_1$ に等しい時間感覚の密度変調 (マイクロバンチ) が形成されるとともに光の電場振幅は増大する。

マイクロバンチと光の電場振幅の増大との間には正の帰還ループが存在し、電場振幅の増大によってマイクロバンチの成長スピードが増し、マイクロバンチの成長によって光の増大スピードも増す。

さて、有限な空間的なひろがりをもつ電荷分布から発生する動的な電磁場を取り扱うために、Maxwell 方程式から出発する必要がある。Lorentz ゲージにおける電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ とを用いたアンペールの法則の両辺に $\partial/\partial t$ を作用させ、ガウスの法則を使えば、

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \\ \therefore \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= - \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \text{grad} \phi(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6-13)$$

となる。アンペールの法則の両辺に grad を作用させれ

ば、

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \text{grad} \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho_e(\mathbf{x}, t) \quad (6-14)$$

となるから、これを使って、

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho_e(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \\ \therefore \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6-15)$$

と、電場に関する波動方程式を得る (Ref. [10]-式 (3-17))。

よって、それぞれの電場成分に対して、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{ex}(\mathbf{x}, t) \\ \left\{ \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{ey}(\mathbf{x}, t) \\ \left\{ \frac{\partial^2 E_z(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(\mathbf{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_e(\mathbf{x}, t)}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{ez}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6-16)$$

と得られる。

それでは、1 次元での FEL 過程を考える。

短波長の光に制限して、光の z 方向の電場成分を無視する (Ref. [10]-3.4 節)。すると、 x 方向と y 方向には電場、電荷密度および電流密度は一樣となり、電場の x および y 方向の偏微分方程式だけが残し、電荷密度の項は消えて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{ex}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{ey}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6-17)$$

の 2 式が残る。今考えている 1 次元近似では光は平面波で表され、さらに定常状態にある FEL 過程では光電場の成長過程は時間 t によらず位置 z のみにより、式 (6-11) で表されるのであった。したがって、振幅 $E_x(z, t)$ および電子密度分布の振幅 n が z のみに依存するものとし

て $E_x(z)$ などと書けば、これらの式をまとめて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_e(\mathbf{x}, t) \\ \text{where,} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_x \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \\ &+ \mathbf{e}_y \left\{ E_y(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \end{aligned} \quad (6-18)$$

と書ける (Ref. [10]-式 (3-18, 3-19))。ここで、光電場の表式は任意の波長 λ を持ち、光の波長は基本波長からの偏差は小さいと仮定する ($|(\lambda - \lambda_1)/\lambda_1| \ll 1$)。また、 $k = 2\pi/\lambda$ 、 $\omega = kc$ 、 $\mathbf{e}_x$ は x 方向の単位ベクトル、 $\mathbf{e}_y$ は y 方向の単位ベクトルである。

式 (6-18) の光電場の表式を偏微分方程式に代入し、 x 成分について解く。

左辺は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \\ - k^2 E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial t^2} e^{i(kz - \omega t)} \right. \\ \left. + 2i\omega \frac{\partial E_x(z)}{\partial t} e^{i(kz - \omega t)} - \omega^2 E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} \right\} + \text{c.c.} \\ = \frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} e^{i(kz - \omega t)} + 2ik \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6-19)$$

となる。なお、 $\omega = ck$ の関係を用いた。ここで、光電場の振幅 $E_x(z)$ が緩やかに変化するという仮定のもとに $\partial^2 E_x(z)/\partial z^2$ の項を無視すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \\ = 2ik \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6-20)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-20))。

エネルギー拡がりおよびエネルギー偏差が小さいという仮定のもと、式 (6-11) で定義される密度分布の表式を使って、電流密度を $i_{\text{ex}}(z, t) \approx -en(z, \psi) \langle v_x \rangle = -ecn(z, \psi) \langle \beta_x \rangle$ とすれば、右辺は、

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{\text{ex}}(z, t) \\ = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ -ecn(z, \psi) \langle \beta_x \rangle \} \\ = -\mu_0 ec \langle \beta_x \rangle \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \psi} \{ n_1(z) \exp(i\psi) + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (6-21)$$

となる。ここで、式 (6-11) を導出した際とは逆に ψ を

変形すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{ ks \} \\ &\approx -\omega \end{aligned} \quad (6-22)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{\text{ex}}(z, t) \\ = \mu_0 ec \langle \beta_x \rangle \omega \frac{\partial}{\partial \psi} \{ n_1(z) \exp(i\psi) + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (6-23)$$

となり、式 (2-37) を使って $\langle \beta_x \rangle$ を書き換えれば、

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{\text{ex}}(z, t) \\ = \mu_0 ec \omega \frac{K}{\gamma_0} \cos k_u z \frac{\partial}{\partial \psi} \{ n_1(z) \exp(i\psi) + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (6-24)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-21))。

式 (6-20) および式 (6-24) の結果を使い、定常状態のもとで光電場の振幅 $E_x(z)$ が z のみの関数であることに注意して全微分へと書き換えれば、

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} &= \mu_0 ec \omega \frac{K}{\gamma_0} \cos k_u z \frac{\partial}{\partial \psi} \{ n_1(z) e^{i\psi} \} \\ \therefore \frac{dE_x(z)}{dz} &= \frac{\mu_0 ec^2 K}{2\gamma_0} n_1(z) e^{i(\psi - kz + \omega t)} \cos k_u z \end{aligned} \quad (6-25)$$

となる。さらに、余弦関数部を指数関数表記すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} \\ = \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0} n_1(z) e^{i(\psi - kz + \omega t)} e^{-ik_u z} (1 + e^{2ik_u z}) \end{aligned} \quad (6-26)$$

と変形できる。

ここで、式 (6-4) および式 (2-56)、また、 $1 - (\omega/\omega_1) \ll 1$ であることを使えば、

$$\begin{aligned} \psi &= kz + k_u z - \omega \bar{t} \\ \therefore \psi - kz + \omega t &\approx k_u z - k_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right) + \omega \delta t \end{aligned} \quad (6-27)$$

と得られる。これを使って、

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} \\ = \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right)} e^{i\omega \delta t} (1 + e^{2ik_u z}) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\kappa(z) = (1 + e^{2ik_u z}) e^{i\omega \delta t} \quad (6-28)$$

とおけば (Ref. [10]-式 (3-23))、

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} &= \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0} \kappa(z) n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \end{aligned} \quad (6-29)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-22))。

式 (6-29) の右辺は、係数を別にすれば z の 3 つの関数の積になっている。式 (6-28) で表される $\kappa(z)$ は光電場の半分の周期 $\lambda/2$ で振動するのに対して、 $n_1(z)$ はシード光パルスの波形程度の光電場の周期に比べて長い周期を持ち、指数関数部分も $1 - (\omega/\omega_1) \ll 1$ であることから光電場の周期よりも長い周期を持つため、 $\kappa(z)$ に比べて他の 2 つの関数は低い変化率を持つ。そこで、 $\kappa(z)$ についてアンジュレータ磁場 1 周期分の区間で平均をとることで簡略化することを考える。

$\kappa(z)$ をアンジュレータ磁場 1 周期分の区間で平均した値を計算するには、

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(z) &= \frac{1}{\lambda_u} \int_{z - \frac{\lambda_u}{2}}^{z + \frac{\lambda_u}{2}} \kappa(z') dz' \\ &= \frac{1}{\lambda_u} \int_{z - \frac{\lambda_u}{2}}^{z + \frac{\lambda_u}{2}} \left(1 + e^{2ik_u z'}\right) e^{i\omega \delta t(z')} dz' \end{aligned} \quad (6-30)$$

とすればよい。

リニアアンジュレータでは、 $\omega \approx \omega_{1L}$ を仮定して式 (2-54) を使って変形すれば、

$$\begin{aligned} e^{i\omega \delta t_L(z)} &\approx \exp\left(i\omega_{1L} \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u c} \sin 2k_u z\right) \\ &= \exp\left(i \frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2} \sin 2k_u z\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、ベッセル関数に関する関係式 (B-16) を使って n 次のベッセル関数 J_n を用いて、

$$e^{i\omega \delta t_L(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) e^{2ink_u z}$$

と書けるから、

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_L(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) \frac{1}{\lambda_u} \int_{z - \frac{\lambda_u}{2}}^{z + \frac{\lambda_u}{2}} \left(1 + e^{2ik_u z'}\right) e^{2ink_u z'} dz' \end{aligned}$$

となり、積分部分は $n = -1$ および $n = 0$ の場合に λ_u 、それ以外の場合に 0 となるから、

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_L &= J_{-1}\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) + J_0\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\bar{\kappa}$ は z によらない関数となっている。さらに式 (B-9) を使って、

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_L &= J_0\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) - J_1\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) \end{aligned}$$

と得られる (Ref. [10] 付録 A の最終式)。よって、 $\bar{\kappa}(z)$ は z に依存しないことがわかる。

以上より、式 (6-29) をアンジュレータ磁場 1 周期で平均して簡略化して表せば、

$$\begin{aligned} \frac{dE_x(z)}{dz} &= \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0} \bar{\kappa} n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \\ \text{where,} & \quad \bar{\kappa} = J_0\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) - J_1\left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2}\right) \quad ; \text{Linear} \end{aligned} \quad (6-31)$$

と得られる。

次に、式 (6-18) の光電場の表式を偏微分方程式に代入して、 y 成分について解く。この場合、 x が y に置き換わり、偏微分方程式の y 成分の左辺は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ E_y(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} &- \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ E_y(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \\ &= 2ik \frac{\partial E_y(z)}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6-32)$$

となる。また、電流密度は $i_{ey}(z, t) \approx -en(z, \psi) \langle v_y \rangle = -ecn(z, \psi) \langle \beta_y \rangle$ となる。 $\langle \beta_y \rangle$ を式 (2-39) を使って書き換えれば、偏微分方程式の y 成分の右辺は、

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} i_{eyL}(z, t) = 0 \quad ; \text{Linear} \quad (6-33)$$

となる。よって、リニアアンジュレータでは $E_{yL}(z) = 0$ となることがわかる。

よって、 y 成分に関してもアンジュレータ磁場 1 周期で平均して簡略化して表せば、

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(z)}{dz} &= -i \frac{\mu_0 ec^2 K}{4\gamma_0} \bar{\kappa} n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \\ \text{where, } \bar{\kappa} &= 0 \quad ; \text{Linear} \end{aligned} \quad (6-34)$$

あるいは、

$$E_{yL}(z) = 0 \quad (6-35)$$

という関係があることがわかる。関係式 (6-35) から、リニアアンジュレータでは水平偏光が得られることがわかる。

ここで、合成電場振幅 $E_{\perp}$ および合成偏向定数 $K_{\perp}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= \begin{cases} E_x & ; \text{Linear} \\ \sqrt{2}E_x = i\sqrt{2}E_y & ; \text{Helical} \end{cases} \\ K_{\perp} &= \begin{cases} K & ; \text{Linear} \\ \sqrt{2}K & ; \text{Helical} \end{cases} \end{aligned} \quad (6-36)$$

こうすることで式 (2-25) に示したリニアあるいはヘリカル磁場いずれに対しても、

$$\begin{aligned} |E_{\perp}| &= \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} \\ K_{\perp} &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2} \end{aligned} \quad (6-37)$$

と統一的に表記できるため、自由電子レーザーを扱う多くの文献で用いられる [10]。

偏向定数および電場振幅は各アンジュレータに対してそれぞれ、表 6-1 のようになる。

表 6-1. 合成電場振幅 $E_{\perp}$ および合成偏向定数 $K_{\perp}$ を用いた各アンジュレータに対する偏向定数、電場振幅の表記 (Ref. [10]-表 1)。

	Helical Undulator	Linear Undulator
K	$K_{\perp}/\sqrt{2}$	$K_{\perp}$
E_x	$E_{\perp}/\sqrt{2}$	$E_{\perp}$
E_y	$-iE_{\perp}/\sqrt{2}$	0

合成電場振幅 $E_{\perp}$ および合成偏向定数 $K_{\perp}$ を用いて式 (6-31) および式 (6-34) は、

$$\frac{dE_{\perp}(z)}{dz} = \frac{\mu_0 e c^2 K_{\perp} \bar{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)}$$

where,

$$\bar{\kappa} = \begin{cases} J_0\left(\frac{K_{\perp}^2}{2+K^2}\right) - J_1\left(\frac{K_{\perp}^2}{2+K^2}\right) & ; x, \text{Linaer} \\ 1 & ; x, \text{Herical} \\ 0 & ; y, \text{Linaer} \\ 1 & ; y, \text{Herical} \end{cases} \quad (6-38)$$

と、まとめて表記することができる (Ref. [10]-式 (3-27))。

このとき、アンジュレータの基本波長の表式 (2-54) も、

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K_{\perp}^2}{2}\right) \quad (6-39)$$

と、まとめて表記することができる (Ref. [10]-式 (3-28))。

また、光電場が単位面積あたりに運ぶパワーは 1.2. 節で議論したようにポインティングベクトル $\mathbf{S}$ で表される。今、光電場は平面波であり、式 (1-11) において $\mathbf{E}_{\text{ret}} = \mathbf{E}$ であることに気をつけて、

$$S = |\mathbf{S}| = \epsilon_0 c \overline{\mathbf{E}^2} = 2\epsilon_0 c |E_{\perp}|^2 \quad (6-40)$$

と、まとめて表記することができる (Ref. [10]-式 (3-29))。

6.4. 電子のエネルギー方程式

Ref. [10] の 3.5 節に沿って、アンジュレータ中を進む電子が光電場とどのようにエネルギーの受け渡しを行うのかを考える。

座標 z における、位相空間 (ψ, γ) 上での電子の分布関数を $f(z, \psi, \gamma)$ として導入する。関数 $f(z, \psi, \gamma)$ が座標 z とともにどのように変化するか、すなわち光と電子ビームの相互作用によって形成される密度変調の成長の過程を知るにはどうすればよいだろう。

そのためには、位相空間における電子の運動方程式を解くことによって個々の電子の運動を特定する 2 つの座標変数、すなわち位相 ψ とエネルギー γ を z の関数として表す必要がある。

これら 2 つの座標変数のうち、位相 ψ についてはすでに式 (6-9) として導出している。したがって、残りの変数である γ についての表式を導出すればよい。そのために、アンジュレータ磁場中で運動する電子と、電子に同期して入射されたシード光との相互作用、すなわちエネルギーのやりとりについて考える必要がある。

相対論的電子のエネルギー変化は、

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

と表される。一方、電磁場中の運動方程式は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

と表されるので、これをエネルギー変化の式に代入すれば、独立変数である座標 z を用いて、

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{d\gamma}{dt} &= \mathbf{v} \cdot \{-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\} \\ \therefore \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{e}{mc^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

と得られる。ただし、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は $\mathbf{v}$ に対して垂直な方向のベクトルであるため、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ である。ここで、 $z \approx ct$ と近似すれば、

$$\frac{d\gamma}{dz} \approx \frac{d\gamma}{cdt} = -\frac{e}{mc^2} \beta \cdot \mathbf{E} \quad (6-41)$$

と得られ、2つのベクトル β と E の内積が電子のエネルギー変化を表すことがわかる。

式 (2-37) および式 (2-39)、表 6-1、式 (6-18)、式 (6-27) を使い、三角関数を指数関数を使って表し、リニアアンジュレータの場合に $\beta \cdot E$ 、を計算すると、

$$\begin{aligned}\beta \cdot E &= \frac{K}{\gamma} \cos k_u z \left\{ E_x(z) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \right\} \\ &\approx \frac{K_\perp}{2\gamma} E_\perp(z) e^{i\psi} e^{-i\left\{ kz - \omega t + k_u z - k_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + \omega \delta t \right\}} \\ &\quad \cdot e^{-ik_u z} \left(1 + e^{2ik_u z}\right) e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \\ &= \frac{K_\perp}{2\gamma} E_\perp(z) \kappa^*(z) e^{i\psi} e^{ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} + \text{c.c.}\end{aligned}\tag{6-42}$$

と得られる。ここで、 $\kappa^*(z)$ は式 (6-28) で定義される $\kappa(z)$ の複素共役である。

さて、式 (6-30) と同様に、リニアアンジュレータに関する表式中の $\kappa^*(z)$ について、アンジュレータ磁場 1 周期分の区間での平均値を計算する。式 (B-18) を用いて、

$$\begin{aligned}\overline{\kappa^*}(z) &= \frac{1}{\lambda_u} \int_{z - \frac{\lambda_u}{2}}^{z + \frac{\lambda_u}{2}} \left(1 + e^{-2ik_u z'}\right) e^{-i\omega \delta t(z')} dz' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{K^2}{2 + K^2} \right) \frac{1}{\lambda_u} \int_{z - \frac{\lambda_u}{2}}^{z + \frac{\lambda_u}{2}} \left(1 + e^{-2ik_u z'}\right) e^{-2in k_u z'} dz'\end{aligned}\tag{6-43}$$

となり、ここでも積分部は $\overline{\kappa}(z)$ の時と同様に $n = -1$ および $n = 0$ の場合に λ_u 、それ以外の場合に 0 となり、

$$\begin{aligned}\overline{\kappa^*} &= J_0 \left(\frac{K^2}{2 + K^2} \right) - J_1 \left(\frac{K^2}{2 + K^2} \right) \\ &= \overline{\kappa}_L\end{aligned}\tag{6-44}$$

と得られる。また、ここでも $\overline{\kappa^*}$ が z の関数では無いことに注意。

よって、 $\kappa^*(z)$ をアンジュレータ磁場 1 周期分の区間での平均値をとることで、電子のエネルギー方程式 (6-41) もアンジュレータの種類によらない形で以下のようにまとめて表せる。ただしこのとき、式 (6-24) あるいは式 (6-31) を得た時にならって $\beta \cdot E$ の γ をバンチ平均値 γ_0 で書きかえて、

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dz} &= -\frac{e}{mc^2} \beta \cdot E \\ &= -\frac{eK_\perp \overline{\kappa}}{2mc^2 \gamma_0} E_\perp(z) e^{i\psi} e^{ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} + \text{c.c.}\end{aligned}\tag{6-45}$$

と書ける (Ref. [10]-式 (3-30))。

6.5. マイクロバンチの成長

Ref. [10] の 3.6 節に沿って、マイクロバンチの成長について考える。すなわち、アンジュレータ中を進む電子バンチに関して、分布関数あるいは電子密度分布関数の密度変調を記述する関数 f_1 あるいは n_1 が座標 z に対してどのような微分方程式を満たすのかを考える。ここで、式 (6-12) で定義した電子の分布関数 $f(z, \psi, \gamma)$ に対して、粒子間の衝突を無視した Vlasov 方程式 [33] [34] [35] [36] [37] [38] を適用する。すなわち、

$$\frac{\partial f(z, \psi, \gamma)}{\partial z} + \frac{d\psi}{dz} \frac{\partial f(z, \psi, \gamma)}{\partial \psi} + \frac{d\gamma}{dz} \frac{\partial f(z, \psi, \gamma)}{\partial \gamma} = 0\tag{6-46}$$

に、式 (6-12) を代入して、

$$\begin{aligned}&\left\{ e^{i\psi} \frac{\partial f_1(z, \gamma)}{\partial z} + \text{c.c.} \right\} \\ &+ \frac{d\psi}{dz} \left\{ i e^{i\psi} f_1(z, \gamma) + \text{c.c.} \right\} \\ &+ \frac{d\gamma}{dz} \left\{ \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} + e^{i\psi} \frac{\partial f_1(z, \gamma)}{\partial \gamma} + \text{c.c.} \right\} = 0\end{aligned}\tag{6-47}$$

となる。ここで今、FEL の初期過程を取り扱うことにして、

$$\frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \gg \frac{\partial f_1(z, \gamma)}{\partial \gamma}\tag{6-48}$$

と仮定すれば、

$$\begin{aligned}&\left[\left\{ \frac{\partial f_1(z, \gamma)}{\partial z} + i f_1(z, \gamma) \frac{d\psi}{dz} \right\} e^{i\psi} + \text{c.c.} \right] \\ &+ \frac{d\gamma}{dz} \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} = 0\end{aligned}\tag{6-49}$$

となる。

上式に位相空間 (ψ, γ) における個々の電子の運動方程式 (6-9) およびエネルギー方程式 (6-45) をそれぞれ代入すれば、マイクロバンチの空間 z に対する成長過程は、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k_u} \frac{\partial f_1(z, \gamma)}{\partial z} + 2i f_1(z, \gamma) \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \\ &= \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \frac{1}{\gamma_0} \frac{E_\perp(z)}{2E_1} e^{ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)}\end{aligned}\tag{6-50}$$

と表すことができる (Ref. [10]-式 (3-31))。ここで、 E_1 は、

$$E_1 = \frac{mc^2 k_u}{e \overline{\kappa} K_\perp}\tag{6-51}$$

と定義する (Ref. [10]-式 (3-32))。なお、 E_1 は電場の次元を持つ。

6.6. FEL 微積分方程式

式 (6-50) は、 f_1 、すなわちエネルギー γ における密度変調の複素振幅の成長を記述する方程式である。光電場の複素振幅 $E_\perp$ の成長は式 (6-38) によって記述される。したがって、これらの 2 つの方程式を同時に満たす f_1 および $E_\perp$ を見つけることが次の課題となる。

式 (6-12) を使って、式 (6-38) を密度変調 f_1 の式として書き換えれば、

$$\begin{aligned} \frac{dE_\perp(z)}{dz} &= \frac{\mu_0 ec^2 K_\perp \bar{\kappa}}{4\gamma_0} n_1(z) e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \\ \therefore \frac{1}{k_u} \frac{dE_\perp(z)}{dz} &= E_2(z) \frac{e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)}}{n_0 \gamma_0} \int f_1(z, \gamma) d\gamma \\ \text{where,} \end{aligned}$$

$$E_2(z) = \frac{\mu_0 ec^2 K_\perp \bar{\kappa} n_0}{4k_u} \quad (6-52)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-33)、式 (3-34))。なお、ここで定義した E_2 は電場の次元を持つ。

2 つの方程式 (6-50) および式 (6-52) を解けば、マイクロバンチの成分 f_1 と光電場の複素振幅 $E_\perp$ を決定することができるが、これらはより便利な、 $E_\perp$ に関する単一微積分方程式に変換することができる。

式 (6-50) を関数 f_1 についての方程式とみれば、Ref. [34] 10.2.1.1 節に述べられているように、これは、

$$y' + i\alpha y(z) = f(z)$$

の形をしていることがわかる。このとき、一般解は、

$$\begin{aligned} y(z) &= \int_0^z f(s) \exp \{-i\alpha \cdot (z - s)\} ds + c_1 \exp(-i\alpha z) \\ &\quad (6-53) \end{aligned}$$

となる。ただし、 c_1 は任意の定数。

初期条件として、すなわち、アンジュレータ入り口において電子バンチ内には密度変調が無いものとすれば、 $f_1(0) = 0$ 、すなわち $c_1 = 0$ とできて、式 (6-50) の解は、

$$\begin{aligned} f_1(z, \gamma) &= \int_0^z dz' \left[\left\{ k_u \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \frac{1}{\gamma_0} \frac{E_\perp(z')}{2E_1} e^{ik_u z' \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \right\} \right. \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -i2k_u \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} (z - z') \right\} \Big] \\ &= \frac{k_u}{2\gamma_0} \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \int_0^z dz' \left[\frac{E_\perp(z')}{E_1} \right. \\ &\quad \cdot \exp \left\{ 2ik_u (z' - z) \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} - ik_u z' \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right\} \Big] \\ &\quad (6-54) \end{aligned}$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-35))。これを、式 (6-52) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_u} \frac{dE_\perp(z)}{dz} &= \frac{E_2(z)}{E_1} \frac{k_u}{2\gamma_0^2 n_0} e^{-ik_u z \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)} \int d\gamma \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \int_0^z dz' \\ &\quad \left[E_\perp(z') \exp \left\{ 2ik_u (z' - z) \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} - ik_u z' \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right\} \right] \\ &= \frac{E_2(z)}{E_1} \frac{k_u}{2\gamma_0^2 n_0} \int d\gamma \frac{df_0(\gamma)}{d\gamma} \int_0^z dz' \\ &\quad \left[E_\perp(z') \exp \left\{ ik_u (z' - z) \left(2 \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} - \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right) \right\} \right] \\ &\quad (6-55) \end{aligned}$$

と得られる。これは電場の複素振幅を与える FEL 微積分方程式である。

ここで、以下の式で定義されるパラメータ ρ を導入する。

$$(2\rho\gamma_0)^3 = \frac{E_2}{E_1} \quad (6-56)$$

E_1 および E_2 に、式 (6-51) および式 (6-52) を代入すれば、

$$\rho = \left(\frac{\pi \bar{\kappa}^2 K_\perp^2 j_0}{8\gamma_0^3 k_u^2 I_A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6-57)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-36))。ここで、 $j_0 = ecn_0$ は電子ビームの電流密度、 I_A は Alfvén 電流と呼ばれる電流の次元を持つパラメータで、

$$I_A = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{e} \quad (6-58)$$

と定義される。

ρ は FEL におけるレーザーゲインや光源性能に深く関連する重要な物理量であって、Pierce パラメータあるいは FEL パラメータと呼ばれる。

式 (6-57) において、式 (6-37) に示すように $K_\perp$ がアンジュレータの種類によらないことに気をつけて、式 (6-45) に定義されているそれぞれの $\bar{\kappa}$ を代入すれば、リニアアンジュレータのゲインを ρ_L とヘリカルアンジュレータの FEL ゲインを ρ_H として、その比は、

$$\frac{\rho_L}{\rho_H} = \left\{ J_0 \left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2} \right) - J_1 \left(\frac{\frac{K^2}{2}}{2 + K^2} \right) \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (6-59)$$

と得られる。リニアアンジュレータの偏向定数 K 値に対してプロットすると図 6-1 のようになる。

K 値が 0 に近いときは比が等しく、アンジュレータの種類による FEL ゲインの違いはないが、 K 値が増加するにつれて比は低下し、その後 80% 程度で低下が緩

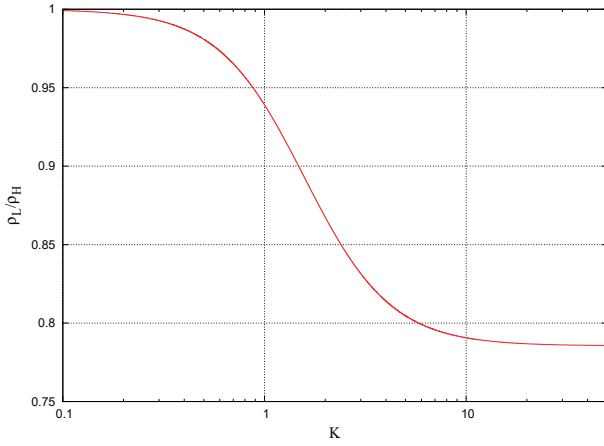


図 6-1. リニアおよびヘリカルアンジュレータの Pierce パラメータの比 (Ref. [10]-図 8 より)。

やかになる。K が大きい条件においては、ヘリカルアンジュレータを採用する方が高いゲインが期待でき、アンジュレータの台数を節約し、全体としてコンパクトな加速器設計ができるなどの利点がある。一方で、一般にヘリカルアンジュレータはリニアアンジュレータに比べて装置が複雑になるなどのデメリットも存在するため、実機の設計にあたっては総合的な検討が必要となる。

さて、z 座標、電子のエネルギー偏差、シード光の波長偏差を、それぞれ ρ と k_u を用いて以下のように規格化する (Ref. [10]-式 (3-37,38,39))。

$$\begin{aligned}\hat{z} &= 2\rho k_u z \\ \hat{\eta} &= \frac{\gamma - \gamma_0}{\rho\gamma_0} \\ \hat{\nu} &= \frac{\omega - \omega_1}{2\rho\omega_1}\end{aligned}\quad (6-60)$$

これらの規格化パラメータを用いて、FEL 微積分方程式 (6-55) を書き換えれば、

$$\begin{aligned}\frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} &= \frac{\rho\gamma_0}{n_0} \\ &\cdot \int d\hat{\eta} \frac{df_0(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' [E_{\perp}(\hat{z}') \exp \{i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})\}]\end{aligned}\quad (6-61)$$

となる。

6.7. FEL 微分方程式

FEL 微積分方程式 (6-61) をラプラス変換を使って解くことができる。実際、初期エネルギー分布 f_0 がより一

般性の高いガウス関数で表される場合には正当な解法であるといえる。しかし、レーザースペクトルのバンド幅や電子エネルギー拡がりの影響を調べるためには、複雑な計算が必要となり、必ずしも FEL における物理的なイメージを理解するのは簡単ではない。

f_0 が特殊な形状で表される場合には、微積分方程式 (6-61) をより単純な線形微分方程式に書き換えることができ、バンド幅やエネルギー拡がりの影響について準解析的な表式を得ることができ、イメージを捉えやすい。ここでは、 f_0 が矩形関数で表される場合を考える。

電子が平均値 γ_0 を中心に幅 $\Delta\gamma$ で一様に分布している場合を考える (Ref. [10] 3.8.2 節)。

今、単位ステップ関数 $\Theta(x)$ を、

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= \begin{cases} 0 & , \text{for } x \leq 0 \\ 1 & , \text{for } 0 \leq x \end{cases} \\ -\Theta(x) &= \begin{cases} 0 & , \text{for } x \leq 0 \\ -1 & , \text{for } 0 \leq x \end{cases}\end{aligned}\quad (6-62)$$

と定義すれば、 γ_0 を中心に幅 $\Delta\gamma$ で大きさ 1 を持つ分布は、

$$\begin{aligned}&\Theta\left[\gamma - \left(\gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right] - \Theta\left[\gamma - \left(\gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right] \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{for } \gamma \leq \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2} \\ 1 & , \text{for } \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2} \leq \gamma \leq \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2} \\ 0 & , \text{for } \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2} \leq \gamma \end{cases}\end{aligned}\quad (6-63)$$

と書ける。この分布を γ に関して積分すれば $\Delta\gamma$ となるため、電子の初期エネルギー分布関数は、

$$f_0(\gamma) = n_0 \frac{\Theta\left[\gamma - \left(\gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right] - \Theta\left[\gamma - \left(\gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}\right)\right]}{\Delta\gamma}\quad (6-64)$$

と書ける。ここで、式 (6-60) を使って引数を $\hat{\eta}$ に書きかえれば、

$$f_0(\hat{\eta}) = n_0 \frac{\Theta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} + \frac{\Delta\gamma}{2}\right) - \Theta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} - \frac{\Delta\gamma}{2}\right)}{\Delta\gamma}\quad (6-65)$$

となる。

定義 (6-62) から明らかなように、単位ステップ関数の

導関数はデルタ関数 δ で表されることを利用すれば、

$$\begin{aligned} \frac{df_0(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}} &= \frac{n_0\rho\gamma_0}{\Delta\gamma} \left\{ \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} + \frac{\Delta\gamma}{2}\right) - \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} - \frac{\Delta\gamma}{2}\right) \right\} \\ &\equiv \frac{n_0}{\Delta\hat{\eta}} \left\{ \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} + \frac{\Delta\gamma}{2}\right) - \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} - \frac{\Delta\gamma}{2}\right) \right\} \\ \text{where, } \Delta\hat{\eta} &\equiv \frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma_0} \end{aligned} \quad (6-66)$$

と書ける (Ref. [10]-式 (3-45))。ここで、 $\Delta\hat{\eta}$ として、規格化されたエネルギー幅を導入した。

式 (6-66) を FEL 微積分方程式 (6-61) に代入して $\hat{\eta}$ についての部分積分を行う。ただし、 $\Delta\hat{\eta}$ は定数であることに気を付けて、

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} &= \frac{\rho\gamma_0}{\Delta\hat{\eta}} \int d\hat{\eta} \left[\left\{ \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} + \frac{\Delta\gamma}{2}\right) \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \delta\left(\rho\gamma_0\hat{\eta} - \frac{\Delta\gamma}{2}\right) \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{i(\hat{z}' - \hat{z})(\hat{\eta} - \hat{\nu})} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6-67)$$

ここで、ディラックのデルタ関数と連続関数の積の積分の形へと変形し、

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} &= \frac{1}{\Delta\hat{\eta}} \left[\int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{i(\hat{z}' - \hat{z})\left(\frac{1}{\rho\gamma_0} - \frac{\Delta\gamma}{2} - \hat{\nu}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{i(\hat{z}' - \hat{z})\left(\frac{1}{\rho\gamma_0} + \frac{\Delta\gamma}{2} - \hat{\nu}\right)} \right] \end{aligned} \quad (6-68)$$

式 (6-66) で導入した規格化されたエネルギー幅 $\Delta\hat{\eta}$ を使って書き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} &= ie^{i\hat{z}\hat{\nu}} \left[\frac{e^{i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} + \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} - \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \right] \\ &\equiv ie^{i\hat{z}\hat{\nu}} G(\hat{z}) \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} G(\hat{z}) &\equiv \frac{e^{i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} + \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \\ &\quad - \frac{e^{-i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} - \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \end{aligned} \quad (6-69)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-46))。

$G(\hat{z})$ を $\hat{z}$ で微分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dG(\hat{z})}{d\hat{z}} &= \frac{d}{d\hat{z}} \left\{ \frac{e^{i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} + \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \right\} \\ &\quad - \frac{d}{d\hat{z}} \left\{ \frac{e^{-i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}}}{i\Delta\hat{\eta}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} - \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} + \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} - \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \end{aligned} \quad (6-70)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{d^2G(\hat{z})}{d\hat{z}^2} &= \frac{i\Delta\hat{\eta}}{4} e^{i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} + \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \\ &\quad - \frac{i\Delta\hat{\eta}}{4} e^{-i\hat{z}\frac{\Delta\hat{\eta}}{2}} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' E_{\perp}(\hat{z}') e^{-i\hat{z}'(\hat{\nu} - \frac{\Delta\hat{\eta}}{2})} \\ &\quad + E_{\perp}(\hat{z}) e^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \end{aligned} \quad (6-71)$$

ここで、式 (6-69) の各式を使って書きかえれば、

$$\begin{aligned} \frac{d^2G(\hat{z})}{d\hat{z}^2} &= \left\{ i \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} + E_{\perp}(\hat{z}) \right\} e^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \end{aligned} \quad (6-72)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-47))。

次に式 (6-69) を $\hat{z}$ で 2 回微分する。

$$\frac{d^2 E_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} = -\hat{\nu} e^{i\hat{z}\hat{\nu}} G(\hat{z}) + i e^{i\hat{z}\hat{\nu}} \frac{dG(\hat{z})}{d\hat{z}} \quad (6-73)$$

これを变形して、式 (6-69) を使えば、

$$\frac{dG(\hat{z})}{d\hat{z}} \frac{dG(\hat{z})}{d\hat{z}} = -\hat{\nu} e^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} - i e^{-i\hat{z}\hat{\nu}} \frac{d^2 E_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \quad (6-74)$$

と得られる。

よって、

$$\frac{d^3 E_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}^3} - 2i\hat{\nu} \frac{d^2 E_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} - \left\{ \hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \right\} \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} = iE_{\perp}(\hat{z}) \quad (6-75)$$

と、光電場の複素振幅 $E_{\perp}(\hat{z})$ に関する微分方程式が得られる (Ref. [10]-式 (3-48))。

6.8. FEL 微分方程式の解

式 (6-75) の解は未知のパラメータ Λ を用いて一般的に、

$$E_{\perp}(\hat{z}) \propto e^{\hat{\Lambda}\hat{z}} \quad (6-76)$$

と仮定できる。式 (6-75) に代入すれば、

$$\hat{\Lambda}^3 - 2i\hat{\nu}\hat{\Lambda}^2 - \left\{ \hat{\nu}^2 - \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \right\} \hat{\Lambda} = i \quad (6-77)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-49))。今、 $\hat{\Lambda}$ を、相対振動数 $\hat{\nu}$ の光が z 方向へ進むときの波数と考え、上式は光の分散関係を表すことから、FEL 分散関係式などと呼ばれる。FEL 分散関係式は式 (D-1) に示す 1 変数 3 次方程式であるから、一般に式 (D-18) に示す 3 つの解を持つ。解を $\hat{\Lambda}_1$ 、 $\hat{\Lambda}_2$ 、 $\hat{\Lambda}_3$ とおけば、1 変数 3 次方程式における解と係数の関係式 (D-19) から、

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2 \hat{\Lambda}_3 &= i \\ \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_2 \hat{\Lambda}_3 + \hat{\Lambda}_3 \hat{\Lambda}_1 &= -\hat{\nu}^2 + \frac{\Delta\hat{\eta}^2}{4} \\ \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 + \hat{\Lambda}_3 &= 2i\hat{\nu} \end{aligned} \quad (6-78)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-50))。

$E_{\perp}(\hat{z})$ は、FEL 分散関係式の解 $\hat{\Lambda}_1$ 、 $\hat{\Lambda}_2$ 、 $\hat{\Lambda}_3$ を用いて、

$$E_{\perp}(\hat{z}) = \sum_{j=1}^3 E_{\perp j} e^{\hat{\Lambda}_j \hat{z}} \quad (6-79)$$

と表すことができる。ここで、 $E_{\perp j}$ は $E_{\perp}(\hat{z})$ の初期条件によって決定される係数である。

様々な初期条件が考えられるが、もっとも一般的なものとして、以下の 3 つの条件を初期条件にもつ場合について考える (Ref. [10] 3.9 節)。

$$\begin{aligned} 1) & E_{\perp}(0) = E_0 \\ 2) & \left. \frac{dE_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}} \right|_{\hat{z}=0} = 0 \\ 3) & \left. \frac{d^2 E_{\perp}(\hat{z})}{d\hat{z}^2} \right|_{\hat{z}=0} = 0 \end{aligned} \quad (6-80)$$

条件 1) では、アンジュレータの入口 $\hat{z} = 0$ において、電場の複素振幅 $E_{\perp}(\hat{z} = 0)$ が E_0 で、式 (6-60) 第 3 式より、振動数が $\omega = \omega_1(1 + 2\rho\hat{\nu})$ であるシード光が電子ビームと同期して入射される。このとき、式 (6-79) で $\hat{z} = 0$ として、条件 1) を適用すれば、

$$E_{\perp 1} + E_{\perp 2} + E_{\perp 3} = 0 \quad (6-81)$$

となる。

条件 2) の $E_{\perp}(\hat{z})$ の 1 次微分が 0 という式は、式 (6-34) より、 $n_1 = 0$ 、すなわち電子ビームのマイクロバンチ成分が 0 であることを意味することがわかる。このとき、式 (6-79) より、

$$\hat{\Lambda}_1 E_{\perp 1} + \hat{\Lambda}_2 E_{\perp 2} + \hat{\Lambda}_3 E_{\perp 3} = 0 \quad (6-82)$$

となる。

条件 3) の $E_{\perp}(\hat{z})$ の 2 次微分が 0 という式は、マイクロバンチ成分の微分 (成長率) が 0 であることを表しており、これは電子ビームにエネルギー変調が無いことを意味する。このとき、式 (6-79) より、

$$\hat{\Lambda}_1^2 E_{\perp 1} + \hat{\Lambda}_2^2 E_{\perp 2} + \hat{\Lambda}_3^2 E_{\perp 3} = 0 \quad (6-83)$$

となる。

このように、初期条件 2) および 3) は、通常の (増幅される光の波長スケールにおいていかなる変調も誘起されていない) 電子ビームによる FEL 増幅を調べる上で理にかなったものである。

上記の 3 つの条件式は、以下のように行列を使って表すことができる。

$$M \begin{pmatrix} E_{\perp 1} \\ E_{\perp 2} \\ E_{\perp 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-84)$$

ここで、行列 M は、

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{\Lambda}_1 & \hat{\Lambda}_2 & \hat{\Lambda}_3 \\ \hat{\Lambda}_1^2 & \hat{\Lambda}_2^2 & \hat{\Lambda}_3^2 \end{pmatrix} \quad (6-85)$$

と定義する。この行列を用いて、係数 $E_{\perp 1,2,3}$ は、

$$\begin{aligned} E_{\perp 1} &= (M^{-1})_{11} E_0 \\ E_{\perp 2} &= (M^{-1})_{21} E_0 \\ E_{\perp 3} &= (M^{-1})_{31} E_0 \end{aligned} \quad (6-86)$$

と計算できる。ここで M^{-1} は 3×3 行列 M の逆行列であり、

$$\begin{aligned} |M| &= (\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2)(\hat{\Lambda}_2 - \hat{\Lambda}_3)(\hat{\Lambda}_3 - \hat{\Lambda}_1) \end{aligned} \quad (6-87)$$

となるから、

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{11} &= \frac{\hat{\Lambda}_2 \hat{\Lambda}_3}{(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2)(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_3)} \\ (M^{-1})_{21} &= \frac{-\hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_3}{(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2)(\hat{\Lambda}_2 - \hat{\Lambda}_3)} \\ (M^{-1})_{31} &= \frac{\hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2}{(\hat{\Lambda}_2 - \hat{\Lambda}_3)(\hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_3)} \end{aligned} \quad (6-88)$$

となる。

ここで式 (6-78) の第 1、3 式を使って変形すれば、

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{11} &= \frac{1}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_1 - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_1^2} \\ (M^{-1})_{21} &= \frac{1}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_2 - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_2^2} \\ (M^{-1})_{31} &= \frac{1}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_3 - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_3^2} \end{aligned} \quad (6-89)$$

と得られる。すなわち、

$$E_{\perp}(\hat{z}) = E_0 \sum_{j=1}^3 \frac{e^{\hat{\Lambda}_j \hat{z}}}{1 - 2i(\hat{\Lambda}_j - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_j^2} \quad (6-90)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-51))。これが、条件 1) ~ 3) を満たす FEL 方程式の解である。

6.9. 増幅率の計算例

式 (6-90) の形から、光電場の複素振幅が初期振幅 E_0 から $\hat{z}$ が増す (z 方向へ伝播する) につれて指数関数的に増加することがわかる。さらに、振幅の増幅率は FEL 分散関係式 (6-77) を解くことによって得られる。

FEL の増幅過程を Ref. [10] 3.10 節にしたがって、条件「 $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ 」のもとで計算してみる。

条件「 $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ 」は、エネルギーが完全に一樣な電子ビームと波長 λ_1 を持つシード光がアンジュレータ

に入射された場合に相当する。このとき FEL 分散関係式 (6-77) は大幅に簡略化されて、

$$\hat{\Lambda}^3 = i \quad (6-91)$$

となる。これは式 (D-15) と同形の方程式であり、その解は、

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_1 &= -i \\ \hat{\Lambda}_2 &= \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \\ \hat{\Lambda}_3 &= \frac{\sqrt{3} + i}{2} \end{aligned} \quad (6-92)$$

となる。このとき、簡略化された FEL 分散関係式と $\hat{\nu} = 0$ とから、

$$\begin{aligned} 1 - 2i(\hat{\Lambda}_j - i\hat{\nu})\hat{\Lambda}_j^2 &= 1 - 2i\hat{\Lambda}_j^3 \\ &= 3 \end{aligned} \quad (6-93)$$

と得られるので、式 (6-90) にそれぞれ代入すれば、電場の成長を記述する方程式は、

$$\begin{aligned} E_{\perp}(\hat{z}) &= \frac{E_0}{3} \left[\exp(-i\hat{z}) + \exp\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2}\hat{z}\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\hat{z}\right) \right] \end{aligned} \quad (6-94)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-52))。

光のパワーは $|E_{\perp}(\hat{z})|^2$ に比例するので、これを $|E_0|^2$ で規格化したものを計算する。複素数と複素指数関数の性質を使って、

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_{\perp}(\hat{z})}{E_0} \right|^2 &= \frac{1}{9} \left[3 + 2 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right) + \left\{ \exp\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right) + \left\{ \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z}\right) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (6-95)$$

となる。これを $\hat{z}$ の関数としてプロットすれば、図 6-2 のようになる。

このように、レーザーパワーをアンジュレータ軸に沿った座標 z の関数としてプロットしたグラフを FEL におけるゲイン曲線という。

FEL における光パワーは、増幅率が高い領域 (高ゲイン領域)、すなわち $\hat{z}$ が大きくなるにつれて指数関数的に増大する関数となる。式 (6-94) から明らかなように、

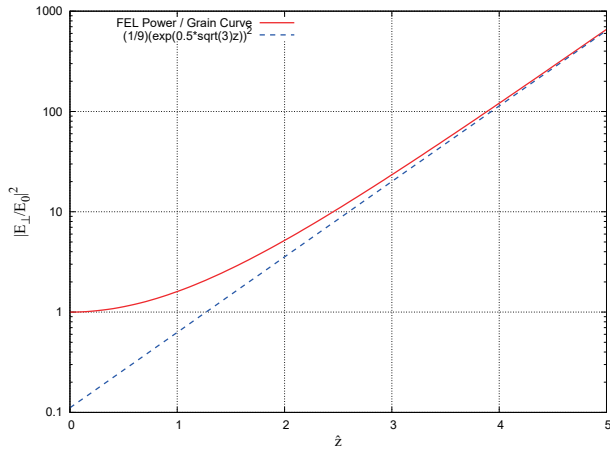


図 6-2. $\hat{\nu} = \Delta\hat{\eta} = 0$ のときのゲイン曲線 (Ref. [10]-図 9 より)。

この増大に寄与する項は式 (6-94) の第 3 項であって、実効的な入力パワーは $E_0^2/9$ である。すなわち、シード光のパワーのうちの 1/9 のみが増幅に寄与する。これ以外の第 1 項は定常的な光の伝播を、第 2 項は指数的な減衰を表す。

高ゲイン領域、すなわち z 方向に伝搬し、式 (6-94) の第 3 項が第 1 項および第 2 項に対して十分に大きくなった領域では $|E_{\perp}(z)/E_0|^2$ の最終項が支配的となり、

$$\left| \frac{E_{\perp}(z)}{E_0} \right|_{\text{HG}}^2 \approx \frac{1}{9} \left\{ \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z \right) \right\}^2 \quad (6-96)$$

と近似できる。このことは、図 6-2 中で、ゲイン曲線がこの直線に漸近していく様子で理解することができる。

式 (6-60) を使って、 $|E_{\perp}(z)/E_0|^2_{\text{HG}}$ の表式中の $\hat{z}$ を z へ戻せば、

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_{\perp}(\hat{z})}{E_0} \right|_{\text{HG}}^2 &= \frac{1}{9} e^{z/L_g} \\ \text{where, } L_g &= \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho} \end{aligned} \quad (6-97)$$

と得られる (Ref. [10]-式 (3-53))。ここで、 L_g はゲイン長と呼ばれる量で、光のパワーが e 倍になるために必要なアンジュレータ長を表す。

7. 多様な装置の開発と利用

これまで、放射光に関する物理の基礎に始まり、挿入光源が持つ周期磁場における放射光特性について概説してきた。本章では、挿入光源の装置について概説する。

磁石の選定から始まる磁気回路設計、磁気回路が生じる磁気力の評価、磁気回路を精密に動かすための機械的な機構、磁場分布の測定および調整手法、加速器への設置と運用など広範かつ詳細な解説が Ref. [11] としてすでにまとめられているので参照いただきたい。

ここで紹介する内容は、私の不勉強のために、これまでで広範に行われている、あるいは行われてきた挿入光源開発のごくごく一部しかカバーできていない。加えて、私個人の見解が多分に含まれていることを、どうかご容赦いただきたい。

挿入光源を開発するにあたっては、ユーザーが展開するサイエンスを推進するために必要とされる光源指標を実現することが重要である。しかし、これまでの概説で触れてきたように、さまざまな光源指標が光源加速器で生成可能な電子エネルギー、電子ビームの電流値、電子バンチ電荷、電子バンチ長といった電子ビームパラメータと密接に関係しているため、それらを踏まえて各種の設計案の中で実現可能な光源指標を提示しながらユーザーとの対話を行い、装置の設計を固めていく。

挿入光源には磁石列と呼ばれる周期磁場 (単極のものもあるがここでは周期磁場と書く) を発生する磁気回路が備わっている。

永久磁石のみを並べた磁石列を備えたものを Pure Permanent Magnet (PPM) 型と呼ぶ。

永久磁石ベースのものには、磁石材質としてネオジム (Nd) 磁石が多く採用されているが、放射線耐性の高い SmCo 磁石、Nd 磁石にジズプロシウム (Dy) を拡散したものなど多様な製品がある [39–41]。

鉄やパーメンジュールなどの金属製の磁極を挟みこんで磁場強度を増した磁石列を備えたものをハイブリッド (Hybrid) 型 [42,43] と呼び、永久磁石を液体窒素温度程度に冷却することで磁場強度 (残留磁束密度) と放射線耐性 (保磁力) を向上した冷却型永久磁石型 (Cryogenic Permanent Magnet, CPM) [44–46] などと呼ぶ。CPMU では、Nd 磁石で発生するスピン転向転移 (Spin Reorientation Transition) と呼ばれる磁気的な不安定現象を避けるために、プラセオジム (Pr) 磁石が多く採用される。

PPM 型磁石列では、より効率的に強い磁場を生成することができるハルバッハ (Halbach) 配列 [47] が採用されることが多く、磁化ベクトルを 45 度ずつ回転させた 4 個の磁石で磁石列 1 周期分を構成することが効率的である [11]。直方体の磁石の面に並行あるいは垂直な磁化ベクトルを有する磁石を使うことが多いが、放射線耐性の向上など運用面での複数の利点が得られる、磁石の面に斜めに磁化ベクトルを有する磁石を並べた磁石列を有するアンジュレータも開発されている [48–50]。

また、磁石列と電子ビームとの間に真空容器が無い、すなわち、電子ビームと同じ真空空間に磁石列が配されているものは真空封止 (in-vacuum, IV) 型や Short Gap 型などと呼ばれる [51, 52]。IV 型挿入光源は、磁石列を電子ビームにより近づけることができるため、周期の短い (小さな体積の磁石から成る) 磁石列でも十分な振幅を持った周期磁場を生成できることが大きなメリットの一つであり、NSLS での SPring-8 で開発された IVU (周期長 11 mm、ギャップ 3.3 mm) の運用例 [53] や、東北大の t-ACTS で運用された極短周期アンジュレータ (周期長 4 mm、ギャップ 1.5 mm) [54] は興味深い。

永久磁石の代わりに常電導電磁石を用いた電磁石型がある。常電導コイルに加えて、さらに高い電流を流すことが可能な超電導 (Super conducting, SC) コイルを用いた装置開発が近年精力的に進んでいる [55]。

SC 型装置は、1979 年に VEPP-3 で運用開始されたウィグラー [56] をはじめ、世界各国で開発されている [57]。SPring-8 で開発された 10 T のウィグラー [58] や KEK での Nb₃Sn を用いた 10 T のウィグラーの開発 [59] など、小型リングでの高エネルギー光子生成や、大型リングで極短波長を得る目的などで開発されている。

SC 型アンジュレータ (SCU) での短周期化を目指した開発では、周期長が 8.8 mm [60] や 3.8 mm [61] といった例がある。

European-XFEL では周期長 18 mm、最大磁場振幅 1.82 T (磁石列ギャップ 6.5 mm、真空ギャップ 5 mm) と、K 値が最大 3.06 にも達する SCU が開発されている [62, 63]。SOLEIL で開発されている 2 m Pr₂Fe₁₄B CPMU (周期長 18 mm) では、磁石列ギャップ 5.5 mm で K 値は 1.93、FEL を想定したギャップ 3 mm で K 値は 3.21 となる [45] ことと比較すれば、CPMU に比する K 値を目指した SCU といえる。

2.5. 節などで述べたように、電子ビームの軌道を制御することで高輝度光の偏光を制御することができる。そのために、対向する 2 列の磁石列だけではなく、4 列の永久磁石型磁石列を用いた Apple-II [64] や Apple-X [65]、6 列の磁石列を用いた Figure-8 [66]、電磁石型の EPU [67, 68] など複数の磁石列を配置した装置が開発されている。

また、SPring-8 の BL24XU では真空封止型の Figure-8 [69] が運用されており、真空封止型の Apple-II も開発されている [70, 71]。

SC 型でもヘリカルアンジュレータ開発が行われており [55]、Hybrid planar-tilted 型 [72]、Double-herical 型 Apple/Delta 型 [73–75]、Double-planar 型 [76] と多くの提案がある。

さらに、永久磁石と電磁石を合わせたものも開発され

ている [77]。

放射光リングに設置された多くのビームラインでは単一のアンジュレータから得られる光が実験装置に導入されて使用されているが、直列 (タンデム) に設置した複数のアンジュレータからの光を使う例もある。

2 台のプラナーアンジュレータを使って偏光制御を行う Crossed-Undulator [78, 79] や Crossed-Undulator を高速偏光切り換えとして利用する方式 [80] などが提案された。その後、2 台の大気型ヘリカルアンジュレータ [81] から 2 台の真空封止型ヘリカルアンジュレータ [82] へと改造された SPring-8 の BL23SU や、2 台の Apple-II 型アンジュレータを配置した PF リングの BL16 [83] などが建設されている。

また、シンクロトロンで、複数の直線部で生成した光を一つのビームラインで利用している例もある [84]。

また、磁場分布を単調な周期で構成せず、周期長を少しづつ変えたり、磁石の強度を不均一にした磁石列をそなえた Quasi Periodic Undulator (QPU) も開発されている [85–87]。高次成分を抑制したりするなど、放射スペクトル特性を制御している。

挿入光源磁場分布周期を可変する機構を備えた装置開発も行われてきている [88–91]。

挿入光源の持つ磁石列間には巨大な磁気力が発生するため、磁石列を精密に保持するために重厚な梁や柱を使った架台が使われる。そのため、架台全体の重量は重く、製造コストも増す。これらを抑制するために、磁気力を相殺する機構を備えた挿入光源も開発されていて、パネ [92, 93] や磁石 [94] を使ったものがある。

装置開発と言って良いのか見方が分かれるとは思われるが、光共振器型 FEL [95] やレーザースライシング [96, 97] など、挿入光源にレーザー光を組み合わせることで、挿入光源単独では生成しえない光源が得られる。また、コヒーレントシンクロトロン光源といった共通点では、アト秒領域の超短パルス FEL の開発 [98] も近年活発に進められていていずれも興味深い。

PETRA-III [99] や NSLS-II [100] などの新しいリングでも利用されている Damping Wiggler は、電子ビームの低エミッタンス化を図る目的で運用されているウィグラーで、開発中の電子蓄積リングである PAL-4GSR でも利用検討がなされている [101]。FEL などのように電子ビームに作用を与えることを主目的に運用されており、光源装置にとどまらない利用方法と言える。

最後に、既存の磁気回路の範疇に収まらない開発例を挙げて本講義を締めくくりたい。自分のこれまでの研究に関連のあるキーワードが目止まったもので、ここで挙げた例以外にももちろん膨大な新奇開発例があること

を断らせていただく。

私自身、学生時代にその分野に身を置いて研究のいろはを学ばせていただいたプラズマ波をアンジュレータとして利用する Plasma (wave) undulator [102, 103] には大きな関心を寄せている。そして、これもまた学生時代に参加した Inverse Smith-Purcell の実験を思い起こされる Smith-Purcell FEL [104]、そして、恩師の研究テーマに近い Dielectric-grating-waveguide FEL [105] など、新しいアイディアが続々と提案されており、今後の展開が期待される。

Appendix A. ガンマ関数

Ref. [20] の 7 章にしたがってガンマ関数を導入する。

A.1. ガンマ関数

Ref. [20] の 7.1 節にならってガンマ関数を導入する。ガンマ関数の定義のしかたはいくつかあるが、積分によって、

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{A-1})$$

と定義できる。右辺は実数 t に関する 0 から ∞ までの積分である。この積分が下限で収束するためには、 $x > 0$ が必要である。あるいは x として複素数を許せば、 x の実部が正である、

$$\text{Re } x > 0 \quad (\text{A-2})$$

という条件が課される。 x の虚部は収束に関係ない。すなわち、式 (A-1) による $\Gamma(x)$ の定義域は、複素 x 平面の右半分である（虚軸を含まない）。

この定義から、ガンマ関数に関するいくつかの性質が導き出される。まず、部分積分によって、

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A-3})$$

という漸化式が得られる。なお、上式の変形において、定積分部分は条件 (A-2) により 0 である。これはガンマ関数のもっとも基本的な性質である。また、 $x = 1$ のとき、式 (A-1) より、

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{A-4})$$

であることがわかる。これを式 (A-3) と組み合わせれば、正の整数 n に対して、

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A-5})$$

となる。ガンマ関数は階乗 $n!$ を複素数へ拡張したものであることがわかる。ただし、右辺と左辺で n が 1 だけずれていることは注意を要する。

また、 $x = 1/2$ のときには、式 (A-3) の右辺第 2 式の第 1 項が消えることに気をつけて第 2 および第 3 式を使えば（あるいは左辺と右辺第 1 式に $x = x - 1$ を代入すれば）、

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A-6})$$

となる (Ref. [20] の式 (7.5))。なお、 $u = \sqrt{t}$ ($du = (1/2)t^{-1/2}dt$) と置換すればガウス積分の形になって、ガウス関数が偶関数であることに注意して積分範囲に合わせて $1/2$ を掛ける。

ここまでの話では、引数 x が複素平面の右半分に限定されている。それは、 $\Gamma(x)$ を積分の形 (A-1) で定義したからである。しかし、漸化式 (A-3) を利用して、

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad (\text{A-7})$$

とすれば、定義域を拡大できる。このような定義域の拡大を一般に解析接続という。式 (A-7) によって定義域を左側へ拡大すれば、ついには複素 x 平面全体（ただし特異点を除く）で $\Gamma(x)$ が定義される。

式 (A-7) で x を 0 に近づければ、式 (A-4) より、

$$\Gamma(x)|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{x} \quad (\text{A-8})$$

であることがわかる。すなわち、 $\Gamma(x)$ は原点に極を持つ。式 (A-7) によって左半面へ定義域を拡大していけば、 x が負の整数のところにも極が現れる。一般に $x = -n$ の付近で、

$$\Gamma(x)|_{x \sim -n} \sim \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} \quad (\text{A-9})$$

となっている。

式 (A-1) を使って $x > 0$ の領域を数値計算し、さらに、式 (A-7) を使って $x > 0$ の領域の数値を $x < 0$ の領域へ解析接続した結果を図 A-1 に示す。

A.2. 漸近展開、スターリングの式、鞍点法

Ref. [20] の 7.5 節にならって漸近展開についてとりあげる。漸近展開とは、一般に十分大きな引き数に対して成り立つ近似式を意味する。ここでは十分大きな実数 x について成り立つ $\Gamma(x)$ の近似式を求める。ここで採用する方法は一般に鞍点法とよばれ、ガンマ関数に限らず大きな引き数に対して近似式を求める際に広く用いられる便利なものである。

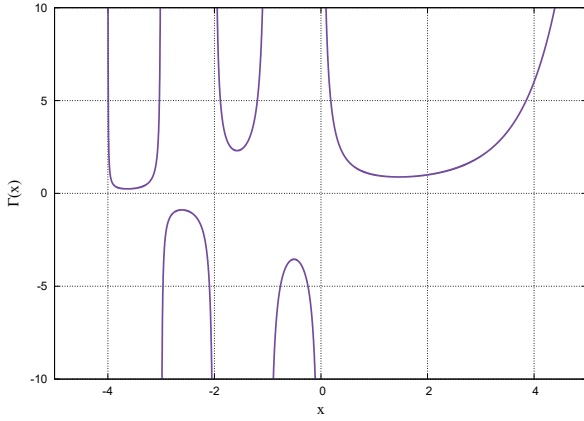


図 A-1. $\Gamma(x)$ のプロット。([20] の図 7-1 より)

ガンマ関数の定義 (A-1) で、 $x \rightarrow x+1$ として、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \quad (\text{A-10})$$

という積分 (Ref. [20] の式 (7.30)) を考える。ここで被積分関数を書き換えて、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-f(t)} dt$$

where $f(t) \equiv t - x \log t$ (A-11)

とする (Ref. [20] の式 (7.31,32))。そして、 $f(t)$ がどんな関数であるかを調べる。

$f(t)$ の導関数は、

$$f'(t) = 1 - \frac{x}{t}$$

$$f''(t) = \frac{x}{t^2} \quad (\text{A-12})$$

であるから、 $f(t)$ は $t = x$ に最小値を持つ下に凸の関数である。図 A-2 に、 $x = 100$ とした場合をプロットした。

最小値 $f(t = x)$ のまわりでテイラー展開すれば、

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{2x}(t-x)^2 - \frac{1}{3x^2}(t-x)^3 + \dots \quad (\text{A-13})$$

となる (Ref. [20] の式 (7.33))。被積分関数 $e^{-f(t)}$ は、 $t = x$ の前後の幅 $\sqrt{x}$ 程度の区間だけで大きな値を持ち、それ以外では小さい (図 A-2)。積分に効くのは、 x の付近の t だけである。そして、 x が大きければ、このような区間で式 (A-13) の 3 次以上の項を無視できる。なぜなら、

$$|t - x| \sim \sqrt{x} \quad (\text{A-14})$$

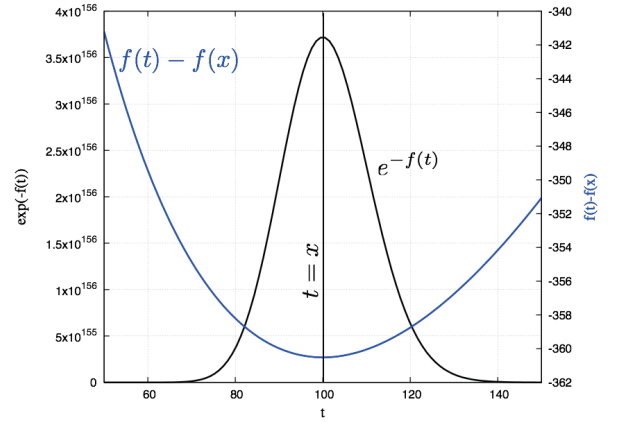


図 A-2. 被積分関数および 1 次の項との差。([20] の図 7-3 より)

とおくと、2 次の項の大きさが、

$$\frac{1}{2x}(t-x)^2 \sim 1 \quad (\text{A-15})$$

となるのに比べて、3 次の項の大きさは、

$$\frac{1}{3x^2}(t-x)^3 \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \ll 1 \quad (\text{A-16})$$

となるからである (x は十分に大きな実数)。その結果、

$$\Gamma(x+1) \sim e^{-f(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \quad (\text{A-17})$$

と近似できる (Ref. [20] の式 (7.34))。右辺の積分で積分範囲の下限を 0 から $-\infty$ に変更したが、それにとともなう誤差は、図 A-2 から明らかなように x が大きければ無視できる。

式 (A-17) を計算して、

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \quad (\text{A-18})$$

と得られる (Ref. [20] の式 (7.35))。これをスターリングの公式という。さらに良い近似式が欲しければ、式 (A-13) の展開で 3 次以上の項も取り入れればよい。途中を省略して、結果は、

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} \dots \right\} \quad (\text{A-19})$$

である (Ref. [20] の式 (7.36))。

A.3. 無限累積表示とガンマ関数の計算法

Ref. [20] の 7.6 節にならってガンマ関数の累積表示を取りあげ、これがガンマ関数の数値計算に利用されることを示す。

はじめに、ガンマ関数についてこれまでに明らかになった性質を念のため確認しておく。まず、引数 x が正の整数のときには、式 (A-5) が成り立つ。また、 $x = 0, -1, -2, \dots$ では、式 (A-9) が成り立つ。そして、 $x \rightarrow \infty$ では、漸近展開 (A-19) が成り立つ。

以上の性質から、 $\Gamma(x)$ を複素数 x の解析関数と見て、その形を、

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (\text{A-20})$$

と表すことができる (Ref. [20] の式 (7.37))。実際、この式で $x = 0$ とおけば、

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!} = 1 \quad (\text{A-21})$$

となることが容易に確かめられる。また、式 (A-20) より、

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad (\text{A-22})$$

となるから、式 (A-3) も成り立つ。また、上式と式 (A-21) を使って、

$$(x+n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (\text{A-23})$$

と、式 (A-9) が成り立つことも確かめられる。これらの確認ができたことから、式 (A-20) が式 (A-1) に一致することが保証される。式 (A-20) の無限累積はガウスによる。この無限累積は、初めから複素 x 平面全体で定義されており、式 (A-1) よりも定義域が広い。

式 (A-20) の逆数をとれば、

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})n^{-x} \quad (\text{A-24})$$

ここで、

$$\log n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_n$$

とおけば、 $n \rightarrow \infty$ で $\gamma_n \rightarrow \gamma_E$ となる。また、対数の性質を使って、

$$n^{-x} = e^{\gamma_n x} \prod_{p=1}^n e^{-x/p}$$

となるので、これを式 (A-24) に代入すれば、ワイヤシュトラスの無限累積、

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma_E x} \prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \right\} \quad (\text{A-25})$$

が得られる (Ref. [20] の式 (7.38))。ただし、 γ_E はオイラーの定数、

$$\begin{aligned} \gamma_E &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) \\ &= 0.5772156649\dots \end{aligned} \quad (\text{A-26})$$

である (Ref. [20] の式 (7.39))。

ワイヤシュトラスの無限累積 (A-25) は、小さな x に対して $\Gamma(x+1)$ の数値を求めるのに使われる。実際には対数をとる方がわかりやすく、

$$\log \Gamma(x+1) = -\gamma_E x + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{x}{p} - \log \left(1 + \frac{x}{p}\right) \right\} \quad (\text{A-27})$$

となる (Ref. [20] の式 (7.40))。

ここで、 $f(x) = \log(1+x)$ を x についてべき級数展開 ($x=0$ のまわりで x についてテイラー展開) すれば、

$$f^n(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (\text{A-28})$$

となるから、 $f(x/p) = \log\{1+(x/p)\}$ を x についてべき級数展開すれば、

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{x}{p}\right) &= \frac{x}{p} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{p}\right)^2 + \frac{2!}{3!} \left(\frac{x}{p}\right)^3 - \dots \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

となり、

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{x}{p} - \log \left(1 + \frac{x}{p}\right) \right\} &= \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{p}\right)^n \right] \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

である。よって、式 (A-27) は、

$$\log \Gamma(x+1) = -\gamma_E x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n!} (-x)^n \quad (\text{A-31})$$

と得られる (Ref. [20] の式 (7.41))。ただし、

$$\zeta(n) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} \quad (\text{A-32})$$

はリーマンのツェータ関数である。

A.4. ディガンマ関数

Ref. [20] の 7.7 節に示されているように、ガンマ関数の対数微分を $\psi(x)$ と書いてディガンマ関数と呼ぶ (Ref. [20] の式 (7.43))。

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (\text{A-33})$$

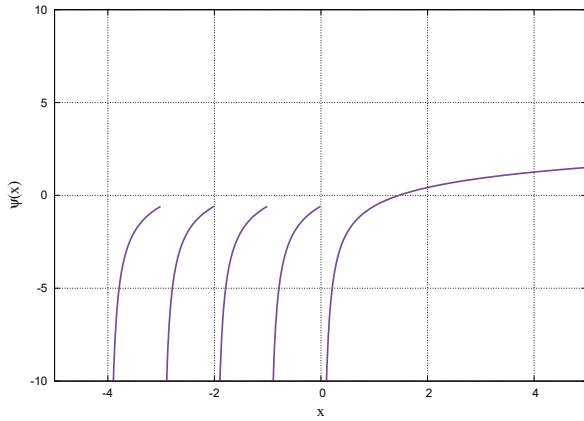


図 A-3. $\psi(x)$ のプロット。

図 A-3 に図 A-1 と同様に計算したディガンマ関数 (A-33) のプロット結果を示す。

ディガンマ関数は、ガンマ関数に比べて使われることは少ないが、ある種の特殊関数（たとえばベッセル関数）の定義に補助的に使われる。ディガンマ関数の導関数 $\psi'(x)$ をトリガンマ関数という。そして、これらの関数をポリガンマ関数と総称する。

ポリガンマ関数の性質は、すべてガンマ関数の性質から派生する。たとえば、漸化式 (A-3) からは、

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \quad (\text{A-34})$$

が得られる (Ref. [20] の式 (7.44))。ディガンマ関数は整数の引数に対して使われることが多い。 $x = 1$ のとき、

$$\psi(1) = -\gamma_E \quad (\text{A-35})$$

である (Ref. [20] の式 (7.45))。ただし、 γ_E は式 (A-26) で表されるオイラーの定数である (Ref. [20] の式 (7.39))。これは、式 (A-31) の両辺を微分して $x = 0$ とおいて得られる。また、式 (A-34) と式 (A-35) から、

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E \quad (\text{A-36})$$

となる (Ref. [20] の式 (7.46))。

Appendix B. ベッセル関数

Ref. [20] の 8 章にしたがってベッセル関数を導入する。

B.1. 整数次のベッセル関数

Ref. [20] の 8.1 節にならって整数次のベッセル関数を導入する。ベッセル関数の母関数は、

$$g(t, x) \equiv \exp \left\{ \frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (\text{B-1})$$

である。指数関数を t のべき級数に展開したときの展開係数として n 次ベッセル関数 $J_n(x)$ を定義している。なお、正のべきだけではなく負のべきも含まれている。

式 (B-1) の定義から、 $J_n(x)$ の具体的な形を求める。それには、母関数を x と t の両方について展開する。母関数を、

$$g(t, x) = \exp \left(\frac{xt}{2} \right) \exp \left(-\frac{x}{2t} \right) \quad (\text{B-2})$$

と変形して、2 つの指数関数をべき級数に展開する。なお、以下の計算では階乗記号と 2 重和が現れるが、和の上限と下限を書かない。その代わりに、

$$\frac{1}{-1!} = \frac{1}{-2!} = \dots = 0 \quad (\text{B-3})$$

とする。指数関数を展開した結果は、

$$g(t, x) = \sum_p \sum_s \frac{(-1)^s}{p!s!} \left(\frac{x}{2} \right)^{p+s} t^{p-s} \quad (\text{B-4})$$

となる。これを式 (B-1) と比較できるようにするために、

$$p - s = n \quad (\text{B-5})$$

とおいて、 p についての和を n についての和で置き換える。すると、

$$g(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_s \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2s} \right\} t^n \quad (\text{B-6})$$

となって、

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2s} \quad (\text{B-7})$$

が得られる。これがベッセル関数のあらわな表式である。なお、 $n < 0$ の場合には式 (B-3) にしたがって、 $s = 0, 1, 2, \dots, |n| - 1$ までの項が 0 であり、 $s = |n|$ が初項となる。そこで、

$$s = r + |n| \quad (\text{B-8})$$

とすれば、

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (\text{B-9})$$

という性質がある。

次に、Ref. [30] にならって、式 (B-1) の両辺を t で微分すれば、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} J_n(x) t^{n-2} \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

よって、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x) (n+1) t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} J_{n+2}(x) t^n \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

とできる。すなわち、

$$(n+1) J_{n+1}(x) = \frac{x}{2} \{J_n(x) + J_{n+2}(x)\} \quad (\text{B-12})$$

と得られる。さらに $n \rightarrow n-1$ とシフトすれば、

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (\text{B-13})$$

と、 n 次、 $(n+1)$ 次、 $(n+2)$ 次ベッセル関数の間の関係式が得られる (Ref. [3](5.14) の第 2 式)。

さらに、Ref. [30] にならって式 (B-1) の両辺を x で微分する。このとき、ベッセル関数の x に関する微分を $J'(x)$ と書けば、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} J_n(x) t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} J_n(x) t^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

よって、ベッセル関数の x に関する一次導関数は、

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\} \quad (\text{B-15})$$

という関係式で表される。

B.2. ベッセル関数の積分表示

Ref. [20] の 8.1 節例題にならってベッセル関数の積分表示を導出する。母関数 (B-1) で $t = e^{i\theta}$ とおけば、ド・モアブルの公式 (C-3) を使って、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \exp(ix \sin \theta) \quad (\text{B-16})$$

が得られる。この両辺に $e^{-in\theta}$ を掛けて、 θ について $-\pi$ から π まで積分すると、左辺は同様に $2\pi J_n(x)$ となり、

$$2\pi J_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta \quad (\text{B-17})$$

と、Ref. [20] に示されている、ベッセル関数の積分表示の表式が得られる。なお、母関数 (B-1) で $t = e^{-i\theta}$ とおけば、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-in\theta} = \exp(-ix \sin \theta) \quad (\text{B-18})$$

となり、この両辺に $e^{in\theta}$ を掛けて、 θ について $-\pi$ から π まで積分すると、左辺は $2\pi J_n(x)$ となり、

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i(n\theta - x \sin \theta)\} d\theta \quad (\text{B-19})$$

と、Ref. [30] の付録 I の式 (33) として示されている、ベッセル関数の積分表示の表式が得られる。ここで、式 (B-17) オイラーの公式を使って実部と虚部に分ければ、

$$\begin{aligned} 2\pi J_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) + i \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

と書ける。ここで、 $\sin(x \sin \theta - n\theta)$ は θ の奇関数であるから、積分すると消える。したがって、

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (\text{B-21})$$

と、Ref. [20] の 8.1 節例題に示されている、ベッセル関数の積分表示の表式が得られる。

以下の積分にド・モアブルの公式 (C-3) を用いれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{B-22})$$

となる。角括弧内の第 1 項は式 (B-19) を用いて $J_n(x)$ でかける。第 2 項は $-\theta \rightarrow t$ と置き換えれば ($d\theta = -dt$ 、 $-\pi \leq \theta \leq \pi \rightarrow \pi \leq t \leq -\pi$)、

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (\text{B-23})$$

と得られる (Ref. [30] の付録 II)。

B.3. 偏向部の放射スペクトル表式のために

ここで、Ref. [30] の付録 I にならって偏向部の放射スペクトル表式の導出過程で必要となる表式を導出しておく。式 (C-3) および式 (B-19)、式 (B-13) を使って、

$$X_n(\theta, x) = \frac{n}{x} J_n(x) \quad (\text{B-24})$$

と得られる。また、同様にして式 (C-3) および式 (B-19)、式 (B-15) を使って、

$$Y_n(\theta, x) = iJ'_n(x) \quad (\text{B-25})$$

と得られる。

B.4. 一般の次数のベッセル関数

Ref. [20] の 8.2 節にならって一般の次数のベッセル関数を導入する。前節 B.1. で定義したベッセル関数 $J_n(x)$ は、その次数を整数 n から一般の次数（あるいは複素数） ν へと拡張できる。それには、式 (B-7) で $n \rightarrow \nu$ とおきかえればよい。このとき階乗の記号は式 (A-1) で表されるガンマ関数へと拡張される。したがって、

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \nu \\ (s+n)! &\rightarrow \Gamma(s+\nu+1) \end{aligned} \quad (\text{B-26})$$

とにおいて、

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s} \quad (\text{B-27})$$

と得られる。これがベッセル関数の基本的な定義である。次数が整数ではないから、母関数はもはや無い。図 B-1 に次数 $\nu = 0, 1, 2, 10$ とした場合の $J_n(x)$ の各曲線をプロットした。

図から、次数が増すと立ち上がりが遅くなることがわかる。振幅は $1/\sqrt{x}$ に比例して小さくなる。また、 $J_0(0) = 1$ 、 $J_{n \geq 0}(0) = 0$ (n は正の整数) であることも明らかである。

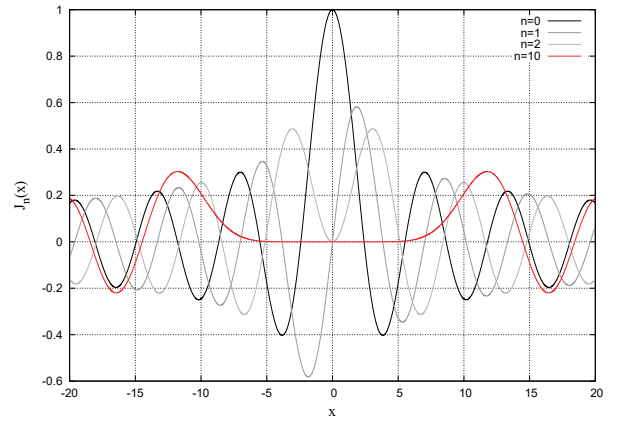


図 B-1. 次数を $\nu = 0, 1, 2, 10$ の整数に選んだ場合のベッセル関数 $J_n(x)$ をそれぞれプロットした。(Ref. [20] の図 8-1 より)

B.5. ベッセル関数の漸化式とベッセル微分方程式

さて、式 (B-27) より、

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-28})$$

さらに、 $0! = 1$ に気をつけて、総和演算子の $s = 0$ の項を処理する。総和の第 1 項からは $s = 0$ の項を総和の外に取り出し、第 2 項は s を $s-1$ に変えることで $s = 0$ の項を総和の中に残す。さらに、式 (A-3) を使って変形すれば、

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \left[\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\nu(-1)^s}{s! \Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-29})$$

と得られる。上式の角括弧内の第 1 項と第 2 項を比べると、第 2 項において $s = 0$ とすれば第 1 項となることがわかる。さらに、式 (B-27) を使えば、

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \quad (\text{B-30})$$

と、ベッセル関数に関する漸化式を得る。

式 (B-30) と同様の計算をすれば、

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+\nu)(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu-1} \end{aligned} \quad (\text{B-31})$$

と得られる。

また、式 (B-27) より、

$$2 \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+\nu)(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu-1} \quad (\text{B-32})$$

と得られる。これは式 (B-31) に一致する。

よって、

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) \quad (\text{B-33})$$

と、ベッセル関数に関するもう一つの漸化式を得る。

なお、これらの漸化式は式 (B-13) および式 (B-15) において、 $n \rightarrow \nu$ としても同じ漸化式が得られる。

また、式 (B-30) および式 (B-33) の両辺の和および差をとれば、

$$\begin{aligned} xJ_{\nu-1}(x) &= \nu J_{\nu}(x) + x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) \\ xJ_{\nu+1}(x) &= \nu J_{\nu}(x) - x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{B-34})$$

上式の第 1 式および第 2 式の両辺それぞれに $x^{\nu-1}$ および $x^{-\nu-1}$ をかければ、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{x^{\nu} J_{\nu}(x)\} &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} \{x^{-\nu} J_{\nu}(x)\} &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned} \quad (\text{B-35})$$

と 2 つの漸化式へと変形できる。

さて、式 (B-34) の第 1 式の両辺に x を掛けて x で微分すれば、

$$\begin{aligned} 2xJ_{\nu-1}(x) + x^2 \frac{d}{dx} J_{\nu-1}(x) \\ = \nu J_{\nu}(x) + \nu x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) + 2x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) + x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_{\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{B-36})$$

となる。式 (B-34) の第 2 式において $\nu \rightarrow \nu - 1$ とすれば、

$$x \frac{d}{dx} J_{\nu-1}(x) = (\nu - 1) J_{\nu-1}(x) - x J_{\nu}(x) \quad (\text{B-37})$$

となる。これを式 (B-36) の左辺第 2 項に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned} x(\nu + 1)J_{\nu-1}(x) &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_{\nu}(x) + \nu x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) \\ &\quad + 2x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) + \nu J_{\nu}(x) + x^2 J_{\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{B-38})$$

となる。さらに式 (B-34) の第 1 式を使って $J_{\nu-1}(x)$ を消去して整理すれば、

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_{\nu}(x) + x \frac{d}{dx} J_{\nu}(x) + (x^2 - \nu^2) J_{\nu}(x) &= 0 \\ \therefore y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-39})$$

と、ベッセルの微分方程式を得る (Ref. [20] の式 (8.14))。

B.6. ベッセル微分方程式の基本解である円筒関数

ベッセルの微分方程式 (B-39) は、パラメータ ν を ν^2 の形で含むから、 $J_{\nu}(x)$ のほかに $J_{-\nu}(x)$ も解になっている。したがって、その一般解は任意定数 A_1 および B_1 を用いて、

$$y = A_1 J_{\nu}(x) + B_1 J_{-\nu}(x) \quad (\text{B-40})$$

と表すことができる (Ref. [20] の式 (8.21))。ところがこれは、 $\nu \neq \text{整数}$ の場合に限られる。 ν が整数 n のときには、 $J_{-n}(x)$ および $J_n(x)$ の間に式 (B-9) の関係があるから、これとは独立な解を別に求める必要がある。 ν が整数になっても意味を持つ独立な解として、

$$Y_{\nu}(x) \equiv \frac{J_{\nu}(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu} \quad (\text{B-41})$$

を採用する (Ref. [20] の式 (8.22))。これをノイマン関数あるいは第 2 種円筒関数と呼ぶ。これに対して $J_{\nu}(x)$ をベッセル関数あるいは第 1 種円筒関数と呼ぶ。 $Y_{\nu}(x)$ は $J_{\nu}(x)$ と同形の漸化式、微分方程式を満たす。したがって、ベッセル微分方程式の一般解は、

$$y = A_2 J_{\nu}(x) + B_2 Y_{\nu}(x) \quad (\text{B-42})$$

¹とも表せる (Ref. [20] の式 (8.23))。この形は、式 (B-40) とちがって、 ν が整数になっても困らない。

ν が整数のときには、式 (B-41) の分子は式 (B-9) の関係から 0 となるが、同時に分母も 0 となる。そうなるように式 (B-41) の形を選んだのである。 $\nu = n$ のとき、ノイマン関数はロピタルの定理によって、

$$\begin{aligned} Y_n(x) \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial J_{\nu}(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n} \end{aligned} \quad (\text{B-43})$$

となる (Ref. [20] の式 (8.24))。 $J_{\nu}(x)$ および $J_{-\nu}(x)$ として式 (B-27) を使って ν に関する偏微分を計算すると、途中経過を省略してその結果は、

¹ これらをフォローする参考文献があれば探して追記すること。

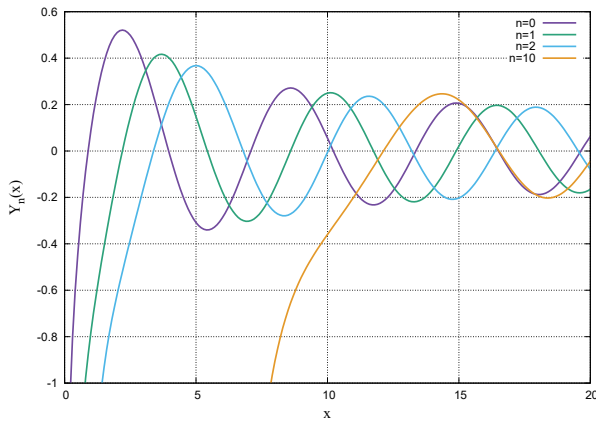


図 B-2. $n = 0, 1, 2, 10$ とした場合のノイマン関数の式 (B-44) をプロット。([20] の図 8-2 より)

$$\begin{aligned}
 Y_n(x) = & \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{\pi}{2} \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \{\psi(s+1) + \psi(n+s+1)\} \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}
 \end{aligned} \quad (\text{B-44})$$

²となる (Ref. [20] の式 (8.25))。ただし、 ψ はディガンマ関数 (A-33) である。図 B-2 に式 (B-44) で $n = 0, 1, 2, 10$ とした場合をそれぞれプロットした。

式 (B-44) は $n \geq 0$ に対する式であるが、負の字数に対しては、

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad (\text{B-45})$$

³が成り立つ (Ref. [20] の式 (8.25))。式 (B-44) の右辺第 3 項は $n = 0$ のときに消える。

B.7. 変形ベッセル関数

さて、Ref. [20] の 8.8 節に示されている通り、式 (B-39) で $\iota = d/dx$ 内の x を含めて ix に置き換えれば、変形されたベッセル微分方程式、

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (\text{B-46})$$

が得られる。ここで、式 (B-39) と異なるのは、丸括弧内の 1 の符号のみであり、式 (B-46) の解もこれに対応

² これらをフォローする参考文献があれば探して追記すること。

³ これらをフォローする参考文献があれば探して追記すること。

して、

$$\begin{aligned}
 I_\nu(x) &\equiv e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(e^{i\pi/2} x) \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(s + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}
 \end{aligned} \quad (\text{B-47})$$

となる。これを第 1 種変形ベッセル関数という。特に次数が整数の場合には、

$$\begin{aligned}
 I_{-n}(x) &= I_n(x) \\
 I_n(-x) &= (-1)^n I_n(x)
 \end{aligned} \quad (\text{B-48})$$

が成り立つ。また、母関数は、

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n \quad (\text{B-49})$$

である。

微分方程式 (B-46) は、 ν^2 の形で ν を含むから、 $I_\nu(x)$ と $I_{-\nu}(x)$ がその基本解であり、一般解は、

$$y = A_1 I_\nu(x) + B_1 I_{-\nu}(x) \quad (\text{B-50})$$

と表される。ただし、 ν が整数 n の場合には、式 (B-48) の第 1 式によって、 $I_{-n}(x)$ と $I_n(x)$ は等しいから、独立な基本解を別に求める必要がある。この事情は $J_n(x)$ のときと同じである。

ν が整数になっても独立な解は、

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) + I_\nu(x)}{\sin \pi \nu} \quad (\text{B-51})$$

である。これを第 2 種変形ベッセル関数という。この関数は、ハンケル関数を用いて、

$$K_\nu(x) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2} x) \quad (\text{B-52})$$

と定義することもできる。なお、定義式 (B-51) から明らかに、

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \quad (\text{B-53})$$

が成り立つ。なお、 $I_\nu(x)$ についてはこのような関係は無い。

Appendix C. フーリエ級数展開

Ref. [20] にあるように、任意の関数を直交関数系によって展開するという手法はいろいろな場面で使われ、応用が広い。このような展開の最もよく知られている例はフーリエ級数展開である。本章ではフーリエ級数展開

に関して補足する。なお、フーリエ級数の定義に関しては、例えば、Ref. [20]4 章 4.1 節、Ref. [106]5 章 5.8 節、Ref. [107]などを参照したい。

フーリエ級数展開は、以下に述べるように、周期関数を三角関数の重ね合わせで表現する手法である。時間 t が $-T/2$ から $T/2$ の範囲で実関数が定義されているとき、関数の周期を T として、

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\} \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

と定義される。 $f(t)$ の右辺をフーリエ級数と呼び、 a_n および b_n をフーリエ係数とよぶ。なお、 $f(t)$ を統合で結んでいないのは、右辺の級数の収束がまだ保証されておらず、また収束したとしてもその値が $f(t)$ に一致するという保証がないからである [20]。 $f(t)$ が一定の条件を満たすときに、 $f(t)$ の右辺は収束して左辺に一致する。それを保証するのが展開定理である。

なお、展開定理とは、実関数が定義されている時間 t が $-T/2$ から $T/2$ の範囲で、実関数 $f(t)$ が区分的になめらかな不連続点を含まない閉区間では一様に収束し、不連続点 t_0 においては、級数は $\{f(t_0-0) + f(t_0+0)\}/2$ に収束するというものである [20]。関数 $f(t)$ に対する条件として、これはかなり緩いもので、応用上現れる関数はほとんど必ずこの定理を満たし、等号は成立する。以降、考えている関数は展開定理の条件を満たすものとして等号を用いて記述する。

オイラーの公式

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_0 t) &= \frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2} \\ \sin(n\omega_0 t) &= \frac{-i(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})}{2} \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

と得られる（ド・モアブルの公式）。フーリエ係数 a_n および b_n を用いて、複素数 c_n を n に関して場合分けを

して以下のように定義する。

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (n > 0) \\ c_n &= \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \quad (n < 0) \end{aligned} \quad (\text{C-4})$$

これらに式 (C-1) の a_n および b_n の式および式 (C-3) を代入すれば、

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n > 0) \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n < 0) \end{aligned}$$

と得られる。よって、任意の整数 n に対して、

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (\text{C-5})$$

と統一して定義できる。

$n > 0$ に対して係数を、

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{a_0}{2} \\ d_n &= \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{b_n}{i} \right) = \frac{a_n + ib_n}{2} \\ d_{-n} &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b_n}{i} \right) = \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}$$

ととれば、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{d_n e^{-in\omega_0 t}\} \\ d_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (\text{C-6})$$

と得られる。

Appendix D. 種々の方程式

D.1. 1 変数 3 次方程式

一般に、1 変数の 3 次方程式は、実数の係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を用いて、

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{D-1})$$

と書ける。

1 変数の 3 次方程式の代数的解法は、カルダノの公式やカルダノ=タルタリアの公式として知られる。まずは、上式を a_3 で割れば、

$$\begin{aligned} x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 &= 0 \\ \text{where,} \\ A_n &= a_n/a_3 \\ n &= \{0, 1, 2\} \end{aligned} \quad (\text{D-2})$$

となる。さらに、

$$x = y - \frac{A_2}{3} \quad (\text{D-3})$$

とにおいて、変数変換を行えば、

$$y^3 + \left(A_1 - \frac{A_2^2}{3}\right)y + \left(A_0 - \frac{A_1A_2}{3} + \frac{2A_2^3}{27}\right) = 0 \quad (\text{D-4})$$

と、2 次の項が消えた方程式へと変換される。これをあらためて、

$$\begin{aligned} y^3 + py + q &= 0 \\ \text{where,} \\ p &= A_1 - \frac{A_2^2}{3} \\ q &= A_0 - \frac{A_1A_2}{3} + \frac{2A_2^3}{27} \end{aligned} \quad (\text{D-5})$$

と書く。

さらに、

$$\begin{aligned} y &= u + v \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

と置いて、変数変換すれば、

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0 \quad (\text{D-7})$$

となる。すなわち、式 (D-6) に気をつけて、

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + q &= 0 \\ 3uv + p &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-8})$$

を満たす u および v が存在すればそれが解となり、逆に辿って y 、そして x が得られる。

第 2 式を使って第 1 式から v を消去すれば、

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (\text{D-9})$$

と得られる。この式は u^3 に関する 2 次方程式であるから、その解は、

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (\text{D-10})$$

と得られる。ここで、式 (D-8) は u と v に関して対称な形をしており、互いに入れ替えても変わらない。すなわち、解の一方を u^3 にとれば、もう片方は v^3 となる。そこで今、

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned} \quad (\text{D-11})$$

とする。

u の 3 次方程式を解くために、まずは式 (D-1) において $a_2 = a_1 = 0$ かつ $a_0 = -1$ の場合を考える。すなわち、

$$g^3 = 1 \quad (\text{D-12})$$

これは因数分解可能で、

$$(g - 1)(g^2 + g + 1) = 0 \quad (\text{D-13})$$

となる。よって、 g に対して 3 つの解 $\omega_{1,2,3}$ が、

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 \\ \omega_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \omega_3 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (\text{D-14})$$

と得られる。したがって、

$$g^3 = a^3 \quad (\text{D-15})$$

の解は、 $\omega_{1,2,3}$ を使って、 $a\omega_1$ 、 $a\omega_2$ 、 $a\omega_3$ などと表されることになる。

これをふまえて、式 (D-11) の u および v の解として、

それぞれ、

$$\begin{aligned}
u_1 &= \omega_1 \left\{ -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3} \\
u_2 &= \omega_2 \left\{ -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3} \\
u_3 &= \omega_3 \left\{ -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3} \\
v_1 &= \omega_1 \left\{ -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3} \\
v_2 &= \omega_2 \left\{ -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3} \\
v_3 &= \omega_3 \left\{ -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right\}^{1/3}
\end{aligned} \tag{D-16}$$

が得られる。

上記のように得られた解 $u_{1,2,3}$ および $v_{1,2,3}$ のうち、式 (D-8) の第 1 式の関係 $u^3 + v^3 = -q$ を満たす組み合わせは、 u_1 と v_1 、 u_2 と v_3 、 u_3 と v_2 の 3 組だけである。よって、式 (D-6) より、 y の解として以下の 3 つの表式が得られる。

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + v_1 \\
y_2 &= u_2 + v_3 \\
y_3 &= u_3 + v_2
\end{aligned} \tag{D-17}$$

よって、式 (D-3) および式 (D-14)、式 (D-5)、式 (D-2) を使って、 x の解として以下の 3 つの表式が得られる。

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - \frac{A_2}{3} \\
&= \omega_1 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} \\
&\quad + \omega_1 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} - \frac{a_2}{3a_3} \\
x_2 &= \omega_2 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} \\
&\quad + \omega_3 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} - \frac{a_2}{3a_3} \\
x_3 &= \omega_3 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} \\
&\quad + \omega_2 \left\{ -\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2a_3} - \frac{a_1a_2}{6a_3^2} + \frac{2a_2^3}{54a_3^3} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} \right)^3} \right\}^{1/3} - \frac{a_2}{3a_3}
\end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1 \\
\omega_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\
\omega_3 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned} \tag{D-18}$$

ところで、解 $x_{1,2,3}$ を使って、

$$\begin{aligned}
&(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \\
\therefore x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 \\
&\quad + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0
\end{aligned}$$

と得られる。よって、上式を式 (D-2) と係数比較すれば、1 変数 3 次方程式の解と係数の関係式をそれぞれ以下の

ように得られる。

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_2/a_3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= a_1/a_3 \\ x_1x_2x_3 &= -a_0/a_3 \end{aligned} \quad (D-19)$$

Appendix E. ローレンツ変換

Ref. [108] や Ref. [109] 等の資料にしたがっていくつかの式を導出する。

E.1. ローレンツ変換

図 E-1 に示すような、静止系 $K(x, y, z, t)$ とそれに対して x 軸方向へ速さ V で運動している系 $K'(x', y', z', t')$ との間には、以下のローレンツ変換が成り立つ (Ref. [4])。

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (E-1)$$

また、これを変形すれば、

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (E-2)$$

となる。

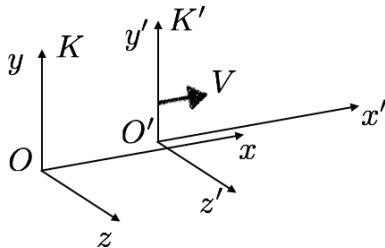


図 E-1. 慣性系 K および K' 系の関係。 K' 系は K 系に対して x 方向に等速 V で移動している。

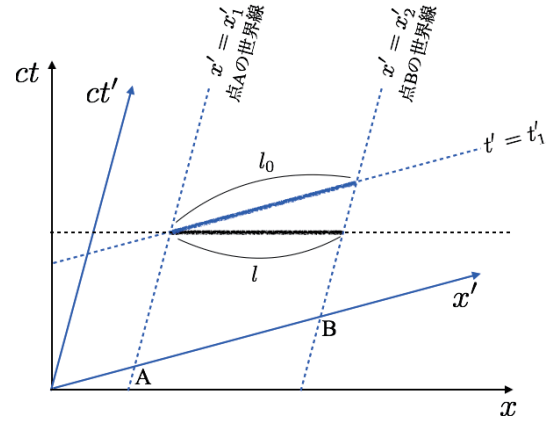


図 E-2. ローレンツ短縮。

E.2. ローレンツ短縮

相対論的な速さで運動する物体の長さは縮んで観測される。これをローレンツ短縮 (Lorentz contraction) という。

簡単のために空間は x 軸のみの 1 次元で考える。今、 K' 系で静止した長さが l_0 である棒を考え、時刻 $t' = 0$ の両端を点 A および点 B で表す。点 A および点 B の x 座標をそれぞれ x'_1 および x'_2 としたとき、棒の両端の座標は K' 系に対して固定されているため、時間 t' が進むにつれて描く世界線は図 E-2 内の破線 $x' = x'_1$ および $x' = x'_2$ のように定数となる。これらの直線の方程式は、式 (E-2) において $x' = x'_1$ および $x' = x'_2$ とすれば得られて、

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x'_2 &= \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (E-3)$$

となる。ここで、 x'_i は定数であったが、 x_i および t_i ($i = 1, 2$) は変数である。式 (E-2) の第 1、4 式を使って K' 系における変数 t' を消去して得られる、

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt \quad (E-4)$$

との関係から、 K 系における時間 t_i における棒の両端の座標 x_i には、

$$x_i = x'_i \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt_i \quad (E-5)$$

の関係があることがわかる。

棒が系に対して静止している K' 系において、観測者

が観測する棒の長さは l' に関係なく、

$$l_0 = x_2 - x_1 \quad (\text{E-6})$$

である。一方、棒に対して等速に移動する K 系から観測する棒の長さはどうだろう。棒の両端は式 (E-5) にしたがって移動するので、時刻 $t_1 = t_2 = t$ に指定すれば、

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 \\ &= x'_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt - \left(x'_1 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt \right) \\ &= \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} (x'_2 - x'_1) \\ &= \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} l_0 \\ &< l_0 \end{aligned} \quad (\text{E-7})$$

と、 K 系で観測する棒の長さは棒が静止した K' 系で観測した長さ l_0 よりも短くなることが示された。これが、ローレンツ短縮である。

E.3. 速度の合成

今、図 E-1 に示すように、 K' 系は K 系に対して x 軸の方向に速さ V で移動しているものとする。粒子の速度、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{E-8})$$

で与えられるが、ローレンツ変換の場合、式 (E-1) から明らかなように、分母の dt も変換する必要がある。式 (E-1) から、各変数の微小変化に関する関係は、

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{dt - \frac{V}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{E-9})$$

となる。よって、 K' 系で観測するときの物体の速度を $v' = dr'/dt'$ と書けば、

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \end{aligned} \quad (\text{E-10})$$

と得られる。

今、粒子の速度 $\mathbf{v}$ が xy 平面内にあるように座標軸を選ぶ。このとき $v_z = 0$ となり、式 (E-10) の第 3 式から $v'_z = 0$ であり、 $\mathbf{v}'$ も $x'y'$ 平面内にある。

速度 $\mathbf{v}$ と x 軸とのなす角を θ 、速度 $\mathbf{v}'$ と x' 軸とのなす角を θ' とすれば、

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \theta \\ v_y &= v \sin \theta \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E-11})$$

および

$$\begin{aligned} v'_x &= v' \cos \theta' \\ v'_y &= v' \sin \theta' \\ v'_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E-12})$$

と書ける。これらを使って、式 (E-10) は、

$$\begin{aligned} v' \cos \theta' &= \frac{v \cos \theta - V}{1 - \frac{Vv \cos \theta}{c^2}} \\ v' \sin \theta' &= v \sin \theta \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv \cos \theta}{c^2}} \end{aligned} \quad (\text{E-13})$$

と変形できる。上式から、速度の方向の変換式が以下のように得られる。

$$\tan \theta' = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{v \cos \theta - V} \quad (\text{E-14})$$

また、速度の大きさの変換式が以下のように得られる。

$$v' = \frac{\sqrt{v^2 - 2Vv \cos \theta + V^2(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta)}}{1 - \frac{Vv \cos \theta}{c^2}} \quad (\text{E-15})$$

式 (E-13) において $v = v' = c$ とすれば、

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V \cos \theta}{c}} \\ \sin \theta' &= \sin \theta \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cos \theta}{c}} \end{aligned} \quad (\text{E-16})$$

となる。これは慣性系の間の光の傾きの角度の変換公式で、光行差を表す式である。

E.4. 光のドップラー効果

空気中を伝わる音波と異なり、真空中を伝わる光を考えた時には媒質が存在しない。したがって、真空中を伝わる光に関して、光源が運動しているのか、あるいは観測

者が運動しているのかといった区別はない。したがって、光源と観測者の間の相対速度のみによってドップラー効果が決まる。

K 系において単位ベクトル $\mathbf{n}$ の方向へ真空中を伝播する平面波を考える。このとき、平面波の角周波数 ω と波数ベクトル $\mathbf{k}$ との間には、

$$\omega = c\mathbf{k} \quad (\text{E-17})$$

なる分散関係が成立する。今、振幅を 1、時刻 $t = 0$ に K 系の原点において振幅が 0 となるような正弦関数で平面波を表せば、

$$\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad (\text{E-18})$$

とかける。

さて、いま K 系から見て x 軸の正の方向へ速さ V で進む K' 系を考えて、 $t = t' = 0$ においてそれぞれの系の原点が一致するように K' 系を決める。このとき、平面波を K' 系において観測した時の角周波数を ω' 、波数ベクトルを $\mathbf{k}'$ として、式 (E-18) で表される平面波の位相と同じ位相となる時空間座標を選べば、

$$k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' \quad (\text{E-19})$$

となる。この式の左辺にローレンツ変換の式 (E-2) を代入すれば、

$$\begin{aligned} k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t' \\ = \frac{k_x - \frac{V\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} x' + k_y y' + k_z z' - \frac{\omega - V k_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} t' \end{aligned} \quad (\text{E-20})$$

となる。したがって、両辺を比較すれば、周波数と波数の変換公式、

$$\begin{aligned} k'_x &= \frac{k_x - \frac{V\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z \\ \omega' &= \frac{\omega - V k_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{E-21})$$

を得る。

ここで、図 E-3 に示すように K 系における波数ベクトル $\mathbf{k}$ と x 軸とのなす角を θ 、 K' 系における $\mathbf{k}'$ と x'

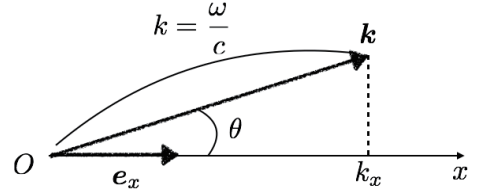


図 E-3. 光のドップラー効果。

軸とのなす角を θ' とおけば、

$$\begin{aligned} k_x &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta \\ k'_x &= \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \end{aligned} \quad (\text{E-22})$$

であるから、式 (E-21) は、

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{c} \cos \theta' &= \frac{\frac{\omega}{c} \cos \theta - \frac{V\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \omega' &= \frac{\omega - V \frac{\omega}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{E-23})$$

となる。ここで、第 1 式に光行差の式 (E-16) の第 1 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{c} \cos \theta' &= \frac{\frac{\omega}{c} \cos \theta - \frac{V\omega}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \therefore \omega' &= \frac{\omega - V \frac{\omega}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{E-24})$$

となり、第 2 式に一致する。これを变形すれば、

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{V \cos \theta}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{E-25})$$

となる。

上式の導出において、平面波として扱った光の光源が K 系あるいは K' 系に対してどのように運動しているかを決めなかった。ここで、光源が K' 系で静止し、平面波の角周波数が ω_0 であるとして、 K 系に静止した観測者が受信する平面波の角周波数を ω とする。このとき、式 (E-25) において、 $\omega' = \omega_0$ とおけばよいから、

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega \frac{1 - \frac{V \cos \theta}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \omega &= \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V \cos \theta}{c}} \end{aligned} \quad (\text{E-26})$$

と得られる。ただし、光源は観測者に対して相対的な速さ V で x 軸の正の方向に運動しており、平面波の波数ベクトル (光の進む方向) と発信源の成す角が θ である。これが光のドップラー効果を表す式である。

参考文献

- [1] John David Jackson. *Classical Electrodynamics* (Third ed.). Wiley, 1998.
- [2] 砂川重信. 理論電磁気学. 紀伊国屋書店, 第2版, 1973.
- [3] 土屋公央. 挿入型光源. OHO'93 高エネルギー加速器セミナー テキスト, pp. 5–1–5–35, 1993.
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields Third Revised English Edition, Course of Theoretical Physics, Volume 2, 1978. <https://archive.org/details/TheClassicalTheoryOfFields>.
- [5] 砂川重信. 電磁気学 物理テキストシリーズ 4. 岩波書店, 第2版, 1987.
- [6] Takashi Tanaka and Hideo Kitamura. SPECTRA: a synchrotron radiation calculation code. *J. Synchrotron Rad.*, Vol. 8, pp. 1221–1228, 2001.
- [7] 渡辺誠, 佐藤繁. 放射光科学入門. 東北大学出版会, 2004.
- [8] 大柳宏之. シンクロトロン放射光の基礎. 丸善株式会社, 1996.
- [9] Philip John Duke. *Synchrotron radiation: production and properties*. Oxford Series on Synchrotron Radiation 3. Oxford Science Publications, 2009.
- [10] 田中隆次. X線自由電子レーザー理論. OHO'13 高エネルギー加速器セミナー テキスト, pp. 2–1–2–50, 2013.
- [11] 田中隆次. アンジュレータ. OHO'13 高エネルギー加速器セミナー テキスト, pp. 3–1–3–28, 2013.
- [12] J.B. Murphy and C. Pellegrini. *INTRODUCTION TO THE PHYSICS OF THE FREE ELECTRON LASER*. Frontiers of Particle Beams, Lecture Notes in Physics 296. Springer-Verlag, 1988.
- [13] E.T. Scharlemann. Wiggle plane focusing in linear wigglers. *Journal of Applied Physics*, Vol. 58, pp. 2154–2161, 1985.
- [14] Kwang-Je Kim, Ahirong Huang, and Ryan Lindberg. *Synchrotron Radiation and Free-Electron Lasers - Principles of Coherent X-Ray Generation*. Cambridge University Press, 2017.
- [15] Brian M. Kincaid. A short-period helical wiggler as an improved source of synchrotron radiation. *J. of Appl. Phys.*, Vol. 48, pp. 2684–2691, 1977.
- [16] Shigeru Yamamoto and Hideo Kitamura. Generation of quasi-circularly polarized undulator radiation with higher harmonics. *Jpn. J. of Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. L1613–L1615, 1987.
- [17] 森口繁一, 宇田川かね久, 一松信. 岩波 数学公式 I 微分積分・平面曲線. 岩波書店, 新装第1版, 1987.
- [18] James A. Clarke. *The science and technology of undulators and wigglers*. Oxford Series on Synchrotron Radiation 4. Oxford University Press, 2004.
- [19] Kwang-Je Kim. Characteristics of synchrotron radiation. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 184, pp. 565–632, 1989.
- [20] 小野寺嘉孝. 物理のための応用数学. 裳華房, 1988.
- [21] 島田美帆. コヒーレントシンクロトロン放射光とビームダイナミクス. OHO'08 高エネルギー加速器セミナー テキスト, pp. 5–1–5–32, 2008.
- [22] F. Curtis Michel. Intense coherent submillimeter radiation in electron storage rings. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 48, pp. 580–583, 1982.
- [23] T. Nakazato, M. Oyamada, N. Niimura, S. Urasawa, O. Konno, A. Kagaya, R. Kato, T. Kamiyama, Y. Torizuka, T. Nanba, Y. Kondo, Y. Shibata, K. Ishi, T. Ohsaka, and M. Ikezawa. Observation of coherent synchrotron radiation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 63, pp. 1245–1248, 1989.
- [24] 北村英男. 新しい放射光源. 数理科学, No. 243, pp. 22–30, 1983.
- [25] 田中隆次, 備前輝彦, 北村英男. 加速器におけるアンジュレータ (前編). 加速器, Vol. 5, No. 1, pp. 3–12, 2008.

- [26] Albert C. Thompson, David T. Attwood, Eric M. Gullikson, Malcolm R. Howells, Jeffrey B. Kortright, Arthur L. Robinson, James H. Underwood, Kwan-Je Kim, Janos Kirtz, Ingolf Lindau, Piero Pianetta, Herman Winick, Gwyn P. Williams, and James H. Scofield. *X-RAY DATA BOOKLET*. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, 2nd edition, 2001.
- [27] 原田健太郎. 円形加速器の概略と単粒子力学の基礎. OHO'08 高エネルギー加速器セミナー テキスト, pp. 3–1–3–108, 2008.
- [28] D.T. Attwood, K. Halbach, and K.-J. Kim. Tunable coherent x-rays. *Science*, Vol. 228, p. 1265, 1985.
- [29] 北村英男. 放射光実験施設 挿入光源ハンドブック ('90). 1990.
- [30] 宮原恒昱. 放射光基礎講座 (その 5) . 放射光, Vol. 6, pp. 225–231, 1993.
- [31] S.A. Abdelwahab, A. Al-Adwan, E. Al-Dmour, A. Amro, M. Attal, H. Delsim-Hashemi, D. Einfeld, A. Elsis, D. Foudeh, H. Hassanzadegan, F. Holstein, E. Huttel, I. Khubeis, B. Kalantari, K. Mostafa, M. Plesko, R. Sarraf, H. Tarawneh, K. Tavakkoli, K. Toukan, S. Varnaseri, G.-A. Voss, E. Weihreter, H. Winick, and S. Al-Faques. *Conceptual Design Report for the Upgrading of SESAME to 2.5GeV*. SESAME Yellow Book. UNESCO Ammam Office, Jordan, 2003.
- [32] 田中隆次. 挿入光源. 放射光, Vol. 17, pp. 298–302, 2004.
- [33] 小方厚. レーザー・プラズマ・粒子ビームの相互作用. 2005.
- [34] Peter Schmüser, Martin Dohlus, Jörg Rossbach, and Christopher Behrens. *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime: Physical Principles, Experimental Results, Technical Realization*, Vol. 258 of *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer, second edition, 2014.
- [35] S. Martellucci and A.N. Shester. *Free Electron Lasers*. Plenum Press, softcover reprint of the harcover 1st edition 1983 edition, 1983.
- [36] Evgeny L. Saldin, Evgeny A. Schneidmiller, and Mikhail V. Yurkov. *The Physics of Free Electron Lasers*. Springer, 2000.
- [37] K. Nishikawa and M. Wakatani. *Plasma Physics*. Springer, third, revised edition, 2000.
- [38] Francis F. Chen. *Plasma Physics*, Vol. 1 of *PLASMA PHYSICS AND CONTROLLED FUSION*. Springer, third edition, 2016.
- [39] PROTERIAL. ネオジム・鉄・ボロン系 焼結磁石 NEOMAX®. <https://www.proterial.com/products/magnetic/neomax.html>.
- [40] Shin-Etsu Chemical Co., Ltd. 信越レア・アースマグネット. <https://www.shinetsu-rare-earth-magnet.jp/products/index.html>.
- [41] VACUUMSCHMELZE. <https://vacuumschmelze.com/markets/scientific-medical/undulators-and-accelerators>.
- [42] E. Hoyer, T. Chan, J.W.G. Chin, K. Halbach, K.J. Kim, H. Winick, and J. Yang. The beam line vi rec-steel hybrid wiggler for ssrl. *IEEE Transaction on Nuclear Science*, Vol. NS-30, No. 4, pp. 109–117, 1983.
- [43] E. Hoyer, J. Chin, K. Halbach, W. Hassenzahl, D. Humphries, B. Kincaid, H. Lancaster, D. Plate, and R. Savoy. THE U5.0 UNDULATOR DESIGN FOR THE ADVANCED LIGHT SOURCE AT LBL. *Nucl. Instrum. Meth. A*, Vol. 291, pp. 383–387, 1990.
- [44] Toru Hara, Takashi Tanaka, Hideo Kitamura, Teruhiko Bizen, Xavier Maréchal, Takamitsu Seike, Tsutomu Kohda, and Yutaka Matsuura. Cryogenic permanent magnet undulators. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, Vol. 7, p. 050702, May 2004.
- [45] C. Benabderrahmane, M. Valléau, P. Berteaud, K. Tavakoli, J.L. Marlats, R. Nagaoka, N. Béchu, D. Zerbib, P. Brunelle, L. Chapuis, D. Dallé, C. Herbeaux, A. Lestrade, M. Louvet, and M.E. Couprie. Development of a 2 m pr₂fe₁₄b cryogenic permanent magnet undulator at soleil. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 425, p. 032019, 2013.

- [46] Jui-Che Huang, Hideo Kitamura, Chih-Sheng Yang, Ching-Kang Yang, Shinsaku Mizumoto, Cheng-Hsing Chang, Cheng-Hsiang Chang, and Ching-Shiang Hwang. Development of cryogenic permanent magnet undulators at nsrrc. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2054, No. 1, p. 030022, 01 2019.
- [47] Klaus Halbach. Physical and optical properties of rare earth cobalt magnets. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, Vol. 187, No. 1, pp. 109–117, 1981.
- [48] M.N. Smolyakov. The property of universality for wigglers and invariance of electromagnetic radiation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 467-468, pp. 206–209, 2001. 7th Int.Conf. on Synchrotron Radiation Instrumentation.
- [49] T. Tanaka, K. Shirasawa, T. Seike, and H. Kitamura. Development of the short - period undulator for the x - ray fel project at spring - 8. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 705, No. 1, pp. 227–230, 2004.
- [50] Teruhiko Bizen, Ryota Kinjo, and Takashi Tanaka. Enhancing the radiation resistance of undulator permanent magnets by tilting the easy axis of magnetization. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 124801, 2018.
- [51] Shigeru Yamamoto. An in - vacuum undulator in the kek 6.5 gev accumulation ring. *Synchrotron Radiation News*, Vol. 6, No. 3, pp. 12–15, 1993.
- [52] Hideo Kitamura. Insertion devices for third - generation light sources (invited). *Review of Scientific Instruments*, Vol. 66, No. 2, pp. 2007–2010, 1995.
- [53] P. M. Stefan, T. Tanabe, S. Krinsky, G. Rakowsky, L. Solomon, and H. Kitamura. Initial results from an in-vacuum undulator in the NSLS X-ray ring. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 5, No. 3, pp. 417–419, May 1998.
- [54] Shigeru Yamamoto, Shigeru Kashiwagi, Shinichi Masuda, Nobuhiko Nakanii, Tomonao Hosokai, Masaki Kando, Toshiya Muto, Ken-ichi Nanbu, Fujio Hinode, and Hiroyuki Hama. Light source based on a 100mm-long monolithic undulator magnet with a very short 4mm-period length. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 26, No. 6, pp. 1902–1910, 2019.
- [55] Kai Zhang and Marco Calvi. Review and prospects of world-wide superconducting undulator development for synchrotrons and fels. *Superconductor Science and Technology*, Vol. 35, No. 9, p. 093001, jul 2022.
- [56] A.S. Artamonov, L.M. Barkov, V.B. Baryshev, N.S. Bashtovoy, N.A. Vinokurov, E.S. Gluskin, G.A. Kornukhin, V.A. Kochubei, G.N. Kulipanov, N.A. Mezentsev, V.F. Pindiurin, A.N. Skrinsky, and V.M. Khorev. First results of the work with a superconducting “snake” at the vepp-3 storage ring. *Nuclear Instruments and Methods*, Vol. 177, No. 1, pp. 239–246, 1980.
- [57] V. A. Shkaruba, A. V. Bragin, A. A. Volkov, A. I. Erokhin, A. V. Zorin, V. Kh. Lev, N. A. Mezentsev, A. N. Safronov, V. M. Syrovatin, O. A. Tarasenko, S. V. Khrushchev, and V. M. Tsukanov. Superconducting multipole wigglers for generating synchrotron radiation at the budker institute of nuclear physics. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, Vol. 17, pp. 542–547, 2020.
- [58] K. Soutome, S. Date, H. Ego, T. Fukui, M. Hara, N. Hosoda, Y. Kawashima, M. Kodera, N. Kumagai, T. Magome, M. Masaki, T. Masuda, S. Matsui, T. Nakamura, T. Noda, Y. Ohashi, T. Ohshima, M. Oishi, H. Saeki, S. Sasaki, M. Shoji, S. Takano, M. Takao, T. Takashima, H. Takebe, K. Tamura, H. Tanaka, Y. Taniuchi, K. Tsumaki, T. Yorita, C. Zhang, and H. Yonehara. GENERATION OF HIGH-ENERGY SYNCHROTRON RADIATION WITH A 10-T SUPERCONDUCTING WIGGLER INSTALLED IN THE SPring-8 STORAG. In *Proc. of 2003 Particle Accelerator Conference*, Particle Accelerator Conference, pp. 251–252, 2003.
- [59] Y Fukushima, K Ohmi, T Yamakawa, and M Fujiwara. Development Of A Nb-3sn Racetrack

Magnet For 10t Superconducting Wiggler.
Technical report, KEK, Tsukuba, 1993.

- [60] I. Ben-Zvi, Z.Y. Jiang, G. Ingold, L.H. Yu, and W.B. Sampson. The performance of a superconducting micro-undulator prototype. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 297, No. 1, pp. 301–305, 1990.
- [61] T. Hezel, B. Krevet, H. O. Moser, J. A. Rossmanith, R. Rossmanith, and Th. Schneider. A superconductive undulator with a period length of 3.8mm. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 5, No. 3, pp. 448–450, 1998.
- [62] S. Casalbuoni, J. Baader, G. Geloni, V. Grattoni, W. Decking, D. La Civita, C. Lechner, L. Lilje, S. Liu, B. Marchetti, A. Potter, E. Schneidmiller, S. Serkez, H. Sinn, T. Wohlenberg, and I. Zagorodnov. A pre-series prototype for the superconducting undulator afterburner for the european xfel. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 2380, No. 1, p. 012012, dec 2022.
- [63] Johann E. Baader, Sara Casalbuoni, Vanessa Grattoni, Andreas Grau, Achim Hobl, Alexander Vatagin, Mikhail Yakopov, and Paweł Ziółkowski. Magnetic performance assessment of the s-presso superconducting undulator mock-up. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 34, No. 6, pp. 1–9, 2024.
- [64] Shigemi Sasaki, Kazunori Kakuno, Takeo Takada, Taihei Shimada, Ken ichi Yanagida, and Yoshikazu Miyahara. Design of a new type of planar undulator for generating variably polarized radiation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 331, No. 1, pp. 763–767, 1993.
- [65] M. Calvi, C. Camenzuli, E. Prat, and Th. Schmidt. Transverse gradient in Apple-type undulators. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 24, No. 3, pp. 600–608, May 2017.
- [66] T Tanaka and H Kitamura. Figure-8 undulator as an insertion device with linear polarization and low on-axis power density. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 364, No. 2, pp. 368–373, 1995.
- [67] R Carr, J B Kortright, M Rice, and S Lidia. Performance of the elliptically polarizing undulator on spear. *Review of Scientific Instruments; (United States)*, Vol. 66:2, , 02 1995.
- [68] A. T. Young, E. Arenholz, S. Marks, R. Schlueter, C. Steier, H. A. Padmore, A. P. Hitchcock, and D. G. Castner. Variable linear polarization from an X-ray undulator. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 9, No. 4, pp. 270–274, Jul 2002.
- [69] T Tanaka, X M Maréchal, T Hara, T Tanabe, and H Kitamura. In-vacuum figure-8 undulator for hard x-rays with both horizontal and vertical polarization. *J. Synchrotron Rad.*, Vol. 5, pp. 412–413, 1998.
- [70] J Bahrtdt, J Bakos, S Gaebel, S Gottschlich, S Grimmer, C Kuhn, S Knaack, F Laube, A Meseck, C Rethfeldt, E Rial, A Rogosch-Opolka, M Scheer, and P Volz. The status of the in-vacuum-apple ii ivue32 at hzb / bessy ii. *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 2420, No. 1, p. 012018, jan 2023.
- [71] E. Rial, C. Kuhn, J. Bahrtdt, K. Karimi, S. Grimmer, and S. Schäfer. Cryogenic APPLE undulator development at Helmholtz-Zentrum Berlin. In *Proc. of IPAC2025*, International Particle Accelerator Conference, p. 1277, 2025.
- [72] C. S. Hwang and P. H. Lin. Comparison of two superconducting elliptical undulators for generating circularly polarized light. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, Vol. 7, p. 090701, Sep 2004.
- [73] D.F. Alferov, Yu.A. Bashmakov, and E.G. Bessanov. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, Vol. 18, p. 1336, 1974.
- [74] S. Prestemon, R. Schlueter, S. Marks, and D.R. Dietderich. Superconducting undulators with variable polarization and enhanced spectral range. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 16, No. 2, pp. 1873–1876, 2006.

- [75] Y. Ivanyushenkov, J. Fuerst, Q. Hasse, M. Kasa, Y. Shiroyanagi, E. Trakhtenberg, and E. Gluskin. CONCEPTUAL DESIGN OF A NOVEL SCAPE UNDULATOR. In *Proc. of IPAC2017*, International Particle Accelerator Conference, p. 1596, 2017.
- [76] P. Kanonik, S. Khrushev, N. Mezentsev, V. Shkaruba, O. Tarasenko, V. Tsukanov, A. Volkov, A. Zorin, A. Erokhin, and A. Bragin. Superconducting undulator with variable configuration of magnetic field. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2299, No. 1, p. 020014, 11 2020.
- [77] V A Bogachenkov and V A Papadichev. Combined electromagnetic and permanent magnet undulator to achieve higher field and easier field variation without mechanical movement. Brookhaven National Lab. (BNL), Upton, NY (United States), 12 1995.
- [78] M.B. Moiseev, M.M. Nikitin, and N.I. Fedosov. Change in the kind of polarization of undulator radiation. *Soviet Physics Journal*, Vol. 21, pp. 332–335, 1978.
- [79] Kwang Je Kim. A synchrotron radiation source with arbitrarily adjustable elliptical polarization. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, Vol. 219, No. 2, pp. 425–429, 1984.
- [80] Shigemi Sasaki. Crossed elliptical polarization undulator. Particle Accelerator Conference, 1997.
- [81] T. Hara, T. Tanaka, T. Tanabe, X. M. Marchal, K. Kumagai, and H. Kitamura. Spring-8 twin helical undulator. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 5, pp. 426–427, May 1998.
- [82] Yuji Saitoh, Yoshihiro Fukuda, Yukiharu Takeda, Hiroshi Yamagami, Sunao Takahashi, Yoshihiro Asano, Toru Hara, Katsutoshi Shirasawa, Masao Takeuchi, Takashi Tanaka, and Hideo Kitamura. Performance upgrade in the JAEA actinide science beamline BL23SU at SPring-8 with a new twin-helical undulator. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 19, No. 3, pp. 388–393, 2012.
- [83] K. Harada, Y. Kobayashi, T. Miyajima, S. Nagahashi, T. Obina, M. Shimada, R. Takai, and S. Matsuba. Tuning of the fast local bump system for helicity switching at the photon factory. International Particle Accelerator Conference, 2010.
- [84] Kenta Hagiwara, Eiken Nakamura, Seiji Makita, Shigemasa Suga, Shin-ichiro Tanaka, Satoshi Kera, and Fumihiko Matsui. Development of dual-beamline photoelectron momentum microscopy for valence orbital analysis. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 31, No. 3, pp. 540–546, May 2024.
- [85] R. Bracco, B. Diviacco, D. Millo, R. P. Walker, and D. Zangrando. Construction of Elliptical Undulators for ELETTRA. In *Proc. EPAC'98*, No. 6 in European Particle Accelerator Conference, pp. 2216–2218. JACoW Publishing, Geneva, Switzerland, 8 1998.
- [86] Shigemi Sasaki, Atsushi Miyamoto, Kimimori Goto, and Takafumi Mitsuyasu. Apple-ii type quasi-periodic variably polarizing undulator at hisor. *Proceedings of the 9th annual meeting of Particle Accelerator Society of Japan*, pp. 131–133, 2012.
- [87] M.S.Jaski, M. Abliz, R.J.Dejus, Boris Deriy, Efim S. Gluskin, E.R.Moog, Isaac Vasserman, and A.Xiao. An electromagnetic variably polarizing quasi-periodic undulator*. Particle Accelerator Conference. JACoW Publishing, 2013.
- [88] G. Isoyama, S. Yamamoto, T. Shioya, H. Ohkuma, S. Sasaki, T. Mitsuhashi, T. Yamakawa, and H. Kitamura. Construction of a multiundulator, revolver no. 19, at the photon factory. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 60, No. 7, pp. 1863–1866, 07 1989.
- [89] J. Chavanne, L. Goirand, G. Lebec, C. Penel, and F. Revol. Upgrade of the Insertion Devices at the ESRF. In *Proc. IPAC'10*, pp. 3105–3107. JACoW Publishing, Geneva, Switzerland.
- [90] N. A. Vinokurov, O. A. Shevchenko, and V. G. Tcheskidov. Variable-period permanent magnet undulators. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, Vol. 14, p. 040701, Apr 2011.

- [91] Takashi Tanaka, Yuichiro Kida, Ryota Kinjo, Tadashi Togashi, Hiromitsu Tomizawa, Satoshi Hashimoto, Shuji Miyamoto, Sumiyuki Okabe, and Yoshihito Tanaka. Development of an undulator with a variable magnetic field profile. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 28, No. 2, pp. 404–409, Mar 2021.
- [92] N. Strel'nikov, E. Trakhtenberg, I. Vasserman, J. Xu, and E. Gluskin. Vertically polarizing undulator with the dynamic compensation of magnetic forces for the next generation of light sources. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 85, No. 11, p. 113303, 11 2014.
- [93] O. Marcouille, L. Chapuis, P. Brunelle, P. Berteaud, M. - E. Couprie, J. - M. Filhol, C. Herbeaux, J. - L. Marlats, M. Massal, A. Mary, K. Tavakoli, M. Valteau, and J. Veteran. An in - vacuum wiggler for soleil hard x - rays spectral range. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1234, No. 1, pp. 556–559, 06 2010.
- [94] Kei Imamura, Yuichiro Kida, Akihiro Kagamihata, Takamitsu Seike, Shigeru Yamamoto, Haruhiko Ohashi, and Takashi Tanaka. Development of a high-performance and cost-effective in-vacuum undulator. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 31, No. 5, pp. 1154–1160, Sep 2024.
- [95] Testing for qualification of a helical optical klystron for uv storage-ring free electron lasers. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Vol. 393, No. 1, pp. 23–27, 1997. Free Electron Lasers 1996.
- [96] A. A. Zholents and M. S. Zolotarev. Femtosecond x-ray pulses of synchrotron radiation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, pp. 912–915, Feb 1996.
- [97] M. Katoh, M. Hosaka, A. Mochihashi, M. Shimada, S. Kimura, T. Hara, Y. Takashima, and T. Takahashi. Observation of intense terahertz synchrotron radiation produced by laser bunch slicing at uvsor-ii. *Proceedings of EPAC 2006*, pp. 3377–3379, 2006.
- [98] River R. Robles, Kirk A. Larsen, David Cesar, Taran Driver, Joseph Duris, Paris Franz, Douglas Garratt, Veronica Guo, Gabriel Just, Randy Lemons, Ming-Fu Lin, Razib Obaid, Nicholas Sudar, Jun Wang, Zhen Zhang, James Cryan, and Agostino Marinelli. Spectrotemporal shaping of attosecond x-ray pulses with a fresh-slice free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 134, p. 115001, Mar 2025.
- [99] A.M. Batrakov, P.V. Vagin, P.D. Vobly, D.S. Gurov, N.I. Zubkov, I.V. Ilyin, A.B. Ogurtsov, M. Tischer, A.V. Utkin, N.G. Khavin, M.A. Kholopov, and D.S. Shichkov. Permanent magnet wigglers for reducing the emittance of the petra iii synchrotron radiation source. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, Vol. 5, No. 6, pp. 1038–1044, 2011.
- [100] G. M. Wang, T. Shaftan, W. X. Cheng, W. Guo, P. Ilinsky, Y. Li, B. Podobedov, and F. Willeke. Emittance and lifetime measurement with damping wigglers. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 87, No. 3, p. 033301, 03 2016.
- [101] Gyeongsu Jang, M. Yoon, J. Lee, B.-H. Oh, J. Kim, D.-E. Kim, and S. Shin. Investigation of the damping wiggler effect and application on the PAL fourth-generation storage ring. *Journal of Synchrotron Radiation*, Vol. 27, No. 6, pp. 1510–1517, Nov 2020.
- [102] R.L. Williams, C.E. Clayton, C. Joshi, and T.C. Katsouleas. Studies of classical radiation emission from plasma wave undulators. *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 21, No. 1, pp. 156–166, 1993.
- [103] S. Corde and K. Ta Phuoc. Plasma wave undulator for laser-accelerated electrons. *Physics of Plasmas*, Vol. 18, No. 3, March 2011.
- [104] J T Donohue. Simulation of a Smith-Purcell FEL Using a Particle-in-Cell Code. 2005.
- [105] Yen-Chieh Huang. "US12015236B2". <https://patents.google.com/patent/US12015236B2/en>.
- [106] 占部実, 佐々木右左. 理工科系一般教育 微分・積分教科書. 共立出版株式会社, 1965.
- [107] 小暮陽三. なっとくする フーリエ変換. 講談社, 1999.

- [108] EMAN の物理学.
<http://homepage2.nifty.com/eman/>.
- [109] アインシュタインの科学と生涯.
<http://koshiro56.la.coocan.jp/contents/relativity/contents/relativity.html>.